Bac 2006/04/03 Pondichéry.

Exercice 4 **7 points**
Commun à tous les candidats

Les parties A et B sont indépendantes.

Un laboratoire de recherche étudie l'évolution d'une population animale qui semble en voie de disparition.

Partie A

En 2000, une étude est effectuée sur un échantillon de cette population dont l'effectif initial est égal à mille.

Cet échantillon évolue et son effectif, exprimé en milliers d'individus, est approché par une fonction f du temps t (exprimé en années à partir de l'origine 2000).

D'après le modèle d'évolution choisi, la fonction f est dérivable, strictement positive sur $[0\ ;\ +\infty[$, et satisfait l'équation différentielle :

$$(\mathrm{E}) \qquad y' = -\frac{1}{20}y(3-\ln y).$$

1. Démontrer l'équivalence suivante : une fonction f, dérivable, strictement positive sur $[0\ ;\ +\infty[$, vérifie, pour tout t de $[0\ ;\ +\infty[$, $f'(t) = -\frac{1}{20}f(t)[3-\ln(f(t))]$ si et seulement si la fonction $g = \ln(f)$ vérifie, pour tout t de $[0\ ;\ +\infty[$, $g'(t) = \frac{1}{20}g(t) - \frac{3}{20}$.
2. Donner la solution générale de l'équation différentielle :
$$(\mathrm{H}) \qquad z' = \frac{1}{20}z - \frac{3}{20}.$$
3. En déduire qu'il existe un réel C tel que, pour tout t de $[0\ ;\ +\infty[$
$$f(t) = \exp\left[3 + C\exp\left(\frac{t}{20}\right)\right].$$
(la notation exp désigne la fonction exponentielle naturelle $x \mapsto \mathrm{e}^x$).
4. La condition initiale conduit donc à considérer la fonction f définie par :
$$f(t) = \exp\left[3 - 3\exp\left(\frac{t}{20}\right)\right].$$
   (a) Déterminer la limite de la fonction f en $+\infty$.

(b) Déterminer le sens de variation de f sur $[0\ ;\ +\infty[$.

(c) Résoudre dans $[0\ ;\ +\infty[$ l'inéquation $f(t) < 0,02$.
Au bout de combien d'années, selon ce modèle, la taille de l'échantillon sera-t-elle inférieure à vingt individus ?

Partie B

En 2005, ce laboratoire de recherche met au point un test de dépistage de la maladie responsable de cette disparition et fournit les renseignements suivants : « La population testée comporte 50 % d'animaux malades. Si un animal est malade, le test est positif dans 99 % des cas ; si un animal n'est pas malade, le test est positif dans 0,1 % des cas ».

On note M l'évènement « l'animal est malade », $\overline{M}$ l'évènement contraire et T l'évènement « le test est positif ».

1. Déterminer $P(M)$, $P_M(T)$, $P_{\overline{M}}(T)$.
2. En déduire $P(T)$.
3. Le laboratoire estime qu'un test est fiable, si sa valeur prédictive, c'est-à-dire la probabilité qu'un animal soit malade sachant que le test est positif, est supérieure à $0,999$. Ce test est-il fiable ?