NOM : ....
PRÉNOM : ....
NUMÉRO PARCOURSUP : ....

ConcoursAvenir

ÉPREUVE DE MATHÉMATIQUES SUJET B

Qui peux utiliser ce sujet de **MATHÉMATIQUES B** ?

- Profil Violet **NON** ❌
- Profil Jaune **OUI** ✅
- Profil Vert **NON** ❌

DURÉE : 1h30
Coefficient 6

CONSIGNES SPÉCIFIQUES

Lisez attentivement les consignes afin de vous placer dans les meilleurs conditions de réussite de cette épreuve.

Aucun brouillon n'est distribué. Les pages blanches de ce sujet peuvent être utilisées à l'usage de brouillon.
L'usage de la calculatrice ou de tout autre appareil électronique (connecté ou non) est interdit.
Aucun document autre que ce sujet et sa grille réponse n'est autorisé.

Attention, il ne s'agit pas d'un examen mais bien d'un concours qui aboutit à un classement.
Si vous trouvez ce sujet "difficile", ne vous arrêtez pas en cours de composition, n'abandonnez pas, restez concentré(e).
Les autres candidats rencontrent probablement les mêmes difficultés que vous !

Barème :
Une seule réponse exacte par question. Afin d'éliminer les stratégies de réponses au hasard, **chaque réponse exacte est gratifiée de trois points,** tandis que **chaque réponse fausse est pénalisée par le retrait d'un point. Une question non traitée n'apporte ni ne retire aucun point.**

SUITES NUMÉRIQUES

Question n°1 :
Soit (u_n) la suite définie sur $\mathbb{N}$ par $u_n = -\frac{3}{5^{n+1}}$. La suite (u_n) est :

A. arithmétique de raison $r = 5$

B. géométrique de raison $q = \frac{1}{5}$

C. ni arithmétique, ni géométrique

D. géométrique de raison $q = \frac{3}{5}$

Question n°2 :
Soit (v_n) la suite géométrique de raison q et de premier terme $v_0 = 1$.
On note $S_n = v_0 + v_1 + ... + v_n$ et on sait que $\lim\limits_{n\to+\infty} S_n = 3$. Alors :

A. $q = \frac{1}{3}$

B. $q = 1$

C. $q = 3$

D. $q = \frac{2}{3}$

Question n°3 :
On considère un réel A positif.
Soit (w_n) la suite définie par $w_0 = a > 0$ et, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $w_{n+1} = \frac{1}{2}\left(w_n + \frac{A}{w_n}\right)$.
On suppose que la suite (w_n) est convergente. Que vaut sa limite ?

A. $\sqrt{a}$

B. 1

C. $\sqrt{A}$

D. $2A$

Question n°4 :
Soient (u_n) et (v_n) deux suites géométriques de raisons respectives q_1 et q_2.
À quelle condition les suites $\left(\frac{u_n}{v_n}\right)$ et $\left(\frac{v_n}{u_n}\right)$ sont toutes les deux convergentes ?

A. $q_1 = q_2$

B. $q_1 < q_2$

C. $q_2 < q_1$

D. Elles ne peuvent jamais être toutes les deux convergentes en même temps

Question n°5 :
Je dépose un billet de 5 € dans un bocal. Je décide d'ajouter dans ce bocal, la moitié de la valeur précédente déposée, c'est-à-dire 2.5 €.
Si j'effectue ce procédé une infinité de fois, vers quelle valeur totale va s'approcher mon bocal ?

A. 5 €

B. 2.5 €

C. 7.5 €

D. 10 €

Question n°6 :
Axel a pour projet de s'acheter un moulin à café électrique. Il vient de recevoir 55 € de la part de ses parents, et décide d'y ajouter 25 € tous les mois. Le moulin valant 700 €, quelle somme doit-il ajouter après 2 ans d'économie pour s'acheter ce moulin ?

A. 45 €

B. 25 €

C. 55 €

D. 105 €

Question n°7 :
Combien vaut la somme $S = 1 + 3 + ... + 199$ des 100 premiers entiers impairs ?

A. 1 000

B. 10 000

C. 100 000

D. 1 000 000

FONCTIONS

Question n°8 :

On considère la fonction polynômiale du second degré f définie sur $\mathbb{R}$ par sa forme canonique $f(x) = -2(x-3)^2 + 8$. f admet :

A. 8 comme minimum atteint en $x = 3$

B. 8 comme maximum atteint en $x = 3$

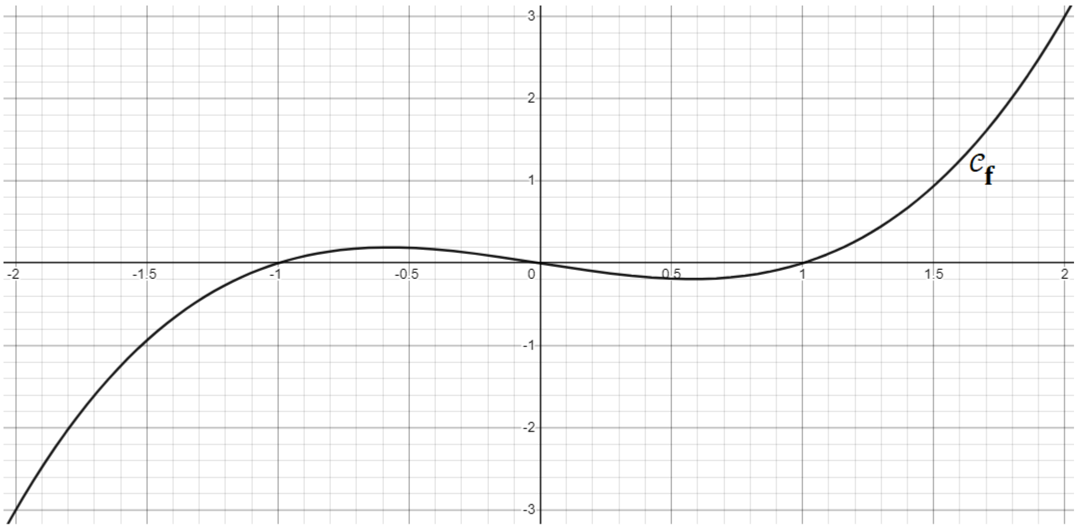
C. 8 comme maximum atteint en $x = -3$

D. 8 comme minimum atteint en $x = -3$

Question n°9 :

On considère une fonction f deux fois dérivable sur l'intervalle $[-2;2]$.

La représentation graphique de la fonction f est donnée ci-dessous :



Laquelle de ces affirmations est correcte ?

A. f possède deux points d'inflexion sur l'intervalle $[-2;2]$

B. f' est croissante sur $[-1;0] \cup [1;2]$

C. f'' est négative sur l'intervalle $[-2;0]$

D. f' est décroissante sur l'intervalle $[0;2]$

Question n°10 :

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R} \setminus \{-1\}$ par $f(x) = \dfrac{e^x}{x+1}$.

L'équation de la tangente en $x = 0$ à la courbe représentative de f est :

A. $y = 1$

B. $y = e$

C. $y = ex$

D. $y = x + 1$

Question n°11 :

Soit g la fonction définie par $g(x) = \ln(2 - x^2)$.

L'ensemble de définition de g est :

A. $\mathbb{R}$

B. $[-\sqrt{2}; \sqrt{2}]$

C. $]-\sqrt{2}; \sqrt{2}[$

D. $]-\infty; -\sqrt{2}[\bigcup]\sqrt{2}; +\infty[$

Question n°12 :

Soit h la fonction définie par $h(x) = \dfrac{x^2 - 81}{x+9}$.

Laquelle de ces affirmations est correcte ?

A. L'ensemble de définition de h est $\mathbb{R} \setminus \{9\}$

B. La fonction dérivée de h est $h'(x) = 1$

C. La fonction dérivée de h est $h'(x) = 2x$

D. $h(x^2) = (h(x))^2$

Question n°13 :

Soit k la fonction définie sur $\mathbb{R}^*$ par $k(x) = \dfrac{-x^2+2x-1}{x}$.

Soit $A(x_A; y_A)$ tel que la tangente à la courbe représentative de k en x_A soit parallèle à la droite d'équation $y = -\dfrac{2}{3}x - 5$.

Combien y a-t-il de possibilité pour A ?

A. Aucune

B. 1

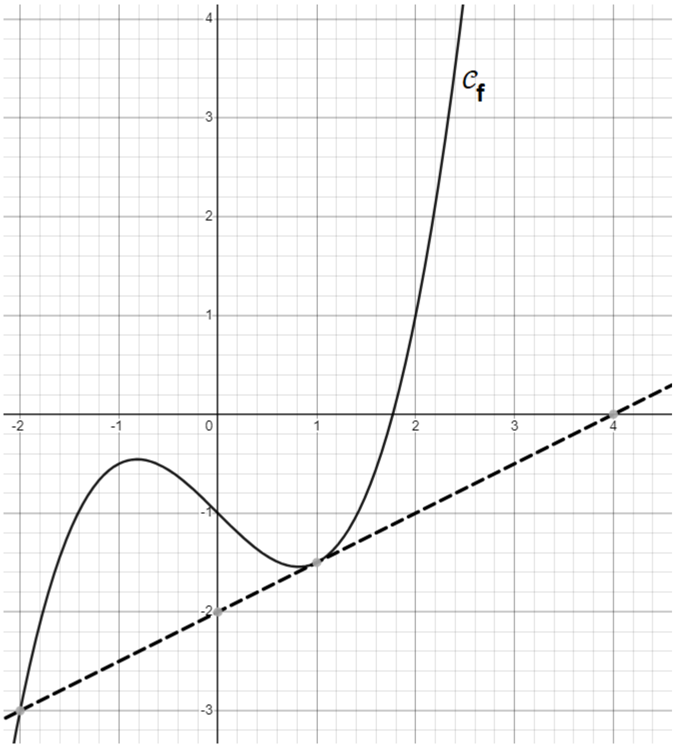
C. 2

D. Une infinité

Question n°14 :

On considère une fonction f cubique, c'est-à-dire de la forme $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$ où a, b, c et d sont quatre réels avec $a \neq 0$.

La courbe représentative de la fonction f ainsi que sa tangente (en pointillée) au point d'abscisse $x = 1$ sont données ci-dessous :



Quelle est la valeur de $f'(2)$?

A. 1

B. $\dfrac{1}{2}$

C. -1

D. 5

Question n°15 :

Soient a, b, c trois réels strictement positifs tel que $a \neq 0$.

On considère la fonction $f(x) = ae^{-be^{-cx}}$.

La fonction dérivée de f est :

A. $ae^{-be^{-cx}}$

B. $-abce^{-bcx}$

C. $-abe^{-be^{-cx}}$

D. $abce^{-cx-be^{-cx}}$

Question n°16 :
Soit f une fonction définie sur $\mathbb{R}$ telle que, pour tout $x, y \in \mathbb{R}$, $f(x+y) = f(x) + f(y)$.
On peut alors affirmer que :

A. $f(0) = 0$

B. $f(x) = e^x$

C. f est une fonction affine

D. $f(x \times y) = f(x) \times f(y)$

Question n°17 :
Quelles sont les solutions de l'inéquation $2|5x-2|-4<0$?

A. $\left]-\infty; \frac{4}{5}\right[$

B. $\left]0; \frac{4}{5}\right[$

C. $]0; +\infty[$

D. $\left[\frac{2}{5}; +\infty\right[$

GÉOMÉTRIE DANS LE PLAN

Question n°18 :
Soit $m \in \mathbb{R}$.
On considère deux droites exprimées par une équation cartésienne $(d_1) : m^2x + y + 36 = 0$ et $(d_2) : (2m+4)x + (5m+3)y - m^2 = 0$.
Pour quelle valeur de m les droites (d_1) et (d_2) sont-elles orthogonales ?

A. (d_1) et (d_2) ne sont jamais orthogonales

B. $m = 0$

C. $m = -1$

D. $m = 6$

Question n°19 :
On considère deux vecteurs du plan $\vec{u}\begin{pmatrix} e^2 \\ 1 \end{pmatrix}$ et $\vec{v}\begin{pmatrix} e^3 \\ e^5 \end{pmatrix}$.
Combien vaut $\vec{u}.\vec{v}$?

A. 0

B. $2e^5$

C. $e^6 + e^5$

D. $e^7 - e^3$

Question n°20 :
L'équation $x^2 + y^2 - 2x + y - \frac{3}{4} = 0$ représente :

A. Une droite du plan de vecteur normal $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$

B. Un cercle de centre $\left(1; -\frac{1}{2}\right)$ et de rayon 2

C. Un disque de centre $\left(1; -\frac{1}{2}\right)$ et de rayon 2

D. Un cercle de centre $\left(1; -\frac{1}{2}\right)$ et de rayon $\sqrt{2}$

Question n°21 :
On considère un triangle non équilatéral.
On note H son orthocentre, G son centre de gravité et O le centre du cercle circonscrit à ce triangle.
On admet la relation vectorielle d'Euler : $\overrightarrow{OH} = 3\overrightarrow{OG}$.
On en déduit alors que :

A. Une seule et même droite passe par l'orthocentre, le centre de gravité et le centre du cercle circonscrit

B. La droite (OH) est perpendiculaire à l'un des côtés du triangle

C. La droite (OG) est parallèle à l'un des côtés du triangle

D. La longueur OG représente le triple de la longueur OH

Question n°22 :
Soient le cercle (C) de centre $(1;-2)$ et de rayon 2, et (d) la droite d'équation cartésienne $2x-y-2=0$. Quelles sont les intersections de (C) et (d) ?

A. Il n'y a pas d'intersection

B. Les points $(1;0)$ et $\left(-\dfrac{3}{5};-\dfrac{16}{5}\right)$

C. Les points $\left(\dfrac{1-\sqrt{6}}{5};\dfrac{-8-2\sqrt{6}}{5}\right)$ et $\left(\dfrac{1+\sqrt{6}}{5};\dfrac{-8+2\sqrt{6}}{5}\right)$

D. Le point $(0;1)$

Question n°23 :
Soient A et B deux points distincts du plan tels que $AB=4$. On note I le milieu du segment $[AB]$. Quel est l'ensemble des points M du plan tels que $\overrightarrow{MA}^2+\overrightarrow{MB}^2=26$?

A. Le cercle de diamètre $[AB]$

B. Le cercle de centre I et de rayon 3

C. La médiatrice de $[AB]$

D. Le cercle de centre I et de rayon 2

Question n°24 :
On considère trois points du plan A, B et C non alignés tels que $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC}=\dfrac{1}{2}\|\overrightarrow{AB}\|^2$.
On peut alors affirmer que :

A. L'aire du triangle ABC vaut $\|\overrightarrow{AB}\|^2$

B. Le triangle ABC est rectangle en C

C. Le triangle ABC est équilatéral

D. le triangle ABC est isocèle en C

PRIMITIVES ET ÉQUATIONS DIFFÉRENTIELLES

Question n°25 :
On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x)=\dfrac{-e^x+e^{-x}}{e^x+e^{-x}}$.
Une primitive de f est :

A. $F(x)=\dfrac{-e^x-e^{-x}}{e^x-e^{-x}}$

B. $F(x)=\dfrac{-4}{(e^x+e^{-x})^2}$

C. $F(x)=\ln\left(\dfrac{1}{e^x+e^{-x}}\right)$

D. $F(x)=\ln(e^x+e^{-x})$

Question n°26 :
On considère deux fonctions continues f et g telles que $g(x)=2f(x)+x$ pour tout $x\in\mathbb{R}$.
On note G une primitive de g. Alors toutes les primitives de f sont de la forme :

A. $F(x)=\dfrac{1}{2}G(x)-\dfrac{x^2}{4}+k$ avec $k\in\mathbb{R}$

B. $F(x)=2G(x)+\dfrac{x^2}{2}+k$ avec $k\in\mathbb{R}$

C. $F(x)=2G(x)+k$ avec $k\in\mathbb{R}$

D. $F(x)=\dfrac{1}{2}G(x)+k$ avec $k\in\mathbb{R}$

Question n°27 :
On considère l'équation différentielle d'ordre 1 (E) : $y'=y(10-y)$. Alors toutes les solutions de (E) vérifient aussi l'équation différentielle d'ordre 2 :

A. $y''=y'(10-y')$

B. $y''=y'(10-2y)$

C. $y''=10y'$

D. $y''=10-2y$

Question n°28 :
On considère la fonction f définie sur $]0;+\infty[$ par $f(x)=\dfrac{-x+2}{\sqrt{x}}$. Si F est une primitive de f alors F est :

A. concave sur $]0;2]$ et convexe sur $[2;+\infty[$

B. convexe sur $]0;+\infty[$

C. convexe sur $]0;2]$ et concave sur $[2;+\infty[$

D. concave sur $]0;+\infty[$

Question n°29 :
On considère une fonction f strictement positive solution de l'équation différentielle $y'+y=e^x$. Alors la fonction $g(x)=\ln(f(x))$ est solution de l'équation différentielle :

A. $y'+\ln(y)=x$

B. $y'+y=x$

C. $y'+1=e^{x-y}$

D. $y'+1=e^x$

Question n°30 :
Soit $n\in\mathbb{N}^*$.
On considère l'équation différentielle d'ordre 1 (E) : $y'=ny+n-1$. Toutes les solutions f de (E) vérifie :

A. $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=-\dfrac{n-1}{n}$

B. $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=+\infty$

C. $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=\dfrac{n-1}{n}$

D. $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=-\infty$

CALCUL INTÉGRAL

Question n°31 :
Soient a et b deux réels tels que $a<b$.
On considère deux fonctions continues f et g tels que $\displaystyle\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x=\ln(7)$ et $\displaystyle\int_a^b g(x)\,\mathrm{d}x=\ln(3)$.
Alors $\displaystyle\int_a^b (2f(x)-3g(x))\,\mathrm{d}x=$

A. $\ln(21)$

B. $\ln\left(\dfrac{49}{27}\right)$

C. $\ln\left(\dfrac{14}{9}\right)$

D. $\ln(22)$

Question n°32 :
Combien vaut l'intégrale $\displaystyle\int_1^4\left(\sqrt{x}+\frac{1}{x}\right)^2\mathrm{d}x$?

A. $\dfrac{43}{4}$

B. $\dfrac{33}{4}$

C. $\dfrac{41}{4}$

D. $\dfrac{49}{4}$

PROBABILITÉS ET STATISTIQUES

Question n°33 :
On considère deux évènements A et B non impossibles, cela signifie que $\mathbb{P}(A)\neq 0$ et $\mathbb{P}(B)\neq 0$.
Alors :

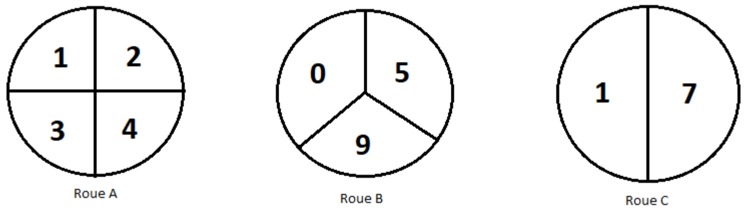
A. $\mathbb{P}_A(B)\mathbb{P}_B(A)=\mathbb{P}(A)\mathbb{P}(B)$

B. $\mathbb{P}_A(B)\mathbb{P}(B)=\mathbb{P}_B(A)\mathbb{P}(A)$

C. $\dfrac{\mathbb{P}(A)}{\mathbb{P}(B)}=\dfrac{\mathbb{P}_B(A)}{\mathbb{P}_A(B)}$

D. $\dfrac{\mathbb{P}(A)}{\mathbb{P}(B)}=\dfrac{\mathbb{P}_A(B)}{\mathbb{P}_B(A)}$

Attention ! Pour les questions 34 et 35, on considère le jeu suivant :
On fait tourner trois roues de loterie A, B et C comportant chacune des secteurs identiques afin d'obtenir un nombre à trois chiffres dans l'ordre des roues (A, B puis C) comme illustré sur le schéma ci-dessous :



Question n°34 :
On note M l'évènement "Le chiffre obtenu est un multiple de 3".
Alors $\mathbb{P}(M)$ =

A. $\frac{1}{12}$ B. $\frac{1}{24}$ C. $\frac{1}{9}$ D. $\frac{1}{4}$

Question n°35 :
La règle du jeu est de miser une somme quelconque x €. Si le nombre obtenu est multiple de trois alors on gagne le double de la mise, sinon on perd la mise.
Combien peut-on espérer gagner à ce jeu ?

A. $\frac{5x}{4}$ €
B. $-\frac{x}{2}$ €
C. $2x$ €
D. $-\frac{2x}{3}$ €

Question n°36 :
Soit X la variable aléatoire indiquant le numéro de la face obtenue après le jet d'un dé truqué.
Une partie de la loi de X est donnée par le tableau ci-dessous :

$X = k$	1	2	3	4	5	6
$\mathbb{P}(X = k)$	0,1	0,2			0,05	0,4

Sachant que $\mathbb{P}(X < 4) = 0,45$, que vaut l'espérance de X ?

A. 4 B. 0,225 C. 6 D. 3

Question n°37 :
On tire dans un jeu de 52 cartes autant de cartes que l'on souhaite sans les regarder. Une fois fini, on prend connaissance de toutes les cartes tirées. Si on a tiré l'as de pique, on perd 10 €, sinon on gagne 1 € par carte.
Combien doit-on piocher de cartes pour maximiser notre gain moyen ?

A. 11 cartes
B. 21 cartes
C. 26 cartes
D. Toutes les cartes

Question n°38 :
Soient X et Y deux variables aléatoires.
On rappelle la formule de Koenig-Huygens : $\mathbb{V}(X) = \mathbb{E}(X^2) - \mathbb{E}(X)^2$.
Alors on peut dire que :

A. $\mathbb{V}(X+Y) = \mathbb{V}(X) + \mathbb{V}(Y)$
B. X et Y sont indépendantes si, et seulement si, $\mathbb{E}(XY) - \mathbb{E}(X)\mathbb{E}(Y) = 0$
C. $\mathbb{V}(aX+b) = a^2\mathbb{V}(X) + b$ avec a et b deux réels
D. $\mathbb{V}(X^2) = \mathbb{V}(X)^2$

Question n°39 :
Soit n un entier naturel non nul.
On considère la variable aléatoire X suivant la loi binomiale de paramètres n et $p = \frac{1}{3}$.
Sachant que $\mathbb{P}(X = 0) = \frac{16}{81}$, quelle est la valeur de n ?

A. 2
B. 3
C. 4
D. 5

Question n°40 :
Soit $p \in]0;1[$.
On considère les variables aléatoires $X \sim \mathcal{B}\left(10; \frac{1}{4}\right)$ et $Y \sim \mathcal{B}(4; p)$.
On définit la variable aléatoire Z par $Z = 3X - Y$.
Alors :

A. Z suit une loi binomiale $\mathcal{B}\left(26; \frac{3}{4} - p\right)$
B. Z et X sont deux variables aléatoires indépendantes
C. Les valeurs de la variable Z sont positives
D. $3.5 \leq \mathbb{E}(Z) \leq 7.5$

Question n°41 :
Soient a et b deux réels tels que $0 < a < b$.
Soit X une variable aléatoire suivant une loi uniforme sur $[a;b]$.
On rappelle que l'espérance d'une variable suivant une loi uniforme sur $[a;b]$ est donnée par $\mathbb{E}(X) = \int_a^b x f(x)\,\mathrm{d}x$ avec $f(x) = \frac{1}{b-a}$ la densité de X.
L'espérance de $Y = X^2$ vaut alors :

A. $\dfrac{b^3 - a^3}{3}$
B. $\dfrac{a+b}{2}$
C. $\dfrac{a^2 + ab + b^2}{3}$
D. $\dfrac{b^3 + a^3}{3(b-a)}$

ALGORITHMIQUE ET PROGRAMMATION

Attention ! Pour les questions restantes, on considère l'algorithme suivant :

Programme Python

```
def S(n) :
    S = 0
    for k in range(1, n + 1) :
        S = S + k^2
    return(S)
```

La fonction range(a, b) renvoie les entiers entre a et $b-1$ avec un pas de 1. Par exemple : range(2, 5) renvoie la liste $\{2;3;4\}$.

Question n°42 :
Pour une valeur de $n \in \mathbb{N}^*$ saisie en entrée, que permet de faire la fonction S ?

A. Calculer la somme des n premiers carrés
B. Calculer la somme des n premiers entiers
C. Calculer la moyenne des n premiers carrés
D. Calculer la valeur de n^2

Question n°43 :
Que retourne S(5) ?

A. 25 B. 55 C. 15 D. 30

Question n°44 :
Que vaut le résultat de S(n) pour n'importe quelle valeur de $n \in \mathbb{N}^*$?

A. $\dfrac{n^2(n+1)}{2}$ B. $\dfrac{n(n+1)(n+2)}{6}$ C. $\dfrac{n(n+1)}{2}$ D. $\dfrac{n(n+1)(2n+1)}{6}$

Question n°45 :
Que vaut $\dfrac{(S(n)-S(n-1))(S(n+1)-S(n))}{4}$ pour tout $n \geq 2$?

A. Le cube de la somme des n premiers entiers
B. Le carré de la somme des n premiers entiers
C. La somme des n premiers carrés pairs
D. La somme des n premiers carrés impairs

··· FIN ···