Métropole, groupe V. Juin 1990.

I Exercice. 5 points

1. (a)
   (b)
2.
3. (a)
   (b)

II Exercice. 4 points

1. (a)
   (b)
   (c)

III Problème. 12 points

Étude de la chaînette.

1. (a) * Soit $x \in \mathbb{R}$.

$$\begin{aligned} f_\lambda(-x) &= \frac{\mathrm{e}^{\lambda(-x)} + \mathrm{e}^{-\lambda(-x)}}{2\lambda} \\ &= \frac{\mathrm{e}^{\lambda x} + \mathrm{e}^{-\lambda x}}{2\lambda} \\ &= f_\lambda(x) \end{aligned}$$

$$\boxed{f_\lambda \text{ est paire.}}$$

* Comme $\lambda > 0$:
$\mathrm{e}^{\lambda x} \underset{x \to +\infty}{\longrightarrow} +\infty$ et $\mathrm{e}^{-\lambda x} \underset{x \to +\infty}{\longrightarrow} 0$
Donc

$$\boxed{f_\lambda(x) \underset{x \to +\infty}{\longrightarrow} +\infty.}$$

* f_λ est une combinaisons linéaire de fonction dérivable sur $\mathbb{R}$ donc est dérivable sur $\mathbb{R}$ et pour tout x réel :

$$\begin{aligned} f'_\lambda(x) &= \frac{1}{2\lambda}\left[\lambda \mathrm{e}^{\lambda x} - \lambda \mathrm{e}^{-\lambda x}\right] \\ &= \frac{1}{2}\left[\mathrm{e}^{\lambda x} - \mathrm{e}^{-\lambda x}\right] \end{aligned}$$

f_λ étant paire il suffit d'étudier ses variations sur $\mathbb{R}_+$.
Soit $x \in \mathbb{R}_+^*$.
Comme $\lambda > 0$:

$$\lambda x > -\lambda x$$

Exponentielle étant strictement croissante :

$$\mathrm{e}^{\lambda x} > \mathrm{e}^{-\lambda x}$$

D'où :

$$\mathrm{e}^{\lambda x} - \mathrm{e}^{-\lambda x} > 0$$

Comme de plus $f'_\lambda(0) = 0$ et en tenant compte de la parité de f_λ nous en déduisons le tableau de variation de f_λ :

x	$-\infty$		0		$+\infty$
f'_λ		$-$	0	$+$	
f_λ	$+\infty$	$\searrow$	$\frac{1}{\lambda}$	$\nearrow$	$+\infty$

(b)

(c)

2. (a) Soit $x \in \mathbb{R}$.

$$\begin{aligned}
1+\left(f'_\lambda(x)\right)^2 &= 1+\left(\frac{\mathrm{e}^{\lambda x}-\mathrm{e}^{-\lambda x}}{2}\right)^2\\
&= 1+\frac{\left(\mathrm{e}^{\lambda x}-\mathrm{e}^{-\lambda x}\right)^2}{4}\\
&= \frac{4+\left(\mathrm{e}^{\lambda x}\right)^2-2\mathrm{e}^{\lambda x}\mathrm{e}^{-\lambda x}+\left(\mathrm{e}^{-\lambda x}\right)^2}{4}\\
&= \frac{4+\left(\mathrm{e}^{\lambda x}\right)^2-2+\left(\mathrm{e}^{-\lambda x}\right)^2}{4}\\
&= \frac{\left(\mathrm{e}^{\lambda x}\right)^2+2+\left(\mathrm{e}^{-\lambda x}\right)^2}{4}\\
&= \frac{\left(\mathrm{e}^{\lambda x}\right)^2+2\mathrm{e}^{\lambda x}\mathrm{e}^{-\lambda x}+\left(\mathrm{e}^{-\lambda x}\right)^2}{4}\\
&= \frac{\left(\mathrm{e}^{\lambda x}+\mathrm{e}^{-\lambda x}\right)^2}{2^2}
\end{aligned}$$

Enfin :

$$\boxed{\forall x\in\mathbb{R},\ 1+\left(f'_\lambda(x)\right)^2=\left(\frac{\mathrm{e}^{\lambda x}+\mathrm{e}^{-\lambda x}}{2}\right)^2.}$$

(b)

$$\begin{aligned}
L(\lambda) &= \int_{-1}^{1} \sqrt{1 + (f'_\lambda(x))}\,\mathrm{d}x \\
&= \int_{-1}^{1} \left|\frac{\mathrm{e}^{\lambda x} + \mathrm{e}^{-\lambda x}}{2}\right| \mathrm{d}x \\
&= \int_{-1}^{1} \frac{\mathrm{e}^{\lambda x} + \mathrm{e}^{-\lambda x}}{2} \mathrm{d}x \\
&= \frac{1}{2} \int_{-1}^{1} \mathrm{e}^{\lambda x} + \mathrm{e}^{-\lambda x} \mathrm{d}x \\
&= \frac{1}{2} \left[\frac{1}{\lambda}\mathrm{e}^{\lambda x} - \frac{1}{\lambda}\mathrm{e}^{-\lambda x}\right]_{-1}^{1} \\
&= \frac{1}{2\lambda} \left(\mathrm{e}^{\lambda} - \mathrm{e}^{-\lambda} - (\mathrm{e}^{-\lambda} - \mathrm{e}^{\lambda})\right) \\
&= \frac{1}{\lambda} \left(\mathrm{e}^{\lambda} - \mathrm{e}^{-\lambda}\right)
\end{aligned}$$

Finalement :

$$\boxed{L(\lambda) = \frac{\mathrm{e}^{\lambda} - \mathrm{e}^{-\lambda}}{\lambda}.}$$

3.

$$\begin{aligned}
d(\lambda) &= f_\lambda(1) - f_\lambda(0) \\
&= \frac{\mathrm{e}^{\lambda} - \mathrm{e}^{-\lambda}}{2\lambda} - \frac{2}{2\lambda}
\end{aligned}$$

$$\boxed{d(\lambda) = \frac{\mathrm{e}^{\lambda} - \mathrm{e}^{-\lambda} - 2}{2\lambda}.}$$

Étude de l'équation $L(\lambda) = 4$.

1. (a) Il est bien sûr possible de passer par le discriminant.

$$\begin{aligned}
X^2 - 4\lambda X - 1 &= X^2 - 2 \times 2\lambda \times X + (2\lambda)^2 - (2\lambda)^2 - 1 \\
&= (X - 2\lambda)^2 - 4\lambda^2 - 1
\end{aligned}$$

Donc :

$$\begin{aligned} X^2 - 4\lambda X - 1 = 0 &\Leftrightarrow (X - 2\lambda)^2 - 4\lambda^2 - 1 = 0 \\ &\Leftrightarrow (X - 2\lambda)^2 = 4\lambda^2 + 1 \end{aligned}$$

L'ensemble des solutions de l'équation est :
$\mathscr{S} = \{2\lambda + \sqrt{4\lambda^2 + 1},\ 2\lambda - \sqrt{4\lambda^2 + 1}\}$.

(b)

$$\begin{aligned} L(\lambda) = 4 &\Leftrightarrow \frac{\mathrm{e}^{\lambda} - \mathrm{e}^{-\lambda}}{\lambda} = 4 \\ &\Leftrightarrow \mathrm{e}^{\lambda} - \mathrm{e}^{-\lambda} - 4\lambda = 0 \\ &\Leftrightarrow \mathrm{e}^{\lambda} - \mathrm{e}^{-\lambda} = 4\lambda \\ &\Leftrightarrow \mathrm{e}^{\lambda}\left(\mathrm{e}^{\lambda} - \mathrm{e}^{-\lambda} - 4\lambda\right) = 0 \\ &\Leftrightarrow \left(\mathrm{e}^{\lambda}\right)^2 - \mathrm{e}^{\lambda}\mathrm{e}^{-\lambda} - 4\lambda \mathrm{e}^{\lambda} = 0 \\ &\Leftrightarrow \left(\mathrm{e}^{\lambda}\right)^2 - 4\lambda \mathrm{e}^{\lambda} - 1 = 0 \end{aligned}$$

Ainsi $L(\lambda) = 4$ si et seulement si e^{λ} est solution de $X^2 - 4\lambda X - 1 = 0$. Et même : $L(\lambda) = 4$ si et seulement si e^{λ} est une solution positive de $X^2 - 4\lambda X - 1 = 0$.

Or des deux racines $2\lambda + \sqrt{4\lambda^2 + 1}$ et $2\lambda - \sqrt{4\lambda^2 + 1}$ seule la première est (clairement) positive. Pour la seconde : $(2\lambda)^2 < 4\lambda^2 + 1$, donc $\sqrt{(2\lambda)^2} < \sqrt{4\lambda^2 + 1}$ et par conséquent $2\lambda < \sqrt{4\lambda^2 + 1}$.

Finalement

$$L(\lambda) = 4 \Leftrightarrow \mathrm{e}^{\lambda} = 2\lambda + \sqrt{4\lambda^2 + 1}.$$

(c) ln réalisant une bijection de $\mathbb{R}_+^*$ sur $\mathbb{R}$ dont la réciproque est l'exponentielle :

$$\begin{aligned} L(\lambda) = 4 &\Leftrightarrow \mathrm{e}^{\lambda} = 2\lambda + \sqrt{4\lambda^2 + 1} \\ &\Leftrightarrow \ln\left[\mathrm{e}^{\lambda}\right] = \ln\left[2\lambda + \sqrt{4\lambda^2 + 1}\right] \\ &\Leftrightarrow \lambda = \ln\left[2\lambda + \sqrt{4\lambda^2 + 1}\right] \end{aligned}$$

2. (a) $x \mapsto 4x^2+1$ est strictement positive sur $[0;+\infty[$ donc $x \mapsto \sqrt{4x^2+1}$ est dérivable sur $[0;+\infty[$ et par conséquent u est dérivable sur $[0;+\infty[$.
Pour tout x réel :

$$\begin{aligned} u'(x) &= 2 + 4 \times 2x \times \frac{1}{2\sqrt{4x^2+1}} \\ &= 2 + \frac{4x}{\sqrt{4x^2+1}} \end{aligned}$$

$$\boxed{\forall x \in [0;+\infty[,\ u'(x) = \frac{4x+2\sqrt{4x^2+1}}{\sqrt{4x^2+1}}.}$$

Nous remarquons : $g = \ln \circ u$ et donc g est dérivable sur $[0;+\infty[$ et $g' = u'\frac{1}{u}$.
Donc, pour tout $x \in [0;+\infty[$:

$$g'(x) = \frac{4x+2\sqrt{4x^2+1}}{\sqrt{4x^2+1}} \times \frac{1}{2x+\sqrt{4x^2+1}}$$

$$\boxed{\forall x \in [0;+\infty[,\ g'(x) = \frac{2}{\sqrt{4x^2+1}}.}$$

(b) $g' > 0$ donc

$$\boxed{g \text{ est strictement croissante.}}$$

3. (a) g étant dérivable sur $[0;+\infty[$ il en est de même pour h et tenant compte d'un précédent résultat, pour tout x réel positif :

$$\begin{aligned} h'(x) &= 1 - g'(x) \\ &= 1 - \frac{2}{\sqrt{4x^2+1}} \\ &= \frac{\sqrt{4x^2+1}-2}{\sqrt{4x^2+1}} \end{aligned}$$

Étudions le signe de son numérateur.

$$\begin{aligned}\sqrt{4x^2+1}-2>0 &\Leftrightarrow 4x^2+1>4\\ &\Leftrightarrow x^2>\frac{3}{4}\end{aligned}$$

Puisque $x \in [0;+\infty[$:

$$\sqrt{4x^2+1}-2>0 \Leftrightarrow x>\frac{\sqrt{3}}{2}$$

Enfin, en raisonnant de même pour $\sqrt{4x^2+1}-2=0$, nous obtiendrons :

x	0		$\frac{\sqrt{3}}{2}$		$+\infty$
h'		$-$	0	$+$	

(b) Soit $x>0$.

$$\begin{aligned}g(x) &= \ln\left(2x+\sqrt{4x^2+1}\right)\\ &= \ln\left(2x+\sqrt{x^2\left(4+\frac{1}{x^2}\right)}\right)\\ &= \ln\left(2x+\sqrt{x^2}\sqrt{4+\frac{1}{x^2}}\right)\\ &= \ln\left(2x+x\sqrt{4+\frac{1}{x^2}}\right)\\ &= \ln\left[x\left(2+\sqrt{4+\frac{1}{x^2}}\right)\right]\\ &= \ln(x)+\ln\left(2+\sqrt{4+\frac{1}{x^2}}\right)\end{aligned}$$

$$\boxed{\forall x \in \mathbb{R}_+^*,\ g(x)=\ln x+\ln\left(2+\sqrt{4+\tfrac{1}{x^2}}\right).}$$

D'une part :

$$-\ln\left(2+\sqrt{4+\frac{1}{x^2}}\right) \underset{x\to+\infty}{\longrightarrow} -\ln 4,$$

d'autre part

$$x-\ln(x) = x\left(1-\frac{\ln x}{x}\right) \underset{x\to+\infty}{\longrightarrow} +\infty$$

donc

$$\boxed{h(x) \underset{x\to+\infty}{\longrightarrow} +\infty.}$$

(c)

x	0		$\frac{\sqrt{3}}{2}$		$+\infty$
h'		$-$	0	$+$	
h	0	$\searrow$	$\frac{\sqrt{3}}{2}-\ln\left(\sqrt{3}+2\right)$	$\nearrow$	$+\infty$

Remarquons tout d'abord que, puisque h est strictement décroissante sur $\left[0;\frac{\sqrt{3}}{2}\right]$ et que $h(0)=0$, nécessairement, $h<0$ sur $\left]0;\frac{\sqrt{3}}{2}\right]$ et en particulier $h\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)<0$.

h est continue et, d'après le tableau de variation, elle est strictement croissante sur $\left[\frac{\sqrt{3}}{2};+\infty\right[$, donc h réalise une bijection de $\left[\frac{\sqrt{3}}{2};+\infty\right[$ sur $\left[h\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right);+\infty\right[$. De plus, d'après la précédente remarque, $0\in\left[h\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right);+\infty\right[$, donc il existe un unique $\alpha\in\left[\frac{\sqrt{3}}{2};+\infty\right[$ tel que $h(\alpha)=0$.

Enfin

$$\boxed{\text{l'équation } g(x)=x \text{ admet une unique solution dans }]0;+\infty[.}$$

(d) Remarquons que $\frac{\sqrt{3}}{2}<2$.
Avec la calculatrice :
$h(2)\leqslant -0{,}946<0<0{,}508\leqslant h(3)$
Donc, g étant strictement croissante sur $[2;3]$:

$$2 \leqslant \alpha \leqslant 3.$$

4. (a) À la question précédente nous avons déjà utilisé le fait que $h(2) \leqslant 0$, *i.e.* donc $2 \leqslant g(2)$.
Comme de plus g est strictement croissante : $\forall x \in [2; +\infty[$, $g(x) \geqslant 2$.

$$\forall x \in I,\ g(x) \in I.$$

(b) Nous avions déjà remarqué que $g' > 0$.

Soit $x \in I$.
Nous avons successivement :

$$\begin{aligned} 2 &\leqslant x \\ 4 &\leqslant x^2 \\ 16 &\leqslant 4x^2 \\ 17 &\leqslant 4x^2+1 \\ \sqrt{17} &\leqslant \sqrt{4x^2+1} \\ \frac{2}{\sqrt{4x^2+1}} &\leqslant \frac{2}{\sqrt{17}} \end{aligned}$$

Or $\frac{2}{\sqrt{17}} \leqslant \frac{2}{\sqrt{16}} = 0{,}5$ donc $\frac{2}{\sqrt{4x^2+1}} \leqslant 0{,}5$.

$$\forall x \in I,\ 0 < g'(x) \leqslant 0{,}5.$$

De $|g'| \leqslant 0{,}5$ sur nous déduisons d'après l'inégalité des accroissements finis que pour tout $x \in I$: $|g(x) - g(\alpha)| \leqslant 0{,}5|x - \alpha|$.
Ainsi, α étant un point fixe de g :

$$\forall x \in I,\ |g(x) - \alpha| \leqslant 0{,}5|x - \alpha|.$$

5. (a) i. Notons $\mathscr{P}(n)$: « $|u_n - \alpha| \leqslant 0{,}5^n|u_0 - \alpha|$ », pour tout $n \in \mathbb{N}$.

Démontrons par récurrence sur $n \in \mathbb{N}$ que $\mathscr{P}(n)$ est vraie.

* $|u_0-\alpha| = 0{,}5^0|u_0-\alpha|$ donc $\mathscr{P}(0)$ est vraie.
* Soit $n \in \mathbb{N}$. Supposons que $\mathscr{P}(n)$ est vraie et démontrons qu'alors $\mathscr{P}(n+1)$ est forcément vraie.
  D'après la question 4.(b), puisque u_{n+1} et u_n sont dans I :
  $$|g(u_n)-\alpha| \leqslant 0{,}5|g(u_n)-\alpha|.$$
  Autrement dit : $|u_{n+1}-\alpha| \leqslant 0{,}5|u_n-\alpha| \quad (2)$.
  Or d'après l'hypothèse de récurrence :
  $$|u_n-\alpha| \leqslant 0{,}5^n|u_0-\alpha|,$$
  donc par transitivité avec (2) :
  $$|u_{n+1}-\alpha| \leqslant 0{,}5 \times 0{,}5^n|u_0-\alpha|.$$
  Ou encore : $|u_{n+1}-\alpha| \leqslant 0{,}5^{n+1}|u_0-\alpha|$. Autrement dit $\mathscr{P}(n+1)$ est vraie.

Nous avons démontré par récurrence sur $n \in \mathbb{N}$:
$\forall n \in \mathbb{N},\ |u_n-\alpha| \leqslant 0{,}5^n|u_0-\alpha|$.

ii. La suite $(0{,}5^n)_{n\in\mathbb{N}}$ est géométrique et sa raison appartient à $[0;1[$ donc elle converge vers 0.
On en déduit en passant à la limite dans l'inégalité établie à la question précédente que
$$|u_n-\alpha| \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0.$$
Finalement

$(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers α.

iii. Pour que u_{n_0} soit une valeur approchée de α à 10^{-3} près il suffit que $0{,}5^n \leqslant 10^{-3}$.
Cette dernière inégalité équivaut successivement à
$$\begin{aligned} \ln\left(0{,}5^n\right) &\leqslant \ln\left(10^{-3}\right) \\ -n\ln(2) &\leqslant -3\ln(10) \\ n &\geqslant \frac{3\ln(10)}{\ln(2)} \end{aligned}$$

Avec la calculatrice : $\frac{3\ln(10)}{\ln(2)} \approx 9{,}966$ à 10^{-3} près par excès. Donc, n étant un entier il suffit que : $n \geqslant 10$.

u_{10} est une valeur approchée à 10^{-3} de α.

(b) $L(\alpha) = 4$ m pour $x \in [-1; 1]$ donc pour un écartement de 2 m.
La flèche est donc de

$$\begin{aligned} d(\alpha) &= f_\alpha(1) - f_\alpha(0) \\ &= \frac{\mathrm{e}^{\alpha} - \mathrm{e}^{-\alpha} - 2}{2\alpha} \\ &\approx \frac{\mathrm{e}^{u_{10}} - \mathrm{e}^{-u_{10}} - 2}{2u_{10}} \end{aligned}$$

Et puisque $u_{10} \approx 1{,}777$

$$d(\alpha) \approx 1{,}541$$

$d(\alpha) \approx 1{,}541$ m.