NOM : ....

PRÉNOM :..

NUMÉRO PARCOURSUP : ....

ConcoursAvenir

ÉPREUVE DE MATHÉMATIQUES

SUJET A

Qui peut utiliser ce sujet de **MATHÉMATIQUES A** ?

- Profil Violet **OUI** ✅
- Profil Jaune **NON** ❌
- Profil Vert **OUI** ✅

DURÉE : 1h30

Coefficient 6

CONSIGNES SPÉCIFIQUES

Lisez attentivement les consignes afin de vous placer dans les meilleures conditions de réussite de cette épreuve.

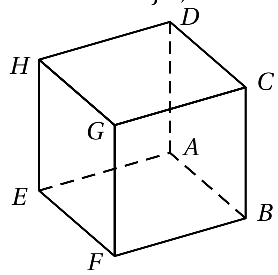
Aucun brouillon n'est distribué. Les pages blanches de ce sujet peuvent être utilisées à l'usage de brouillon.
L'usage de la calculatrice ou de tout autre appareil électronique (connecté ou non) est interdit.
Aucun document autre que ce sujet et sa grille réponse n'est autorisé.

Attention, il ne s'agit pas d'un examen mais bien d'un concours qui aboutit à un classement.
Si vous trouvez ce sujet « difficile », ne vous arrêtez pas en cours de composition, n'abandonnez pas, restez concentré(e).
Les autres candidats rencontrent probablement les mêmes difficultés que vous !

Barème :
Pour chaque question, une seule réponse est correcte. Afin d'éliminer les stratégies de réponses au hasard, **chaque réponse exacte est gratifiée de trois points,** tandis que **chaque réponse fausse est pénalisée par le retrait d'un point. Une question non traitée n'apporte ni ne retire aucun point.**

GÉOMÉTRIE DU PLAN ET DE L'ESPACE

Règle de nommage et représentation d'un cube : Dans ce sujet, un cube $ABCDEFGH$, dénote le cube suivant (aux rotations près du cube) :



Attention! Pour les questions 1 à 5, on se place dans l'espace muni d'un repère orthonormé.

Question 1.
On considère le plan (P) d'équation : $x+2y+3z-1=0$. Quel vecteur est normal à (P) ?

a. $\overrightarrow{n_1}=(1;2;-1)$ **b.** $\overrightarrow{n_2}=(1;2;3)$ **c.** $\overrightarrow{n_3}=(1;3;-1)$ **d.** $\overrightarrow{n_4}=(2;3;-1)$

Question 2.
On considère la droite (d) d'équation : $\dfrac{x-2}{-1}=\dfrac{y-1}{2}=\dfrac{z+3}{1}$. Déterminer un vecteur directeur de la droite (d).

a. $\overrightarrow{u_2}=(2;1;1)$ **b.** $\overrightarrow{u_4}=(1;2;-3)$ **c.** $\overrightarrow{u_3}=(-1;2;1)$ **d.** $\overrightarrow{u_4}=(2;1;-3)$

Question 3.
On considère les points $A(1;3;0)$ et $B(5;1;-2)$. Déterminer l'équation du plan médiateur du segment $[AB]$.

a. $2x-y-z-5=0$ **b.** $2x-y-z+5=0$ **c.** $x+y+2z-3=0$ **d.** $3x+2y-z-14=0$

Question 4.
On considère les trois points suivants :

$$A(-1;-2;3) \quad ; \quad B(-6;1;1) \quad ; \quad C(-5;-3;2)$$

Le triangle ABC est :

a. Équilatéral **b.** Rectangle en A **c.** Rectangle en C **d.** Isocèle en C

Question 5.
On considère les trois points suivants :

$$A(1;2;3) \quad ; \quad B(3;3;5) \quad ; \quad C(-1;2;-4)$$

Déterminer les coordonnées du projeté orthogonal de C sur (AB) :

a. $(-1;1;1)$ **b.** $\left(2;\dfrac{5}{2};4\right)$ **c.** $\left(0;\dfrac{3}{2};2\right)$ **d.** $(-3;0;-1)$

Attention! Dans les trois prochaines questions, on considère un cube $ABCDEFGH$, et les points : M le milieu de $[CD]$, P le milieu de $[GH]$ et N le centre de la face $ABCD$.

Question 6.
Quels sont les points coplanaires?

a. M,C,P et F **b.** A,B,C et P **c.** M,N,E et H **d.** M,P,E et F

Question 7.
Le plan et la droite sécants sont :

a. (ABE) et (CP) **b.** (ABC) et (DH) **c.** (MNH) et (BC) **d.** (DAP) et (MG)

Question 8.
Les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{FG}$ dirigent le plan :

a. (BCD) **b.** (ABF) **c.** (ABG) **d.** (FGB)

Question 9.
Soit $ABCDEFGH$ et $BIJCFLKG$ deux cubes de même taille disposés côte à côte.
Soit le point X défini par $\overrightarrow{AX} = 2\overrightarrow{CJ} + \overrightarrow{DH} + \overrightarrow{FG}$. Le point X se situe en :

a. H **b.** G **c.** K **d.** J

Question 10.
Soit $ABCDEFGH$ un cube de côté non nul. Soit les points I et J tels que $\overrightarrow{EI} = \frac{1}{3}\overrightarrow{EF}$ et $\overrightarrow{GJ} = \frac{2}{3}\overrightarrow{GC}$. Quel vecteur est dans le plan dirigé par $\overrightarrow{EC}$ et $\overrightarrow{IJ}$?

a. $\overrightarrow{EA}$ **b.** $\overrightarrow{FE}$ **c.** $\overrightarrow{FG}$ **d.** $\overrightarrow{FJ}$

Question 11.
Soit $x \in \mathbb{R}_+^*$ et un parallélépipède rectangle $ABCDEFGH$ tel que $AD = AE = xAB$. Pour quelle valeur de x, les droites (BH) et (AG) sont-elles orthogonales ?

a. 1 **b.** $\frac{\sqrt{2}}{2}$ **c.** $\sqrt{2}$ **d.** $\frac{1}{2}$

CALCUL NUMÉRIQUE, SUITES NUMÉRIQUES

Question 12.
Soit (U_n) une suite géométrique telle que $U_1 = 3$ et $U_2 = 9$. Déterminer la raison de (U_n).

a. -6 **b.** 3 **c.** 12 **d.** 6

Question 13.
Déterminer la limite suivante :

$$\lim_{x \to 1^-} \frac{-x^2 - 2x + 3}{x^2 - 3x + 2}$$

a. 1 **b.** 0 **c.** $-\infty$ **d.** 4

Question 14.
Soit a un réel strictement positif. Que vaut $\ln(\sqrt{a})$?

a. $\frac{1}{2}\ln(a)$ **b.** $2 + \ln(a)$ **c.** $\frac{1}{2} + \ln(a)$ **d.** $2\ln(a)$

Question 15.
Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \ln(e^x + e^{-x})$. La fonction f est :

a. Croissante sur $\mathbb{R}$ **b.** Décroissante sur $\mathbb{R}$ **c.** Positive sur $\mathbb{R}$ **d.** Négative sur $\mathbb{R}$

Question 16.
Calculer la somme à progression géométrique suivante :

$$\mathbf{128+32+8+\ldots+\frac{1}{8}}$$

a. $+\infty$ **b.** $\frac{512}{3}$ **c.** $\frac{1365}{8}$ **d.** $\frac{3075}{8}$

Question 17.
Soit (u_n) une suite géométrique définie sur $\mathbb{N}$ telle que $u_2 = 12$ et $u_5 = 96$. Déterminer la formule explicite de (u_n).

a. $u_{n+1} = 2u_n$ **b.** $u_n = 2\times 3^n$ **c.** $u_n = 2n$ **d.** $u_n = 3\times 2^n$

Question 18.
Soit (u_n) la suite définie par $u_0 = 5$ et $u_{n+1} = -\frac{1}{2}u_n + 3$. Cette suite est :

a. Ni minorée, ni majorée
b. Minorée par $\frac{1}{2}$ et majorée par 5
c. Non minorée et majorée par 5
d. Minorée par $\frac{1}{2}$ et non majorée

Question 19.
Quelles sont les solutions de l'inéquation $3^x < 2$?

a. $\left]-\infty ; \frac{\ln(2)}{\ln(3)}\right[$ **b.** $\left]\frac{\ln(2)}{\ln(3)} ; +\infty\right[$ **c.** $\left]-\infty ; \frac{\ln(3)}{\ln(2)}\right[$ **d.** $\left]\frac{\ln(3)}{\ln(2)} ; +\infty\right[$

Question 20.
Résoudre $\frac{\ln(5x)}{\ln(3)} = 2$

a. $x = \frac{8}{5}$ **b.** $x = 9$ **c.** $x = \frac{9}{5}$ **d.** $x = 8$

FONCTIONS

Question 21.
Soit $m \in \mathbb{R}$ et f la fonction définie sur $\mathbb{R}\setminus\{-m\}$ par $f(x) = \frac{x+3}{x+m}$. Pour quelles valeurs de m cette fonction est-elle strictement croissante sur $]-\infty ; -6[$?

a. $]3 ; +\infty[$ **b.** $]3 ; 6]$ **c.** $]3 ; 6[$ **d.** $[3 ; 6]$

Question 22.
Soit f une fonction de variable réelle dont le tableau de variations est donné ci-dessous. Déterminer le nombre de solution(s) de l'équation : $2f(x) - 3 = 0$.

x	$-\infty$		-2		0		2		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	0	$-$	
$f(x)$	$-\infty$	$\nearrow$	3	$\searrow$	-1	$\nearrow$	3	$\searrow$	$-\infty$

a. 2 **b.** 1 **c.** 4 **d.** 3

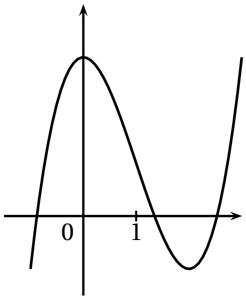
Question 23.
Soit f une fonction de variable réelle telle que pour tout x réel, $f'(x) = x(x+2)^2$. Déterminer le nombre d'extrema de f.

a. 0 **b.** 3 **c.** 2 **d.** 1

Question 24.
Déterminer la dérivée de la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = e^{x^2-3x}$.

a. $(2x-3)e^{x^2-3x}$ **b.** e^{x^2-3x} **c.** $(x^2-3x)e^{x^2-3x-1}$ **d.** $(x^2-3x)e^{2x-3}$

Attention! Pour les deux prochaines questions, on considère la courbe suivante :



Question 25.
Déterminer l'expression de la fonction dont la courbe représentative est la courbe ci-dessus.

a. $y = x^3 - 3x^2 + 3$ **b.** $y = -x^3 + 3x^2 + 3$ **c.** $y = x^4 - 2x^2 + 3$ **d.** $y = -x^4 + 2x^2 + 3$

Question 26.
Sur quel intervalle est-elle convexe?

a. $]1;+\infty[$ **b.** $]0;+\infty[$ **c.** $]-\infty;1[$ **d.** $]-\infty;0[$

Question 27.
Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}\setminus\{-2;-1;1\}$ par $f(x) = \dfrac{x^2-5x+6}{x^3+2x^2-x-2}$. Combien d'asymptotes possède la courbe représentative de f ?

a. 2 **b.** 3 **c.** 4 **d.** 5

Question 28.
Parmi les fonctions suivantes, laquelle est convexe sur $]0;+\infty[$?

a. $f(x) = \ln(e^x - 1)$ **b.** $f(x) = -\dfrac{1}{x}$ **c.** $f(x) = \ln(x)$ **d.** $f(x) = \ln(e^x + 1)$

Question 29.
Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \ln(x^2+1)$. La fonction f est :

a. Décroissante sur $\mathbb{R}$ **b.** Décroissante sur $\mathbb{R}_-^*$ **c.** Décroissante sur $\mathbb{R}_+^*$ **d.** Croissante sur $\mathbb{R}$

Question 30.
Soit f une fonction définie sur $\mathbb{R}$, dont le tableau de signes de la dérivée est donné ci-dessous. Soit g la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $g(x) = f(3-2x)$. Sur quel intervalle la fonction g est-elle strictement décroissante?

x	$-\infty$		-3		-1		1		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	

a. $]4;+\infty[$ **b.** $]2;4[$ **c.** $]1;2[$ **d.** $]-2;1[$

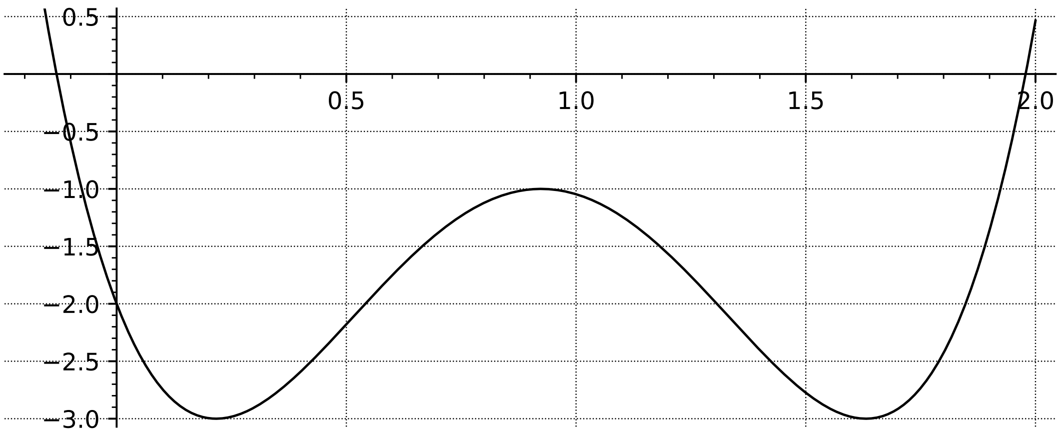
Question 31.
On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}_+^*$ par $f(x) = 2x^2\ln(x) - x^2 + 3x - 2$. Le point d'inflexion de la courbe représentative de f a pour abscisse :

a. $x = \mathrm{e}$ **b.** $x = \mathrm{e}^{-1}$ **c.** $x = -\mathrm{e}$ **d.** $x = 1$

Question 32.
Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}_+^*$ par $f(x) = -x\ln(x) + 2x + 1$. La courbe représentative de f :

a. Est entièrement située sous ses tangentes
b. Est entièrement située au dessus de ses tangentes
c. Traverse sa tangente au point $x = \mathrm{e}$
d. Traverse sa tangente au point $x = 1$

Question 33.
On considère la figure suivante représentant la courbe d'une fonction f définie sur $\mathbb{R}$. Déterminer le nombre de solutions sur $\mathbb{R}$ de l'équation $f\left(x^2 f(x)\right) + 2 = 0$.



a. 6 **b.** 12 **c.** 8 **d.** 9

Question 34.
Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = 3\sqrt{\mathrm{e}^x + x^2 + 3} - \ln(x^2 + \mathrm{e}^x)$. L'équation de la tangente à la courbe de f au point d'abscisse 0 est :

a. $y = 6 - \frac{1}{4}x$ **b.** $y = 24 - 4x$ **c.** $y = 4 - \frac{x}{6}$ **d.** $y = 24 - 6x$

PRIMITIVES

Question 35.
Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \dfrac{5x+5}{x^2+2x+5}$. Déterminer une primitive de f.

a. $F(x) = -\frac{2}{5}\ln(x^2 + 2x + 5)$
b. $F(x) = \frac{2}{5}\ln(x^2 + 2x + 5)$
c. $F(x) = -\frac{5}{2}\ln(x^2 + 2x + 5)$
d. $F(x) = \frac{5}{2}\ln(x^2 + 2x + 5)$

Question 36.
Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R} \setminus \{-1\}$ par $f(x) = \dfrac{2x-1}{(x+1)^2}$. Déterminer les primitives de f sur l'intervalle $]-1\,;+\infty[$.

a. $F(x) = 2\ln(x+1) + \frac{2}{x+1} + C$
b. $F(x) = 2\ln(x+1) + \frac{3}{x+1} + C$
c. $F(x) = 2\ln(x+1) - \frac{2}{x+1} + C$
d. $F(x) = 2\ln(x+1) - \frac{3}{x+1} + C$

Question 37.
Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \dfrac{x}{\sqrt{x^2+4}}$ et g la fonction définie par $g(x) = (x+1)f'(x)$. Déterminer les primitives de g.

a. $G(x) = \dfrac{x-4}{\sqrt{x^2+2x-4}} + C$

b. $G(x) = \dfrac{2x^2+x+4}{\sqrt{x^2+4}} + C$

c. $G(x) = \dfrac{x-4}{\sqrt{x^2+4}} + C$

d. $G(x) = \dfrac{x+4}{\sqrt{x^2+4}} + C$

PROBABILITÉS

Question 38.
Une ville est constituée à 65% d'hommes dont 30% pratiquent un sport. Parmi les femmes (de cette même ville), 60% pratiquent un sport.
On prend une personne au hasard dans la ville. Quelle est la probabilité qu'elle fasse du sport ?

a. 0.305 **b.** 0.405 **c.** 0.205 **d.** 0.505

Question 39.
Un jeu consiste à lancer trois dés A, B, C à 6 faces. L'objectif est d'obtenir au moins deux faces « 6 ». Cependant les dés sont truqués. Il a été établi que :
- **La probabilité d'obtenir un « 6 » avec le dé A est de 0.7**
- **La probabilité d'obtenir un « 6 » avec le dé B est de 0.6**
- **La probabilité de gagner à ce jeu est de 0.558**

Quelle est la probabilité d'obtenir un « 6 » avec le dé C ?

a. 0.3 **b.** 0.4 **c.** 0.5 **d.** 0.6

Question 40.
Une urne contient trois boules blanches et six boules noires. On tire successivement trois boules avec remise. Quelle est la probabilité d'obtenir plus de boules blanches que de noires ?

a. 0.2 **b.** $\dfrac{7}{27}$ **c.** 0.5 **d.** $\dfrac{17}{27}$

Question 41.
Soit X une variable aléatoire réelle suivant une loi binomiale $\mathscr{B}(15;0.4)$. Déterminer $P(X=8)$.

a. $\dbinom{15}{8}0.4^8 0.6^7$

b. $0.4^8 0.6^7$

c. $\dbinom{15}{8}0.4^7 0.6^8$

d. $0.4^7 0.6^8$

Attention ! Pour les deux questions suivantes, on se place dans un plan rapporté à un repère orthonormé d'origine O. Un robot part de O et se déplace aléatoirement verticalement ou horizontalement, de telle manière qu'à chaque pas, soit son abscisse soit sont ordonnée augmente. À chaque déplacement, la probabilité qu'il se déplace selon l'axe des abscisses est de 0.4.

Question 42.
Quelle est la probabilité que le robot arrive au point $M(7;9)$ au bout de 16 étapes ?

a. $\dbinom{9}{7}0.4^9 0.6^7$ **b.** $\dbinom{9}{7}0.4^7 0.6^{16}$ **c.** $\dbinom{16}{9}0.4^9 0.6^7$ **d.** $\dbinom{16}{7}0.4^7 0.6^9$

Question 43.
Soit X la variable aléatoire comptant le nombre de déplacements du robot selon l'axe des abscisses, après 16 étapes. Déterminer l'espérance $E(X)$:

a. 8 **b.** 6.4 **c.** 6 **d.** 8.4

ALGORITHMIQUE ET PROGRAMMATION

Question 44.
Déterminer l'affichage de l'algorithme suivant, sachant que l'on saisi la valeur $n = 10$:

Algorithme 1 : Avenir 2023

Entrée
  n : entier naturel
Variables
  u : réel
  i : entier naturel
Traitement
  Saisir n
  Pour i *allant de* 1 *à* n **faire**
    u prend la valeur 1
    u prend la valeur $\dfrac{3}{6-2u}$
  Afficher u

a. 1 **b.** $\dfrac{33}{52}$ **c.** $\dfrac{52}{33}$ **d.** $\dfrac{3}{4}$

Question 45.
On considère l'algorithme suivant :

Algorithme 2 : Avenir 2023 bis

Variables
  u : réel
  i : entier naturel
Initialisation
i prend la valeur 0
u prend la valeur 0
Traitement
  Tant que $i \leq 10$ faire
    i prend la valeur $i+1$
    u prend la valeur $2u+3$
  Afficher u

Que retourne cet algorithme?

a. Le 10e terme de la suite récurrente définie par $u_0 = 0$, $u_{n+1} = 2u_n + 3$

b. Le 11e terme de la suite récurrente définie par $u_0 = 0$, $u_{n+1} = 2u_n + 3$

c. Le 10e terme de la suite récurrente définie par $u_0 = 0$, $u_{n+1} = 3u_n + 2$

d. Le 11e terme de la suite récurrente définie par $u_0 = 0$, $u_{n+1} = 3u_n + 2$

• • • FIN • • •