

Bac 2008/04 Pondichéry.

EXERCICE 4

7 points

Commun à tous les candidats

On cherche à modéliser de deux façons différentes l'évolution du nombre, exprimé en millions, de foyers français possédant un téléviseur à écran plat, en fonction de l'année.

Les parties A et B sont indépendantes

Partie A : un modèle discret

Soit u_n le nombre, exprimé en millions, de foyers possédant un téléviseur à écran plat l'année n .

On pose $n = 0$ en 2005, $u_0 = 1$ et, pour tout $n \geq 0$,

$$u_{n+1} = \frac{1}{10}u_n(20 - u_n).$$

1. Soit f la fonction définie sur $[0 ; 20]$ par

$$f(x) = \frac{1}{10}x(20 - x).$$

- (a) Étudier les variations de f sur $[0 ; 20]$.
- (b) En déduire que pour tout $x \in [0 ; 20]$, $f(x) \in [0 ; 10]$.
- (c) On donne en **annexe** la courbe représentative \mathcal{C} de la fonction f dans un repère orthonormal.

Représenter, sur l'axe des abscisses, à l'aide de ce graphique, les cinq premiers termes de la suite $(u_n)_{n \geq 0}$.

2. Montrer par récurrence que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $0 \leq u_n \leq u_{n+1} \leq 10$.
3. Montrer que la suite $(u_n)_{n \geq 0}$ est convergente et déterminer sa limite.

Partie B : un modèle continu

Soit $g(x)$ le nombre, exprimé en millions, de tels foyers l'année x .

On pose $x = 0$ en 2005, $g(0) = 1$ et g est une solution, qui ne s'annule pas sur $[0 ; +\infty[$, de l'équation différentielle

$$(E) \quad ; \quad y' = \frac{1}{20}y(10 - y).$$

1. On considère une fonction y qui ne s'annule pas sur $[0 ; +\infty[$ et on pose $z = \frac{1}{y}$.

- (a) Montrer que y est solution de (E) si et seulement si z est solution de l'équation différentielle :

$$(E_1) \quad : \quad z' = -\frac{1}{2}z + \frac{1}{20}.$$

- (b) Résoudre l'équation (E_1) et en déduire les solutions de l'équation (E).

2. Montrer que g est définie sur $[0 ; +\infty[$ par $g(x) = \frac{10}{9e^{-\frac{1}{2}x} + 1}$.
3. Étudier les variations de g sur $[0 ; +\infty[$.
4. Calculer la limite de g en $+\infty$ et interpréter le résultat.
5. En quelle année le nombre de foyers possédant un tel équipement dépassera-t-il 5 millions ?