Métropole, groupe V. Juin 1990.

I Exercice. 5 points

1. Dans le plan rapporté à un repère orthonormé $\left(O; \vec{i}, \vec{j}\right)$, on considère l'hyperbole (H) d'équation :
$$y^2 - x^2 = 1.$$
   (a) Déterminer ses sommets et ses asymptotes.
   (b) Tracer cette hyperbole.

2. Soit α un nombre réel appartenant à l'intervalle $\left]-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right[$.
Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation :
$$z^2 \cos^2 \alpha - z \sin 2\alpha - \cos^2 \alpha = 0 \quad (E).$$

3. Soit M l'image dans le plan complexe de la solution de (E) dont la partie imaginaire est positive.
   (a) Démontrer que M appartient à l'hyperbole (H) définie au 1.
   (b) Déterminer le sous-ensemble de (H) décrit par M lorsque α décrit l'intervalle $\left]-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right[$.

II Exercice. 4 points

Soient A, B et C trois points distincts du plan orienté.
Soient :
— s_A la similitude directe de centre A transformant B en C.
— s_B la similitude directe de centre B transformant C en A.
— s_C la similitude directe de centre C transformant A en B.
On se propose d'étudier $s = s_C \circ s_B \circ s_A$.

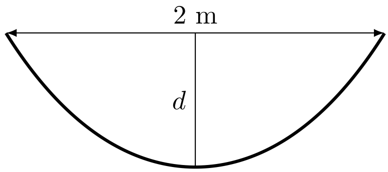
1. (a) Déterminer l'image de B par s.
   (b) Démontrer que s est la symétrie centrale de centre B. (On pourra utiliser les transformations vectorielles associées à s_A, s_B et s_C.)
   (c) Soit $C' = s_B \circ s_A(C)$ et $C'' = s_C(C')$.
Quelle est la position relative des points B, C et C'' ?
En déduire que A est le milieu du segment $[CC']$.
Placer les points A, B, C, C' et C'' sur une figure.

III Problème. 12 points

La chaînette est la courbe suivant laquelle se tend un fil homogène, pesant, flexible et inextensible, suspendu par ses extrémités à deux points fixes (Déf. Petit Larousse). On montre et on admettra dans ce problème que, rapportée à un repère orthonormé convenable, la chaînette admet une équation de la forme :

$$y = \frac{e^{\lambda x} + e^{-\lambda x}}{2\lambda} \quad \text{avec } \lambda > 0.$$

On laisse pendre un tel fil d'une longueur de 4 m entre deux points situés à une même hauteur et distants de 2 m. Le but du problème est de calculer une valeur approchée de la flèche prise par le fil, c'est-à-dire la distance d indiquée sur le schéma ci-dessous.



À cet effet, pour tout $\lambda > 0$, on considère la fonction f_λ définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f_\lambda = \frac{e^{\lambda x} + e^{-\lambda x}}{2\lambda}.$$

On note C_λ la courbe représentative de f_λ dans un repère orthonormé.

Étude de la chaînette.

1. (a) Étudier la parité de f_λ : préciser sa limite en $+\infty$ et dresser son tableau de variations.

   * Soit $x \in \mathbb{R}$.

$$\begin{aligned} f_\lambda(-x) &= \frac{e^{\lambda(-x)} + e^{-\lambda(-x)}}{2\lambda} \\ &= \frac{e^{\lambda x} + e^{-\lambda x}}{2\lambda} \\ &= f_\lambda(x) \end{aligned}$$

f_λ est paire.

* Comme $\lambda > 0$:
$e^{\lambda x} \underset{x\to+\infty}{\longrightarrow} +\infty$ et $e^{-\lambda x} \underset{x\to+\infty}{\longrightarrow} 0$
Donc

$$\boxed{f_\lambda(x) \underset{x\to+\infty}{\longrightarrow} +\infty.}$$

* f_λ est une combinaisons linéaire de fonction dérivable sur $\mathbb{R}$ donc est dérivable sur $\mathbb{R}$ et pour tout x réel :

$$\begin{aligned} f'_\lambda(x) &= \frac{1}{2\lambda}\left[\lambda e^{\lambda x} - \lambda e^{-\lambda x}\right] \\ &= \frac{1}{2}\left[e^{\lambda x} - e^{-\lambda x}\right] \end{aligned}$$

f_λ étant paire il suffit d'étudier ses variations sur $\mathbb{R}_+$.
Soit $x \in \mathbb{R}_+^*$.
Comme $\lambda > 0$:

$$\lambda x > -\lambda x$$

Exponentielle étant strictement croissante :

$$e^{\lambda x} > e^{-\lambda x}$$

D'où :

$$e^{\lambda x} - e^{-\lambda x} > 0$$

Comme de plus $f'_\lambda(0) = 0$ et en tenant compte de la parité de f_λ nous en déduisons le tableau de variation de f_λ :

x	$-\infty$		0		$+\infty$
f'_λ		$-$	0	$+$	
f_λ	$+\infty$	$\searrow$	$\frac{1}{\lambda}$	$\nearrow$	$+\infty$

(b) Tracer la courbe C_λ (unité graphique : 1 cm).

(c) Prouver que pour tout λ la courbe C_λ se déduit de C_1 par une homothétie dont on précisera le centre et le rapport.

2. Calcul de la longueur de la chaînette.

On admet que la longueur $L(\lambda)$ de l'arc de courbe d'équation $y = f_\lambda(x)$ compris entre les points d'abscisse $x = -1$ et $x = 1$ est égale à l'intégrale :

$$L(\lambda) = \int_{-1}^{1} \sqrt{1 + \left(f_\lambda'(x)\right)^2}\, \mathrm{d}x$$

(l'unité de longueur étant le mètre).

(a) Vérifier que, pour tout $x \in \mathbb{R}$,

$$1 + \left(f_\lambda'(x)\right)^2 = \left(\frac{\mathrm{e}^{\lambda x} + \mathrm{e}^{-\lambda x}}{2}\right)^2.$$

Soit $x \in \mathbb{R}$.

$$\begin{aligned}
1 + \left(f_\lambda'(x)\right)^2 &= 1 + \left(\frac{\mathrm{e}^{\lambda x} - \mathrm{e}^{-\lambda x}}{2}\right)^2 \\
&= 1 + \frac{\left(\mathrm{e}^{\lambda x} - \mathrm{e}^{-\lambda x}\right)^2}{4} \\
&= \frac{4 + \left(\mathrm{e}^{\lambda x}\right)^2 - 2\mathrm{e}^{\lambda x}\mathrm{e}^{-\lambda x} + \left(\mathrm{e}^{-\lambda x}\right)^2}{4} \\
&= \frac{4 + \left(\mathrm{e}^{\lambda x}\right)^2 - 2 + \left(\mathrm{e}^{-\lambda x}\right)^2}{4} \\
&= \frac{\left(\mathrm{e}^{\lambda x}\right)^2 + 2 + \left(\mathrm{e}^{-\lambda x}\right)^2}{4} \\
&= \frac{\left(\mathrm{e}^{\lambda x}\right)^2 + 2\mathrm{e}^{\lambda x}\mathrm{e}^{-\lambda x} + \left(\mathrm{e}^{-\lambda x}\right)^2}{4} \\
&= \frac{\left(\mathrm{e}^{\lambda x} + \mathrm{e}^{-\lambda x}\right)^2}{2^2}
\end{aligned}$$

Enfin :

$$\boxed{\forall x \in \mathbb{R},\ 1 + \left(f'_\lambda(x)\right)^2 = \left(\frac{\mathrm{e}^{\lambda x}+\mathrm{e}^{-\lambda x}}{2}\right)^2.}$$

(b) En déduire que :

$$L(\lambda) = \frac{\mathrm{e}^{\lambda} - \mathrm{e}^{-\lambda}}{\lambda} \quad (1).$$

$$\begin{aligned}
L(\lambda) &= \int_{-1}^{1} \sqrt{1 + (f'_\lambda(x))}\,\mathrm{d}x \\
&= \int_{-1}^{1} \left|\frac{\mathrm{e}^{\lambda x} + \mathrm{e}^{-\lambda x}}{2}\right| \mathrm{d}x \\
&= \int_{-1}^{1} \frac{\mathrm{e}^{\lambda x} + \mathrm{e}^{-\lambda x}}{2} \mathrm{d}x \\
&= \frac{1}{2} \int_{-1}^{1} \mathrm{e}^{\lambda x} + \mathrm{e}^{-\lambda x} \mathrm{d}x \\
&= \frac{1}{2} \left[\frac{1}{\lambda}\mathrm{e}^{\lambda x} - \frac{1}{\lambda}\mathrm{e}^{-\lambda x}\right]_{-1}^{1} \\
&= \frac{1}{2\lambda}\left(\mathrm{e}^{\lambda} - \mathrm{e}^{-\lambda} - \left(\mathrm{e}^{-\lambda} - \mathrm{e}^{\lambda}\right)\right) \\
&= \frac{1}{\lambda}\left(\mathrm{e}^{\lambda} - \mathrm{e}^{-\lambda}\right)
\end{aligned}$$

Finalement :

$$\boxed{L(\lambda) = \frac{\mathrm{e}^{\lambda} - \mathrm{e}^{-\lambda}}{\lambda}.}$$

3. Calcul de la flèche.

   Exprimer en fonction de λ la flèche $d(\lambda) = f_\lambda(1) - f_\lambda(0)$ de la chaînette C_λ (l'unité de longueur étant le mètre).

$$\begin{aligned}
d(\lambda) &= f_\lambda(1) - f_\lambda(0) \\
&= \frac{\mathrm{e}^{\lambda} - \mathrm{e}^{-\lambda}}{2\lambda} - \frac{2}{2\lambda}
\end{aligned}$$

$$d(\lambda) = \frac{e^{\lambda} - e^{-\lambda} - 2}{2\lambda}.$$

Étude de l'équation $L(\lambda) = 4$.

Soit λ un nombre réel strictement positif.

1. (a) Résoudre l'équation d'inconnue X réelle $X^2 - 4\lambda X - 1 = 0$.

Il est bien sûr possible de passer par le discriminant.

$$\begin{aligned} X^2 - 4\lambda X - 1 &= X^2 - 2 \times 2\lambda \times X + (2\lambda)^2 - (2\lambda)^2 - 1 \\ &= (X - 2\lambda)^2 - 4\lambda^2 - 1 \end{aligned}$$

Donc :

$$\begin{aligned} X^2 - 4\lambda X - 1 = 0 &\Leftrightarrow (X - 2\lambda)^2 - 4\lambda^2 - 1 = 0 \\ &\Leftrightarrow (X - 2\lambda)^2 = 4\lambda^2 + 1 \end{aligned}$$

L'ensemble des solutions de l'équation est :
$\mathscr{S} = \{2\lambda + \sqrt{4\lambda^2 + 1},\ 2\lambda - \sqrt{4\lambda^2 + 1}\}$.

(b) En déduire que $L(\lambda) = 4$ équivaut à $e^{\lambda} = 2\lambda + \sqrt{4\lambda^2 + 1}$.

$$\begin{aligned} L(\lambda) = 4 &\Leftrightarrow \frac{e^{\lambda} - e^{-\lambda}}{\lambda} = 4 \\ &\Leftrightarrow e^{\lambda} - e^{-\lambda} - 4\lambda = 0 \\ &\Leftrightarrow e^{\lambda} - e^{-\lambda} = 4\lambda \\ &\Leftrightarrow e^{\lambda}\left(e^{\lambda} - e^{-\lambda} - 4\lambda\right) = 0 \\ &\Leftrightarrow \left(e^{\lambda}\right)^2 - e^{\lambda}e^{-\lambda} - 4\lambda e^{\lambda} = 0 \\ &\Leftrightarrow \left(e^{\lambda}\right)^2 - 4\lambda e^{\lambda} - 1 = 0 \end{aligned}$$

Ainsi $L(\lambda) = 4$ si et seulement si e^{λ} est solution de $X^2 - 4\lambda X - 1 = 0$.
Et même : $L(\lambda) = 4$ si et seulement si e^{λ} est une solution positive de $X^2 - 4\lambda X - 1 = 0$.

Or des deux racines $2\lambda+\sqrt{4\lambda^2+1}$ et $2\lambda-\sqrt{4\lambda^2+1}$ seule la première est (clairement) positive. Pour la seconde : $(2\lambda)^2 < 4\lambda^2+1$, donc $\sqrt{(2\lambda)^2} < \sqrt{4\lambda^2+1}$ et par conséquent $2\lambda < \sqrt{4\lambda^2+1}$.

Finalement

$$\boxed{L(\lambda) = 4 \Leftrightarrow \mathrm{e}^{\lambda} = 2\lambda + \sqrt{4\lambda^2+1}.}$$

(c) Prouver enfin que $L(\lambda) = 4$ équivaut à :

$$\lambda = \ln\left(2\lambda + \sqrt{4\lambda^2+1}\right).$$

ln réalisant une bijection de $\mathbb{R}_+^*$ sur $\mathbb{R}$ dont la réciproque est l'exponentielle :

$$\begin{aligned} L(\lambda) = 4 &\Leftrightarrow \mathrm{e}^{\lambda} = 2\lambda + \sqrt{4\lambda^2+1} \\ &\Leftrightarrow \ln\left[\mathrm{e}^{\lambda}\right] = \ln\left[2\lambda + \sqrt{4\lambda^2+1}\right] \\ &\Leftrightarrow \lambda = \ln\left[2\lambda + \sqrt{4\lambda^2+1}\right] \end{aligned}$$

2. Soit g la fonction définie sur $[0;+\infty[$ par :

$$g(x) = \ln\left(2x + \sqrt{4x^2+1}\right).$$

(a) Calculer la dérivée de la fonction $u : x \mapsto 2x + \sqrt{4x^2+1}$.
Calculer $g'(x)$.

$x \mapsto 4x^2+1$ est strictement positive sur $[0;+\infty[$ donc $x \mapsto \sqrt{4x^2+1}$ est dérivable sur $[0;+\infty[$ et par conséquent u est dérivable sur $[0;+\infty[$.
Pour tout x réel :

$$\begin{aligned} u'(x) &= 2 + 4 \times 2x \times \frac{1}{2\sqrt{4x^2+1}} \\ &= 2 + \frac{4x}{\sqrt{4x^2+1}} \end{aligned}$$

$$\forall x \in [0;+\infty[,\ u'(x) = \frac{4x+2\sqrt{4x^2+1}}{\sqrt{4x^2+1}}.$$

Nous remarquons : $g = \ln \circ u$ et donc g est dérivable sur $[0;+\infty[$ et $g' = u'\frac{1}{u}$.
Donc, pour tout $x \in [0;+\infty[$:

$$g'(x) = \frac{4x+2\sqrt{4x^2+1}}{\sqrt{4x^2+1}} \times \frac{1}{2x+\sqrt{4x^2+1}}$$

$$\forall x \in [0;+\infty[,\ g'(x) = \frac{2}{\sqrt{4x^2+1}}.$$

(b) En déduire le sens de variation de g.

$g' > 0$ donc

g est strictement croissante.

3. Soit h la fonction définie sur $[0;+\infty[$ par

$$h(x) = x - g(x).$$

(a) Calculer $h'(x)$. Étudier le signe de $h'(x)$.

g étant dérivable sur $[0;+\infty[$ il en est de même pour h et tenant compte d'un précédent résultat, pour tout x réel positif :

$$\begin{aligned} h'(x) &= 1 - g'(x) \\ &= 1 - \frac{2}{\sqrt{4x^2+1}} \\ &= \frac{\sqrt{4x^2+1}-2}{\sqrt{4x^2+1}} \end{aligned}$$

Étudions le signe de son numérateur.

$$\begin{aligned}\sqrt{4x^2+1}-2>0 &\Leftrightarrow 4x^2+1>4\\ &\Leftrightarrow x^2>\frac{3}{4}\end{aligned}$$

Puisque $x \in [0;+\infty[$:

$$\sqrt{4x^2+1}-2>0 \Leftrightarrow x>\frac{\sqrt{3}}{2}$$

Enfin, en raisonnant de même pour $\sqrt{4x^2+1}-2=0$, nous obtiendrons :

x	0		$\frac{\sqrt{3}}{2}$		$+\infty$
h'		$-$	0	$+$	

(b) Prouver que pour tout $x>0$:

$$g(x)=\ln x+\ln\left(2+\sqrt{4+\frac{1}{x^2}}\right).$$

En déduire la limite de $h(x)$ quand x tend vers $+\infty$.

Soit $x>0$.

$$\begin{aligned}g(x)&=\ln\left(2x+\sqrt{4x^2+1}\right)\\ &=\ln\left(2x+\sqrt{x^2\left(4+\frac{1}{x^2}\right)}\right)\\ &=\ln\left(2x+\sqrt{x^2}\sqrt{4+\frac{1}{x^2}}\right)\\ &=\ln\left(2x+x\sqrt{4+\frac{1}{x^2}}\right)\\ &=\ln\left[x\left(2+\sqrt{4+\frac{1}{x^2}}\right)\right]\\ &=\ln(x)+\ln\left(2+\sqrt{4+\frac{1}{x^2}}\right)\end{aligned}$$

$$\boxed{\forall x \in \mathbb{R}_+^*,\ g(x) = \ln x + \ln\left(2 + \sqrt{4 + \tfrac{1}{x^2}}\right).}$$

D'une part :

$$-\ln\left(2 + \sqrt{4 + \frac{1}{x^2}}\right) \underset{x \to +\infty}{\longrightarrow} -\ln 4,$$

d'autre part

$$x - \ln(x) = x\left(1 - \frac{\ln x}{x}\right) \underset{x \to +\infty}{\longrightarrow} +\infty$$

donc

$$\boxed{h(x) \underset{x \to +\infty}{\longrightarrow} +\infty.}$$

(c) Dresser le tableau de variations de h. En déduire que l'équation $g(x) = x$ admet une solution, notée α, et une seule dans $]0; +\infty[$.

x	0		$\frac{\sqrt{3}}{2}$		$+\infty$
h'		$-$	0	$+$	
h	0	$\searrow$	$\frac{\sqrt{3}}{2} - \ln\left(\sqrt{3}+2\right)$	$\nearrow$	$+\infty$

Remarquons tout d'abord que, puisque h est strictement décroissante sur $\left[0; \frac{\sqrt{3}}{2}\right]$ et que $h(0) = 0$, nécessairement, $h < 0$ sur $\left]0; \frac{\sqrt{3}}{2}\right]$ et en particulier $h\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right) < 0$.

h est continue et, d'après le tableau de variation, elle est strictement croissante sur $\left[\frac{\sqrt{3}}{2}; +\infty\right[$, donc h réalise une bijection de $\left[\frac{\sqrt{3}}{2}; +\infty\right[$ sur $\left[h\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right); +\infty\right[$. De plus, d'après la précédente remarque, $0 \in \left[h\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right); +\infty\right[$, donc il existe un unique $\alpha \in \left[\frac{\sqrt{3}}{2}; +\infty\right[$ tel que $h(\alpha) = 0$.
Enfin

$$\boxed{\text{l'équation } g(x) = x \text{ admet une unique solution dans }]0; +\infty[.}$$

(d) Prouver que $2 \leqslant \alpha \leqslant 3$.

Remarquons que $\frac{\sqrt{3}}{2} < 2$.
Avec la calculatrice :
$h(2) \leqslant -0{,}946 < 0 < 0{,}508 \leqslant h(3)$
Donc, g étant strictement croissante sur $[2;3]$:

$$\boxed{2 \leqslant \alpha \leqslant 3.}$$

4. On note $I = [2;+\infty[$.

(a) Démontrer que pour tout élément x de I, $g(x)$ appartient à I. (On pourra utiliser 2.(b).)

À la question précédente nous avons déjà utilisé le fait que $h(2) \leqslant 0$, *i.e.* donc $2 \leqslant g(2)$.
Comme de plus g est strictement croissante : $\forall x \in [2;+\infty[$, $g(x) \geqslant 2$.

$$\boxed{\forall x \in I,\ g(x) \in I.}$$

(b) Prouver que pour tout élément x de I :

$$0 < g'(x) \leqslant 0{,}5.$$

En déduire que pour tout élément x de I :

$$|g(x) - \alpha| \leqslant 0{,}5|x - \alpha|.$$

Nous avions déjà remarqué que $g' > 0$.

Soit $x \in I$.
Nous avons successivement :

$$\begin{aligned}
2 &\leqslant x \\
4 &\leqslant x^2 \\
16 &\leqslant 4x^2 \\
17 &\leqslant 4x^2 + 1 \\
\sqrt{17} &\leqslant \sqrt{4x^2+1} \\
\frac{2}{\sqrt{4x^2+1}} &\leqslant \frac{2}{\sqrt{17}}
\end{aligned}$$

Or $\frac{2}{\sqrt{17}} \leqslant \frac{2}{\sqrt{16}} = 0{,}5$ donc $\frac{2}{\sqrt{4x^2+1}} \leqslant 0{,}5$.

$$\forall x \in I,\ 0 < g'(x) \leqslant 0{,}5.$$

De $|g'| \leqslant 0{,}5$ sur nous déduisons d'après l'inégalité des accroissements finis que pour tout $x \in I$: $|g(x) - g(\alpha)| \leqslant 0{,}5|x-\alpha|$.
Ainsi, α étant un point fixe de g :

$$\forall x \in I,\ |g(x) - \alpha| \leqslant 0{,}5|x-\alpha|.$$

5. (a) i. Soit $(u_n)_{n>0}$ la suite d'éléments de I définie par : $u_0 = 2$ et pour tout $n \geqslant 0$, $u_{n+1} = g(u_n)$.
Démontrer que pour tout entier naturel n :

$$|u_n - \alpha| \leqslant 0{,}5^n|u_0 - \alpha|.$$

Notons $\mathscr{P}(n)$: « $|u_n - \alpha| \leqslant 0{,}5^n|u_0 - \alpha|$ », pour tout $n \in \mathbb{N}$.

Démontrons par récurrence sur $n \in \mathbb{N}$ que $\mathscr{P}(n)$ est vraie.

* $|u_0 - \alpha| = 0{,}5^0|u_0 - \alpha|$ donc $\mathscr{P}(0)$ est vraie.
* Soit $n \in \mathbb{N}$. Supposons que $\mathscr{P}(n)$ est vraie et démontrons qu'alors $\mathscr{P}(n+1)$ est forcément vraie.
D'après la question 4.(b), puisque u_{n+1} et u_n sont dans I :

$$|g(u_n) - \alpha| \leqslant 0{,}5|g(u_n) - \alpha|.$$

Autrement dit : $|u_{n+1} - \alpha| \leqslant 0{,}5|u_n - \alpha| \quad (2)$.
Or d'après l'hypothèse de récurrence :

$$|u_n - \alpha| \leqslant 0{,}5^n|u_0 - \alpha|,$$

donc par transitivité avec (2) :

$$|u_{n+1} - \alpha| \leqslant 0{,}5 \times 0{,}5^n|u_0 - \alpha|.$$

Ou encore : $|u_{n+1} - \alpha| \leqslant 0{,}5^{n+1}|u_0 - \alpha|$. Autrement dit $\mathscr{P}(n+1)$ est vraie.

Nous avons démontré par récurrence sur $n \in \mathbb{N}$:
$\forall n \in \mathbb{N},\ |u_n - \alpha| \leqslant 0{,}5^n|u_0 - \alpha|$.

ii. Conclure quand à la convergence et à la limite de la suite $(u_n)_{n>0}$.

La suite $(0{,}5^n)_{n\in\mathbb{N}}$ est géométrique et sa raison appartient à $[0;1[$ donc elle converge vers 0.
On en déduit en passant à la limite dans l'inégalité établie à la question précédente que

$$|u_n - \alpha| \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0.$$

Finalement

$$\boxed{(u_n)_{n\in\mathbb{N}} \text{ converge vers } \alpha.}$$

iii. Déterminer un entier n_0 tel que u_{n_0} soit une valeur approchée de α à la précision 10^{-3} et calculer u_{n_0}.

Pour que u_{n_0} soit une valeur approchée de α à 10^{-3} près il suffit que $0{,}5^n \leqslant 10^{-3}$.
Cette dernière inégalité équivaut successivement à

$$\begin{aligned} \ln\left(0{,}5^n\right) &\leqslant \ln\left(10^{-3}\right) \\ -n\ln(2) &\leqslant -3\ln(10) \\ n &\geqslant \frac{3\ln(10)}{\ln(2)} \end{aligned}$$

Avec la calculatrice : $\frac{3\ln(10)}{\ln(2)} \approx 9{,}966$ à 10^{-3} près par excès. Donc, n étant un entier il suffit que : $n \geqslant 10$.

$$\boxed{u_{10} \text{ est une valeur approchée à } 10^{-3} \text{ de } \alpha.}$$

(b) On se place dans la situation décrite au début du problème.
En rassemblant les résultats obtenus dans celui-ci, calculer une valeur approchée de la flèche $d(\alpha)$.

$L(\alpha) = 4$ m pour $x \in [-1;1]$ donc pour un écartement de 2 m.
La flèche est donc de

$$\begin{aligned} d(\alpha) &= f_\alpha(1) - f_\alpha(0) \\ &= \frac{\mathrm{e}^{\alpha} - \mathrm{e}^{-\alpha} - 2}{2\alpha} \\ &\approx \frac{\mathrm{e}^{u_{10}} - \mathrm{e}^{-u_{10}} - 2}{2u_{10}} \end{aligned}$$

Et puisque $u_{10} \approx 1{,}777$

$$d(\alpha) \approx 1{,}541$$

$$\boxed{d(\alpha) \approx 1{,}541 \text{ m.}}$$