Bac 2021 mathématiques première spécialité sujet public 012.

I Exercice. 5 points

Cet exercice est un questionnaire à choix multiple (QCM). Pour chaque question, une seule des quatre réponses proposées est exacte. Une bonne réponse rapporte un point. Une mauvaise réponse, une réponse multiple ou l'absence de réponse ne rapporte ni n'enlève aucun point. Relevez sur votre copie le numéro de la question ainsi que la lettre correspondant à la réponse choisie. Aucune justification n'est demandée.

1. Quelle est la forme factorisée de $f(x) = 0{,}5(x-2)^2 - 8$?

   a) $0{,}5x^2 - 2x - 6$;

   b) $0{,}5(x-6)(x+2)$;

   c) $0{,}5(x+10)(x-6)$;

   d) $0{,}5(x-10)(x+6)$.

   Réponse b).

2. (u_n) est une suite arithmétique de raison $r = 0{,}5$ telle que $u_{10} = -4$. Quelle est la valeur du terme u_2 ?

   a) 8 ;

   b) 0 ;

   c) -10 ;

   d) -8.

   Réponse d).

3. Soit f la fonction définie pour tout $x \neq -2$ par : $f(x) = \dfrac{2x-1}{x+2}$.

   Parmi les expressions suivantes, laquelle définit la dérivée f' de la fonction f sur $\mathbb{R} \setminus \{-2\}$?

a) $f'(x) = -\dfrac{5}{(x+2)^2}$;

b) $f'(x) = \dfrac{5}{(x+2)^2}$;

c) $f'(x) = \dfrac{3}{(x+2)^2}$;

d) $f'(x) = 2$.

Réponse b).

4. On se place dans un repère orthonormé $\left(O;\vec{i},\vec{j}\right)$. Laquelle de ces équations est une équation cartésienne de la droite Δ de vecteur directeur $\overrightarrow{u}\begin{pmatrix}-1\\2\end{pmatrix}$ et passant par le point $A(-1;3)$?

a) $2x - y + 1 = 0$;

b) $-x + 2y - 7 = 0$;

c) $x + 2y + 1 = 0$;

d) $-2x - y + 1 = 0$.

Réponse d).

5. On se place dans un repère orthonormé $\left(O;\vec{i},\vec{j}\right)$. Parmi ces propositions, quelle est l'équation cartésienne du cercle de centre $A(2;4)$ et de rayon 3 ?

a) $(x-2)^2 + (y-4)^2 = 3$;

b) $(x+2)^2 + (y+4)^2 = 9$;

c) $x^2 + y^2 - 4x - 8y + 11 = 0$;

d) $x^2 + y^2 + 11 = 0$.

Réponse b).

II Exercice. 5 points

Aujourd'hui les chardons (une plante vivace) ont envahi 300 m^2 des champs d'une région. Chaque semaine, la surface envahie augmente de 5 % par le développement des racines, auquel s'ajoutent 15 m^2 suite à la dissémination des graines.

Pour tout entier naturel n, on note u_n la surface envahie par les chardons, en m^2, après n semaines ; on a donc $u_0 = 300$ m^2.

1. (a) Calculer u_1 et u_2.

Calculons u_1.

Le coefficient multiplicateur correspondant à une hausse de 5 % est

$$\begin{aligned} CM &= 1 + \frac{t}{100} \\ &= 1 + \frac{5}{100} \\ &= 1{,}05 \end{aligned}$$

Donc la surface envahie par le développement des racines après une semaine est $u_0 \times 1{,}05$. En tenant compte de la dissémination des graines la surface envahie est

$$\begin{aligned} u_1 &= u_0 \times 1{,}05 + 15 \\ &= 300 \times 1{,}05 + 15 \end{aligned}$$

$$\boxed{u_1 = 330 \text{ m}^2.}$$

De même

$$\begin{aligned} u_2 &= 1{,}05 \times u_1 + 15 \\ &= 1{,}05 \times 330 + 15 \end{aligned}$$

$$\boxed{u_2 = 361{,}5 \text{ m}^2.}$$

(b) Montrer que la suite (u_n) ainsi définie, n'est ni arithmétique ni géométrique.

Démontrons que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ n'est pas arithmétique.

$$\begin{aligned} u_1 - u0 &= 330 - 300 \\ &= 30 \end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned} u_2 - u_1 &= 361{,}5 - 330 \\ &= 31{,}5 \end{aligned}$$

donc : $u_1 - u_0 \neq u_2 - u_1$. Par conséquent

$$\boxed{(u_n)_{n\in\mathbb{N}} \text{ n'est pas arithmétique.}}$$

Montrons que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ n'est pas géométrique.

$$\begin{aligned} \frac{u_1}{u_0} &= \frac{330}{300} \\ &= 1{,}1 \end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned} \frac{u_2}{u_1} &= \frac{361{,}5}{330} \\ &= \frac{241}{220} \end{aligned}$$

donc : $\frac{u_1}{u_0} \neq \frac{u_2}{u_1}$. Par conséquent :

$$\boxed{(u_n)_{n\in\mathbb{N}} \text{ n'est pas géométrique.}}$$

On admet dans la suite de l'exercice que, pour tout entier naturel n, $u_{n+1} = 1{,}05u_n + 15$.

2. On considère la suite (v_n), définie pour tout entier naturel n, par : $v_n = u_n + 300$.

(a) Calculer v_0, puis montrer que la suite (v_n) est géométrique de raison $q = 1{,}05$.

Calculons v_0.

$v_0 = u_0 + 300 = 300 + 300$

$$\boxed{v_0 = 600.}$$

Montrons que $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite géométrique.

Soit $n \in \mathbb{N}$.

$$\begin{aligned} v_{n+1} &= u_{n+1} + 300 \\ &= 1{,}05u_n + 15 + 300 \\ &= 1{,}05(u_n + 300) \\ &= 1{,}05v_n \end{aligned}$$

Ainsi, pour tout entier naturel n : $u_{n+1} = 1{,}05u_n$. Autrement dit

$$\boxed{(v_n)_{n\in\mathbb{N}} \text{ est une géométrique de raison } q = 1{,}05.}$$

(b) Pour tout entier naturel n, exprimer v_n en fonction de n, puis montrer que $u_n = 600 \times 1{,}05^n - 300$.

Déterminons le terme général de $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

Puisque $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite géométrique de terme initial $v_0 = 600$ et de raison $a1{,}05$ donc, pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$v_n = q^n \times v_0$$

Autrement dit

$$\boxed{\text{pour tout } n \in \mathbb{N},\ v_n = 1{,}05^n \times 600.}$$

Déterminons le terme général de $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

Soit $n \in \mathbb{N}$.
Par construction $v_n = u_n + 300$. Donc

$$u_n = v_n - 300$$

Ainsi

$$\boxed{\text{pour tout } n \in \mathbb{N},\ u_n = 1{,}05^n \times 600 - 300.}$$

3. Est-il correct d'affirmer que la surface envahie par les chardons aura doublé au bout de 8 semaines ? Justifier la réponse.

   Calculons u_8.

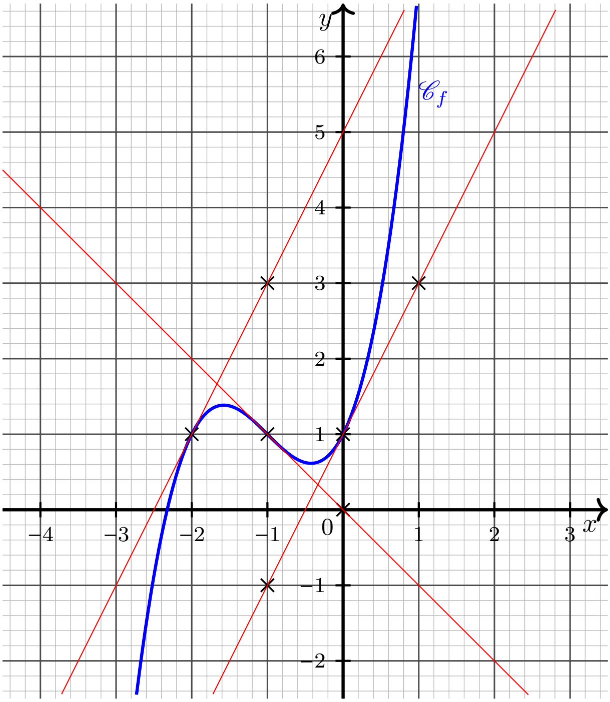
$$\begin{aligned} u_8 &= 1{,}05^8 \times 600 - 300 \\ &\approx 586{,}4732 \end{aligned}$$

   $2 \times 300 > u_8$ donc

   la surface envahie par les chardons n'aura pas doublé au bout de 8 semaines.

III Exercice. 5 points

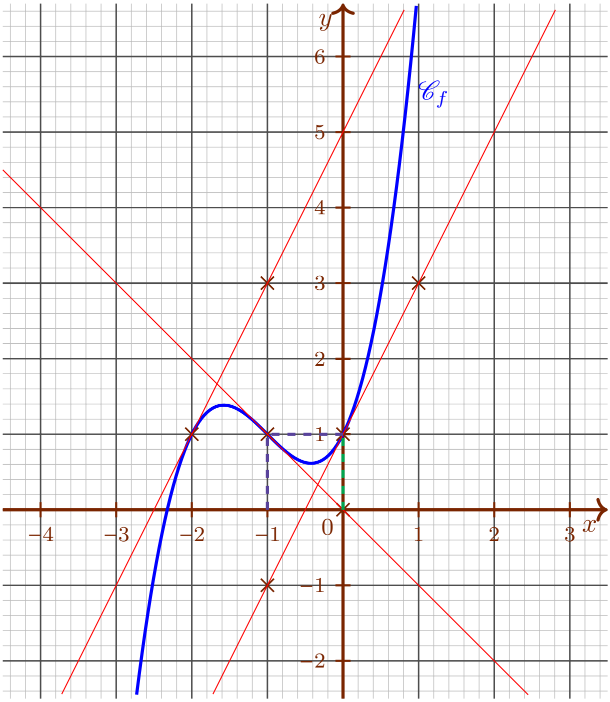
Dans la figure ci-dessous on a tracé $\mathscr{C}_f$, la courbe représentative d'une fonction f définie et dérivable sur $\mathbb{R}$ ainsi que les tangentes à $\mathscr{C}_f$ aux points d'abscisses -2, -1 et 0.



1. Recopier sur la copie en le complétant le tableau de valeurs ci-dessous.

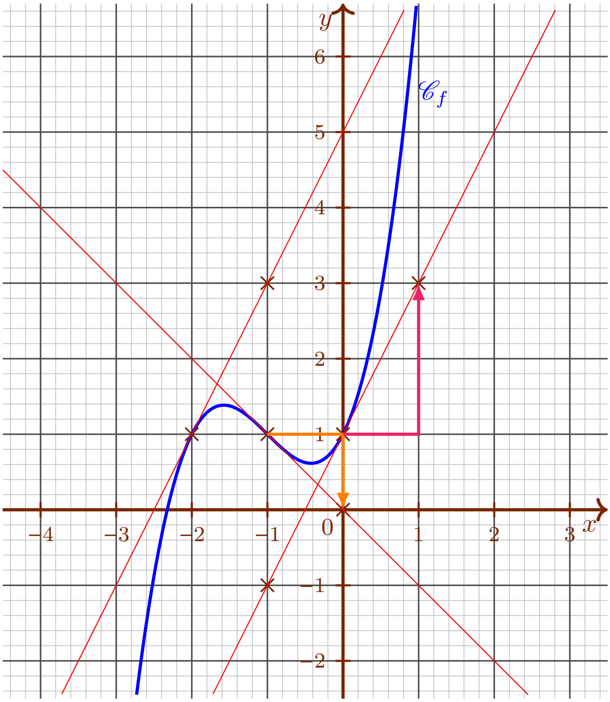
x	-1	0
$f(x)$		
$f'(x)$		

Par lecture graphique :



donc pour les images

x	-1	0
$f(x)$	1	1
$f'(x)$		



et pour les antécédents

x	-1	0
$f(x)$	1	1
$f'(x)$	-1	2

On admet que la fonction f est définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x) = x^3 + 3x^2 + 2x + 1.$$

2. (a) Calculer $f'(x)$, pour tout réel x.

Déterminons f'.

f est une fonction polynomiale donc est dérivable sur $\mathbb{R}$ et

$$\boxed{\text{pour tout } x \text{ réel } f'(x) = 3x^2 + 6x + 2.}$$

(b) Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation : $f'(x) = 0$.

Résolvons $f'(x) = 0$.

f' est une fonction polynomiale de degré deux donnée sous forme développée avec $a = 3$, $b = 6$ et $c = 2$.

$$\begin{aligned}\Delta &= b^2 - 4ac \\ &= 6^2 - 4 \times 3 \times 2 \\ &= 12\end{aligned}$$

$\Delta > 0$ donc f' admet deux racines réelles distinctes :

$$\begin{aligned}x_1 &= \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2 \times a} \\ &= \frac{-6 - \sqrt{12}}{2 \times 3} \\ &= -1 - \frac{\sqrt{3}}{3}\end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned}x_2 &= \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2 \times a} \\ &= \frac{-6 + \sqrt{28}}{2 \times 1} \\ &= -1 + \frac{\sqrt{3}}{3}\end{aligned}$$

x	$-\infty$		x_1		x_2		$+\infty$
f'		$+$	0	$-$	0	$+$	

L'ensemble des solutions de l'équation $f'(x) = 0$ est $\left\{-3 - \frac{\sqrt{3}}{3}; -3 + \frac{\sqrt{3}}{3}\right\}$.

3. Dresser le tableau de variation de la fonction f.

   Comme la fonction trinôme f' est du signe de son coefficient dominant, $a = 1 > 0$, sauf entre ses éventuelles racines :

x	$-\infty$		x_1		x_2		$+\infty$
f'		$+$	0	$-$	0	$+$	
f		$\nearrow$	$f(x_1)$	$\searrow$	$f(x_2)$	$\nearrow$	

   avec $f(x_1) = 1 + \frac{2}{9}\sqrt{3}$ et $f(x_2) = 1 - \frac{2}{9}\sqrt{3}$.

4. Le point $S(-4; -3)$ appartient-il à la tangente à la courbe représentative de f au point d'abscisse $x = -2$?

   Déterminons une équation réduite de la $\mathscr{T}$ à la courbe représentative de f au point d'abscisse $x = -2$.

   Nous savons qu'une équation de $\mathscr{T}$ est $y = f'(-2)(x - (-2)) + f(-2)$. Or $f'(-2) = 2$ et $f(-2) = 1$ donc

   $$\mathscr{T}\ :\ y = 2(x + 2) + 1.$$

   Autrement dit l'équation réduite de $\mathscr{T}$ est

   $$y = 2x + 5.$$

   Comme $2 \times (-4) + 5 = -3$ nous pouvons affirmer que

   $$\boxed{S \in \mathscr{T}.}$$

IV Exercice. 5 points

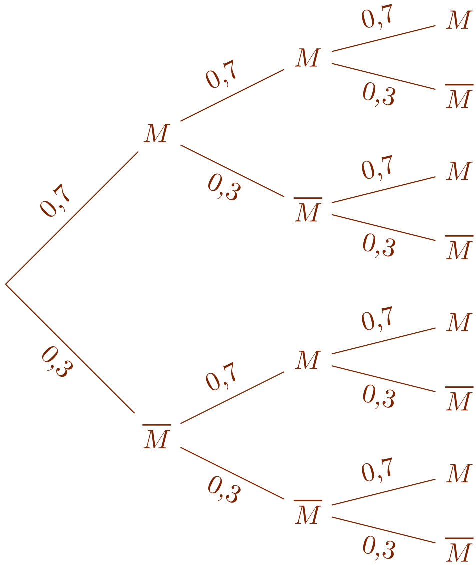
Une étude statistique menée lors des entraînements montre que, pour un tir au but, Karim marque avec une probabilité de 0,7.

Karim effectue une série de 3 tirs au but. Les deux issues possibles après chaque tir sont les événements :

- M : « Karim marque un but » ;
- R : « Karim rate le tir au but ».

1. On note X la variable aléatoire qui prend pour valeur le nombre total de buts marqués à l'issue de cette série de tir par Karim.

   (a) Réaliser un arbre pondéré permettant de décrire toutes les issues possibles.



   (b) Déterminer la loi de probabilité de X.

   Déterminons la loi de X.

   D'après l'arbre : $X \in \{0; 1; 2; 3\}$.
   Calculons, par exemple, $\mathbb{P}(X = 2)$.
   $\{X = 2\} = \{MM\overline{M}, M\overline{M}M, \overline{M}MM\}$.
   Donc

$$\mathbb{P}(X = 2) = \mathbb{P}(MM\overline{M}) + \mathbb{P}(M\overline{M}M) + \mathbb{P}(\overline{M}MM)$$

   D'après la formule des probabilités composées :

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(X = 2) &= 0{,}7 \times 0{,}7 \times 0{,}3 + 0{,}7 \times 0{,}3 \times 0{,}7 + 0{,}3 \times 0{,}7 \times 0{,}7 \\ &= 0{,}441\end{aligned}$$

   En procédant de même pour les autres valeurs prises par X :

x	0	1	2	3
$\mathbb{P}(X=x)$	0,027	0,189	0,441	0,343

(c) Calculer l'espérance $E(X)$ de la variable aléatoire X.

Calculons $\mathbb{E}(X)$.

$$\begin{aligned}\mathbb{E}(X) &= \sum_{i=1}^{n} x_i \times \mathbb{P}(X=x_i)\\ &= 0\times 0{,}027 + 1\times 0{,}189 + \cdots + 3\times 0{,}343\end{aligned}$$

$$\boxed{\mathbb{E}(X) = 2{,}1.}$$

2. On propose à un spectateur le jeu suivant : il mise 15 € avant la série de tirs au but de Karim ; chaque but marqué par Karim lui rapporte 6 €, et chaque but manqué par Karim ne lui rapporte rien.
On note Y la variable aléatoire qui prend pour valeur le gain algébrique du spectateur, c'est-à-dire la différence entre le gain total obtenu et la mise engagée.

(a) Exprimer Y en fonction de X.

$$\boxed{Y = 6X - 15.}$$

(b) Calculer l'espérance $E(Y)$ de la variable aléatoire Y. Interpréter ce résultat dans le contexte de l'énoncé.

Déterminons la loi de probabilité de Y.

y	-15	-9	-3	3
$\mathbb{P}(Y=y)$	0,027	0,189	0,441	0,343

Donc

$$\begin{aligned}\mathbb{E}(X) &= \sum_{i=0}^{n} y_i \mathbb{P}(Y=y_i)\\ &= -15\times 0{,}027 + (-9)\times 0{,}189 + \cdots + 3\times 0{,}343\end{aligned}$$

$$\mathbb{E}(Y) = -2{,}4.$$

Si l'on recommençait un grand nombre de fois ce jeu, en moyenne, à chaque partie, on perdrait 2,4 €.