

Bac 2006/06 Asie.

EXERCICE 4

7 points

Commun à tous les candidats

Partie A

On considère l'équation différentielle

$$(E) : y' + y = e^{-x}.$$

1. Démontrer que la fonction u définie sur l'ensemble \mathbb{R} des nombres réels par $u(x) = xe^{-x}$ est une solution de (E).
2. Résoudre l'équation différentielle $(E_0) : y' + y = 0$.
3. Démontrer qu'une fonction v , définie et dérivable sur \mathbb{R} , est solution de (E) si et seulement si $v - u$ est solution de (E_0) .
4. En déduire toutes les solutions de (E).
5. Déterminer la fonction f_2 , solution de (E), qui prend la valeur 2 en 0.

Partie B

k étant un nombre réel donné, on note f_k la fonction définie sur l'ensemble \mathbb{R} par :

$$f_k(x) = (x + k)e^{-x}.$$

On note \mathcal{C}_k la courbe représentative de la fonction f_k dans un repère orthonormal $(O; \vec{i}, \vec{j})$.

1. Déterminer les limites de f_k en $-\infty$ et $+\infty$.
2. Calculer $f_k'(x)$ pour tout réel x .
3. En déduire le tableau de variations de f_k .

Partie C

1. On considère la suite d'intégrales (I_n) définie par $I_0 = \int_{-2}^0 e^{-x} dx$ et pour tout entier naturel $n \geq 1$ par : $I_n = \int_{-2}^0 x^n e^{-x} dx$.
 - (a) Calculer la valeur exacte de l'intégrale I_0 .
 - (b) En utilisant une intégration par parties, démontrer l'égalité :

$$I_{n+1} = (-2)^{n+1} e^2 + (n+1)I_n.$$

(c) En déduire les valeurs exactes des intégrales I_1 et I_2 .

2. Le graphique ci-dessous représente une courbe \mathcal{C}_k qui est la représentation graphique d'une fonction f_k définie à la partie B.

a. À l'aide des renseignements donnés par le graphique, déterminer la valeur du nombre réel k correspondant.

b. Soit \mathcal{S} l'aire de la partie hachurée (en unité d'aire) ; exprimer \mathcal{S} en fonction de I_1 et I_0 et en déduire sa valeur exacte.