# Bac 2000/06 Amérique du Nord.

## Problème.

Soit $f$ la fonction définie sur $[0, +\infty[$ par :

$$\begin{cases} f(x) &= \dfrac{x^2+x+1}{x^2}\mathrm{e}^{-\frac{1}{x}} \text{ pour } x > 0 \\ f(0) &= 0. \end{cases}$$

On note $\mathcal{C}$ la courbe représentative de $f$ dans un repère orthonormal $\left(O;\vec{i},\vec{j}\right)$ (unité graphique 5 cm).

### Partie A.

1. Démontrer que la droite $(\Delta)$ d'équation $y = 1$ est asymptote à $\mathcal{C}$.

2. Pour $x > 0$ , calculer $\dfrac{f(x)-f(0)}{x}$. Étudier la limite de cette expression quand $x$ tend vers 0. (on pourra utiliser, pour $n$ entier naturel non nul, $\displaystyle\lim_{u\to+\infty} u^n\mathrm{e}^{-u} = 0$.
   Que peut-on en déduire pour la fonction $f$ ? Que peut-on en déduire pour la courbe $\mathcal{C}$ ?

3. Démontrer que pour tout $x$ de $]0, +\infty[$ on a $f'(x) = \dfrac{1-x}{x^4}\mathrm{e}^{-\frac{1}{x}}$.

4. Étudier les variations de la fonction $f$ et dresser le tableau de variation de $f$.

### Partie B

On note $g$ la fonction définie sur $]0\ ;\ +\infty[$ par $g(x) = f(x) - xf'(x)$.

1. Montrer que dans $]0\ ;\ +\infty[$, les équations $g(x) = 0$ et $x^3 + x^2 + 2x - 1 = 0$ sont équivalentes.
2. Démontrer que l'équation $x^3 + x^2 + 2x - 1 = 0$ admet une seule racine réelle $\alpha$ dont on justifiera un encadrement à $10^{-2}$ près.
3. On pose $A = \dfrac{f(\alpha)}{\alpha}$. Encadrer $A$ à $2\times 10^{-1}$ près (justifier) et montrer que $A = f'(\alpha)$.
4. Pour tout $a > 0$, on note $T_a$ la tangente à $\mathcal{C}$ au point d'abscisse $a$.
   Montrer que $T_\alpha$ a pour équation $y = Ax$. Tracer $T_\alpha$, puis la courbe $\mathcal{C}$.

5. Déduire des questions précédentes que de toutes les tangentes $T_a$ à $\mathcal{C}$ (en des points d'abscisses non nulles), seule $T_\alpha$ passe par l'origine O.

6. On admettra que $T_\alpha$ est au-dessus de $\mathcal{C}$ sur $]0\ ;\ +\infty[$.

   (a) Par lecture graphique (et sans justification), donner le nombre de solutions de l'équation $f(x) = m$ , suivant le réel $m$ donné.

   (b) Par lecture graphique (et sans justification), donner le nombre de solutions de l'équation $f(x) = mx$ selon le réel $m$ donné.

**Partie C**

1. Pour $n \in \mathbb{N}^*$ on pose $u_n = \displaystyle\int_{\frac{1}{n}}^{1} f(x)\, \mathrm{d}x$. Sans calculer explicitement $u_n$, déterminer le signe de $u_{n+1} - u_n$. En déduire que la suite $(u_n)$ est croissante.
2. Démontrer que la fonction $h$, définie sur $]0\ ;\ +\infty[$ par $h(x) = (x+1)\mathrm{e}^{-\frac{1}{x}}$ est une primitive de $f$ sur $]0\ ;\ +\infty[$.
3. Calculer $u_n$. Interpréter graphiquement le résultat.
4. Étudier la convergence de la suite $(u_n)$.