Métropole, groupe V. Juin 1990.

I Exercice. 5 points

1. Dans le plan rapporté à un repère orthonormé $\left(O; \vec{i}, \vec{j}\right)$, on considère l'hyperbole (H) d'équation :
$$y^2 - x^2 = 1.$$
   (a) Déterminer ses sommets et ses asymptotes.

   (b) Tracer cette hyperbole.

2. Soit α un nombre réel appartenant à l'intervalle $\left]-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right[$.
Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation :
$$z^2 \cos^2 \alpha - z \sin 2\alpha - \cos^2 \alpha = 0 \quad (E).$$

3. Soit M l'image dans le plan complexe de la solution de (E) dont la partie imaginaire est positive.

   (a) Démontrer que M appartient à l'hyperbole (H) définie au 1.

   (b) Déterminer le sous-ensemble de (H) décrit par M lorsque α décrit l'intervalle $\left]-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right[$.

II Exercice. 4 points

Soient A, B et C trois points distincts du plan orienté.
Soient :
— s_A la similitude directe de centre A transformant B en C.
— s_B la similitude directe de centre B transformant C en A.
— s_C la similitude directe de centre C transformant A en B.
On se propose d'étudier $s = s_C \circ s_B \circ s_A$.

1. (a) Déterminer l'image de B par s.

   (b) Démontrer que s est la symétrie centrale de centre B. (On pourra utiliser les transformations vectorielles associées à s_A, s_B et s_C.)

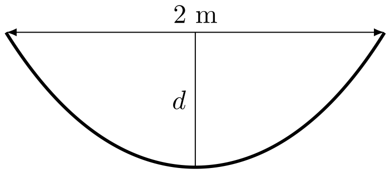
   (c) Soit $C' = s_B \circ s_A(C)$ et $C'' = s_C(C')$.
   Quelle est la position relative des points B, C et C'' ?
   En déduire que A est le milieu du segment $[CC']$.
   Placer les points A, B, C, C' et C'' sur une figure.

III Problème. 12 points

La chaînette est la courbe suivant laquelle se tend un fil homogène, pesant, flexible et inextensible, suspendu par ses extrémités à deux points fixes (Déf. Petit Larousse). On montre et on admettra dans ce problème que, rapportée à un repère orthonormé convenable, la chaînette admet une équation de la forme :

$$y = \frac{\mathrm{e}^{\lambda x} + \mathrm{e}^{-\lambda x}}{2\lambda} \quad \text{avec } \lambda > 0.$$

On laisse pendre un tel fil d'une longueur de 4 m entre deux points situés à une même hauteur et distants de 2 m. Le but du problème est de calculer une valeur approchée de la flèche prise par le fil, c'est-à-dire la distance d indiquée sur le schéma ci-dessous.



À cet effet, pour tout $\lambda > 0$, on considère la fonction f_λ définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f_\lambda = \frac{\mathrm{e}^{\lambda x} + \mathrm{e}^{-\lambda x}}{2\lambda}.$$

On note C_λ la courbe représentative de f_λ dans un repère orthonormé.

Étude de la chaînette.

1. (a) Étudier la parité de f_λ : préciser sa limite en $+\infty$ et dresser son tableau de variations.

   (b) Tracer la courbe C_λ (unité graphique : 1 cm).

   (c) Prouver que pour tout λ la courbe C_λ se déduit de C_1 par une homothétie dont on précisera le centre et le rapport.

2. Calcul de la longueur de la chaînette.

   On admet que la longueur $L(\lambda)$ de l'arc de courbe d'équation $y = f_\lambda(x)$ compris entre les points d'abscisse $x = -1$ et $x = 1$ est égale à l'intégrale :

   $$L(\lambda) = \int_{-1}^{1} \sqrt{1 + \left(f'_\lambda(x)\right)^2}\, \mathrm{d}x$$

   (l'unité de longueur étant le mètre).

(a) Vérifier que, pour tout $x \in \mathbb{R}$,

$$1 + \left(f'_\lambda(x)\right)^2 = \left(\frac{\mathrm{e}^{\lambda x} + \mathrm{e}^{-\lambda x}}{2}\right)^2.$$

(b) En déduire que :

$$L(\lambda) = \frac{\mathrm{e}^{\lambda} - \mathrm{e}^{-\lambda}}{\lambda} \qquad (1).$$

3. Calcul de la flèche.

   Exprimer en fonction de λ la flèche $d(\lambda) = f_\lambda(1) - f_\lambda(0)$ de la chaînette C_λ (l'unité de longueur étant le mètre).

Étude de l'équation $L(\lambda) = 4$.

Soit λ un nombre réel strictement positif.

1. (a) Résoudre l'équation d'inconnue X réelle $X^2 - 4\lambda X - 1 = 0$.

   (b) En déduire que $L(\lambda) = 4$ équivaut à $\mathrm{e}^{\lambda} = 2\lambda + \sqrt{4\lambda^2 + 1}$.

   (c) Prouver enfin que $L(\lambda) = 4$ équivaut à :

$$\lambda = \ln\left(2\lambda + \sqrt{4\lambda^2 + 1}\right).$$

2. Soit g la fonction définie sur $[0; +\infty[$ par :

$$g(x) = \ln\left(2x + \sqrt{4x^2 + 1}\right).$$

   (a) Calculer la dérivée de la fonction $u : x \mapsto 2x + \sqrt{4x^2 + 1}$.
   Calculer $g'(x)$.

   (b) En déduire le sens de variation de g.

3. Soit h la fonction définie sur $[0; +\infty[$ par

$$h(x) = x - g(x).$$

(a) Calculer $h'(x)$. Étudier le signe de $h'(x)$.

(b) Prouver que pour tout $x > 0$:

$$g(x) = \ln x + \ln\left(2 + \sqrt{4 + \frac{1}{x^2}}\right).$$

En déduire la limite de $h(x)$ quand x tend vers $+\infty$.

(c) Dresser le tableau de variations de h. En déduire que l'équation $g(x) = x$ admet une solution, notée α, et une seule dans $]0; +\infty[$.

(d) Prouver que $2 \leqslant \alpha \leqslant 3$.

4. On note $I = [2; +\infty[$.

(a) Démontrer que pour tout élément x de I, $g(x)$ appartient à I. (On pourra utiliser 2.(b).)

(b) Prouver que pour tout élément x de I :

$$0 < g'(x) \leqslant 0{,}5.$$

En déduire que pour tout élément x de I :

$$|g(x) - \alpha| \leqslant 0{,}5|x - \alpha|.$$

5. (a) i. Soit $(u_n)_{n>0}$ la suite d'éléments de I définie par : $u_0 = 2$ et pour tout $n \geqslant 0$, $u_{n+1} = g(u_n)$.
Démontrer que pour tout entier naturel n :

$$|u_n - \alpha| \leqslant 0{,}5^n|u_0 - \alpha|.$$

ii. Conclure quand à la convergence et à la limite de la suite $(u_n)_{n>0}$.

iii. Déterminer un entier n_0 tel que u_{n_0} soit une valeur approchée de α à la précision 10^{-3} et calculer u_{n_0}.

(b) On se place dans la situation décrite au début du problème.
En rassemblant les résultats obtenus dans celui-ci, calculer une valeur approchée de la flèche $d(\alpha)$.