CONCOURS AVENIR

NOM : ....

PRÉNOM : ....

NUMÉRO PARCOURSUP : ....

ÉPREUVE DE MATHÉMATIQUES

DURÉE : 1h30
Coefficient 5

CONSIGNES SPÉCIFIQUES

Lisez attentivement les consignes afin de vous placer dans les meilleures conditions de réussite de cette épreuve.

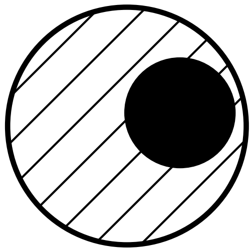
Aucun brouillon n'est distribué. Les pages blanches de ce sujet peuvent être utilisées à l'usage de brouillon.
L'usage de la calculatrice ou de tout autre appareil électronique (connecté ou non) est interdit.
Aucun document autre que ce sujet et sa grille réponse n'est autorisé.

Attention, il ne s'agit pas d'un examen mais bien d'un concours qui aboutit à un classement.
Si vous trouvez ce sujet "difficile", ne vous arrêtez pas en cours de composition, n'abandonnez pas, restez concentré(e).
Les autres candidats rencontrent probablement les mêmes difficultés que vous !

Barème :
Une seule réponse exacte par question. Afin d'éliminer les stratégies de réponses au hasard, **chaque réponse exacte est gratifiée de 3 points,** tandis que **chaque réponse fausse est pénalisée par le retrait d'1 point.**

GÉOMÉTRIE DU PLAN ET DE L'ESPACE

1.
On a représenté ci-dessous deux disques, l'un de 2 cm de diamètre inclus dans l'autre, de 4 cm de diamètre :



Quelle est l'aire en cm^2 de la partie hachurée ?

a. 2π
b. 3π
c. 6π
d. 12π

2.
Dans l'espace muni d'un repère orthonormé, on considère les points $A(1;2;3)$ et $B(2;0;1)$.
On admet que l'ensemble des points équidistants des points A et B est un plan de l'espace ; on l'appelle "plan médiateur de $[AB]$".
Une équation cartésienne du plan médiateur au segment $[AB]$ est :

a. $x+y+z=6$
b. $x+y+z=3$
c. $x+y+z=-3$
d. $2x-4y-4z=-9$

3.
Dans le plan muni d'un repère orthonormé, on note $\mathscr{C}$ le cercle de centre le point de coordonnées (3 ;3) et de rayon $R>0$.
Les axes du repère sont tangents au cercle $\mathscr{C}$, si et seulement si :

a. $R=3$
b. $R=9$
c. $R=\sqrt{3}$
d. Aucune de ces réponses n'est correcte

4.
On suppose l'espace muni d'un repère orthonormé. Soit $\mathscr{S}$ la sphère de centre $O(0;0;0)$ et passant par $A(1;1;1)$.
Une équation du plan tangent à $\mathscr{S}$ au point A est donnée par :

a. $x+y+z=0$
b. $x+y+z=\sqrt{3}$
c. $x+y+z=3$
d. $x+y+z=3^2$

5.
Dans l'espace muni d'un repère orthonormé, on considère les plans $\mathscr{P}$ et $\mathscr{Q}$ admettant pour équations cartésiennes respectives : $2x+y+z=-2$ et $x-y+z=-2$.
On définit également le point A de coordonnées (1; 1; 1), la droite Δ passant par A et perpendiculaire à $\mathscr{P}$:

$$\Delta : \begin{cases} x=1+2t \\ y=1+t \\ z=1+t \end{cases} \qquad t\in\mathbb{R}$$

et enfin la droite Δ' passant par A et perpendiculaire à $\mathscr{Q}$: $$\Delta' : \begin{cases} x=1+\alpha \\ y=1-\alpha \\ z=1+\alpha \end{cases} \qquad \alpha\in\mathbb{R}.$$

On peut alors affirmer que le point A est :

a. plus proche du plan $\mathscr{P}$ que du plan $\mathscr{Q}$
b. plus proche du plan $\mathscr{Q}$ que du plan $\mathscr{P}$
c. à une même distance non nulle des plans $\mathscr{P}$ et $\mathscr{Q}$
d. appartient aux plans $\mathscr{P}$ et $\mathscr{Q}$

CALCUL NUMÉRIQUE, SUITES NUMÉRIQUES

6.
On définit la partie entière d'un nombre réel comme étant le plus grand entier qui lui est inférieur ou égal. Quelle est la partie entière de $\sqrt{99}$?

a. 9
b. 10
c. 99
d. 100

7.
Combien existe-t-il de nombre(s) réel(s) a tel(s) que l'égalité suivante :

$$a^n + a^n = a^{n+1}$$

soit vraie, quel que soit l'entier naturel non nul n ?

a. Aucun
b. Un unique
c. Exactement deux
d. Une infinité

8.
Combien existe-t-il d'entier(s) relatif(s) tel(s) que leur produit avec leur prédécesseur et leur successeur est égal au triple de cet entier ?

a. 0
b. 1
c. 2
d. 3

9.
Soit (a_n) une suite définie pour tout entier naturel n et qui diverge vers $+\infty$, c'est-à-dire : $\lim\limits_{n \to +\infty} a_n = +\infty$.
Soit (u_n) la suite définie pour $n \geqslant 2$ par :

$$u_n = a_n \left(\ln\left(\frac{n+1}{n^2-1} \right) + \ln(n-1) \right)$$

On peut alors affirmer que :

a. (u_n) diverge vers $+\infty$
b. (u_n) converge vers 0
c. (u_n) converge vers 1
d. (u_n) diverge vers $-\infty$

10.
Soit (u_n) la suite définie pour tout entier naturel n par :

$$u_0 > 0 \qquad \text{et} \qquad u_{n+1} = \mathrm{e}^{-u_n} - 1$$

On peut alors affirmer que la suite (u_n) :

a. est à termes strictement positifs
b. est à termes strictement négatifs
c. est à termes alternativement strictement positifs et strictement négatifs
d. possède au moins un terme nul

11.
Soient f la fonction définie sur $]-\infty;+\infty[$ par :

$$f(x) = x^2 + 1$$

et (u_n) la suite définie pour tout entier naturel n par :

$$u_0 = 2 \qquad \text{et} \qquad u_{n+1} = f(u_n)$$

On peut alors affirmer que les termes de la suite (u_n) :

a. ne sont pas tous entiers
b. sont tous des entiers pairs
c. sont tous des entiers impairs
d. sont tous entiers alternativement pairs et impairs

12.
Soient (u_n) et (v_n) deux suites définies pour tout entier naturel n, strictement décroissantes, à termes strictement positifs. On définit la suite (p_n) pour tout entier naturel n par :

$$p_n = u_n \times v_n$$

On peut alors affirmer que la suite (p_n) est :

- **a.** strictement décroissante
- **b.** strictement croissante
- **c.** strictement croissante puis strictement décroissante
- **d.** strictement décroissante puis strictement croissante

13.
Soit (u_n) la suite définie pour tout entier naturel n par :

$$u_n = \begin{cases} n & \text{si } n \text{ est pair} \\ 0 & \text{si } n \text{ est impair} \end{cases}$$

On peut alors affirmer que la suite (u_n) est :

- **a.** strictement croissante
- **b.** strictement décroissante
- **c.** non monotone
- **d.** constante

14.
Soit n un entier naturel. La somme de tous les entiers relatifs de $-n$ à $2n$ est égale à :

- **a.** n
- **b.** $\dfrac{n \times 3n}{2}$
- **c.** $\dfrac{n(3n+1)}{2}$
- **d.** $\dfrac{(n-1)(3n+1)}{2}$

15.
Soit (u_n) la suite définie pour tout entier naturel n par :

$$u_n = \sum_{k=0}^{n} 2^k = 1 + 2 + \ldots + 2^n$$

On définit également la suite (v_n) pour tout entier naturel n par :

$$v_n = u_n + 1$$

On peut alors affirmer que la suite (v_n) :

- **a.** n'est ni arithmétique, ni géométrique
- **b.** est arithmétique et géométrique
- **c.** n'est pas arithmétique mais est géométrique
- **d.** est arithmétique mais pas géométrique

16.
Soit (u_n) la suite définie pour tout entier naturel n par :

$$u_n = \sum_{k=0}^{2n} (-2)^k = 1 + (-2)^1 + (-2)^2 + \ldots + (-2)^{2n}$$

On peut alors affirmer que la suite (u_n) est :

- **a.** strictement croissante
- **b.** strictement décroissante
- **c.** constante
- **d.** non monotone

17.
Soient (u_n) et (v_n) des suites adjacentes non constantes et qui convergent vers le réel ℓ. Les suites (a_n) et (b_n), définies par $a_n = 2u_n - 3v_n$ et $b_n = 3u_n - 2v_n$ sont :

- **a.** forcément adjacentes
- **b.** ne peuvent pas être adjacentes
- **c.** éventuellement adjacentes, suivant la valeur de ℓ
- **d.** on ne dispose pas de suffisamment d'informations pour pouvoir se prononcer

18.
Pour combien de valeur(s) du réel a les suites (u_n) et (v_n), définies sur $\mathbb{N}^*$ par :

$$\textbf{pour tout } n \in \mathbb{N}, \qquad u_n = \frac{1}{n} + a \quad \text{et} \quad v_n = -\frac{1}{n} + 2a$$

sont-elles adjacentes ?

a. Aucune valeur
b. Une unique valeur
c. Exactement deux valeurs
d. Une infinité de valeurs

FONCTIONS

19.
La fonction f d'expression $f(x) = \dfrac{x}{x}$ est définie sur :

a. $\mathbb{R}$
b. $\mathbb{R}^*$
c. $\{1\}$
d. $]1\,;+\infty[$

20.
Soient f et g les fonctions respectivement définies sur $]-\infty;+\infty[$ et $]-\infty;1[\cup]1;+\infty[$ par :

$$f(x) = x \qquad \text{et} \qquad g(x) = \frac{x}{x-1}$$

La fonction $\dfrac{f}{g}$ est alors définie sur :

a. $]-\infty;+\infty[$
b. $]-\infty;0[\cup]0;+\infty[$
c. $]-\infty;1[\cup]1;+\infty[$
d. $]-\infty;0[\cup]0;1[\cup]1;+\infty[$

21.
Soit f la fonction carrée et $\mathscr{P}$ sa parabole représentative dans le plan muni d'un repère orthonormé.
Soient a et b deux réels distincts, A et B les points de $\mathscr{P}$ de coordonnées respectives :

$$A\left(a;a^2\right) \qquad \text{et} \qquad B\left(b;b^2\right).$$

En quelle abscisse la parabole $\mathscr{P}$ possède-t-elle une tangente parallèle à la droite (AB) ?

a. $\dfrac{a+b}{2}$
b. $a+b$
c. $\sqrt{ab}$
d. $\dfrac{\sqrt{ab}}{2}$

22.
Soit u une fonction définie et dérivable sur $]-\infty\,;+\infty[$ et f la fonction définie sur $]-\infty\,;+\infty[$ par $f(x) = \mathrm{e}^{u(x)}$.
On admet que dans le plan muni d'un repère orthonormé, la courbe représentative de f possède une tangente au point d'abscisse 2 qui a pour équation : $y = -3x+7$.
Le nombre $u'(2)$ est égal à :

a. -3
b. 7
c. e^{-3}
d. $-3\mathrm{e}^{-3}$

23.
Soit f une fonction définie et dérivable sur $]-\infty\,;+\infty[$. On définit sur $]-\infty\,;+\infty[$ la fonction g par : $g(x) = f(-2021x)$.
Sachant que f est strictement décroissante sur $]-\infty\,;0[$ et strictement croissante sur $]0\,;+\infty[$, on peut affirmer que :

a. g est strictement croissante sur $]-\infty\,;+\infty[$
b. g est strictement décroissante sur $]-\infty\,;+\infty[$
c. g est strictement croissante sur $]-\infty\,;0[$ et strictement décroissante sur $]0\,;+\infty[$
d. g est strictement décroissante sur $]-\infty\,;0[$ et strictement croissante sur $]0\,;+\infty[$

24.

Pour $x > 0$, nous pouvons affirmer que $\exp\left(\ln x + 2021 \ln\left(\frac{1}{x}\right)\right)$ est égal à :

a. x^{2020}

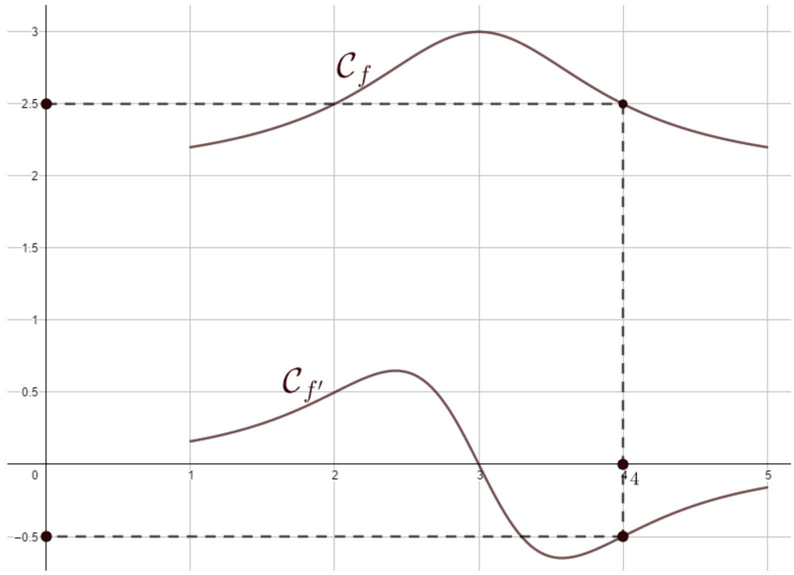
b. $-x^{2020}$

c. $\left(\frac{1}{x}\right)^{2020}$

d. $-\left(\frac{1}{x}\right)^{2020}$

25.

Soit f une fonction définie et dérivable sur l'intervalle $[1\,;5]$. On donne ci-dessous les courbes représentatives des fonctions f et f' dans le plan muni d'un repère orthonormé :



Une équation de la tangente à la courbe représentative de f au point d'abscisse $x = 4$ est donnée par :

a. $y = -\frac{x}{2} + 2,5$

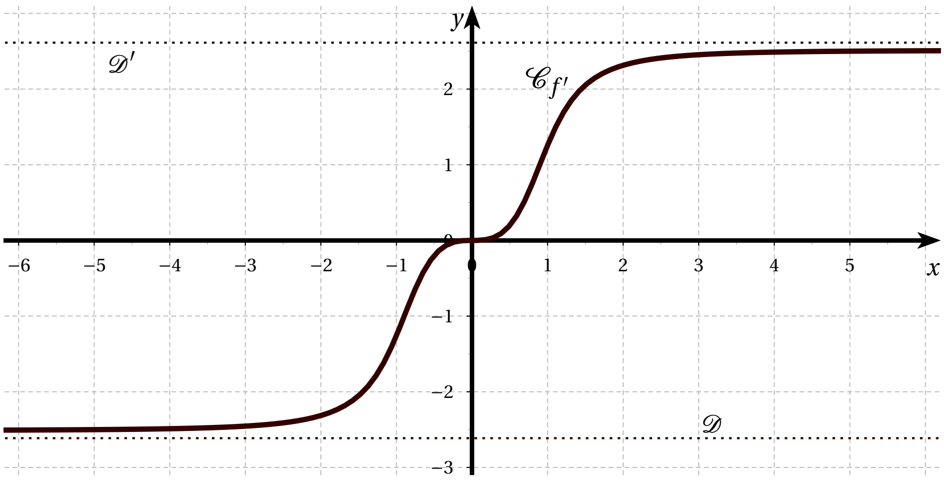
b. $y = -\frac{x}{2} + 4,5$

c. $y = 2,5x - 0,5$

d. $y = -2,5x - 0,5$

26.

Soient f et g deux fonctions définies et dérivables sur $]-\infty;+\infty[$ telles que : $g(x) = f(x) - 4x$.
On donne ci-dessous la courbe représentative de la fonction f' dans le plan muni d'un repère orthonormé. Celle-ci admet les droites $\mathscr{D}$ et $\mathscr{D}'$, également représentées ci-dessous, comme asymptotes horizontales.



On peut alors affirmer que :

a. g est croissante sur $]-\infty;+\infty[$

b. g est décroissante sur $]-\infty;+\infty[$

c. g est croissante sur $]0;+\infty[$ et décroissante sur $]-\infty;0[$

d. g est décroissante sur $]0;+\infty[$ et croissante sur $]-\infty;0[$

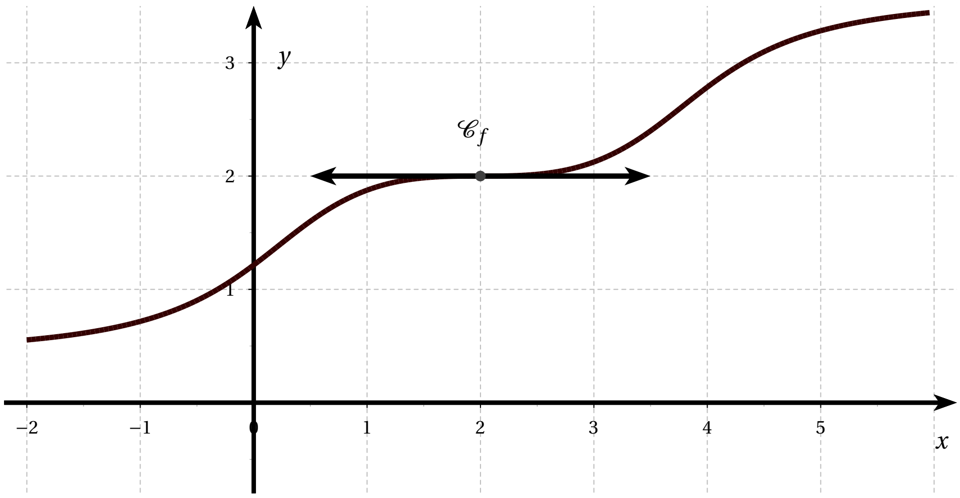
27.
Soient a un réel strictement positif et f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x) = \ln\left(1 + a\mathrm{e}^{x}\right)$$

On peut alors affirmer que :

a. les limites en $-\infty$ et $+\infty$ de la fonction f' ne dépendent pas de a
b. contrairement à la limite en $+\infty$, la limite en $-\infty$ de la fonction f' dépend de a
c. contrairement à la limite en $-\infty$, la limite en $+\infty$ de la fonction f' dépend de a
d. les limites en $-\infty$ et $+\infty$ de la fonction f' dépendent toutes les deux de a

28.
Soit f une fonction définie et dérivable sur $[-2; 6]$ dont on donne ci-après la courbe représentative dans le plan muni d'un repère orthonormé :



La tangente à la courbe au point d'abscisse 2 est parallèle à l'axe des abscisses.
Parmi les quatre tableaux de signes suivants, quel est celui de la fonction f' ?

a.

x	-2		2		6
$f'(x)$		$-$	0	$+$	

b.

x	-2		2		6
$f'(x)$		$-$	0	$-$	

c.

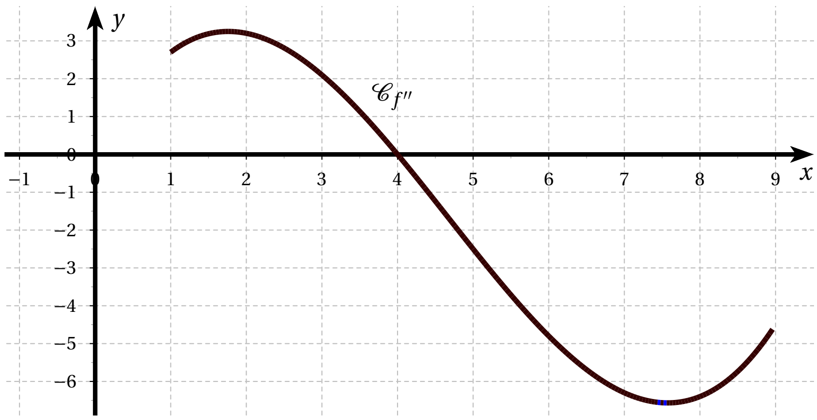
x	-2		2		6
$f'(x)$			$+$		

d.

x	-2		2		6
$f'(x)$		$+$	0	$+$	

29.

Soit f une fonction définie et deux fois dérivable sur $[1;9]$.
Dans le plan muni d'un repère orthogonal, la tangente à la courbe représentative de f au point d'abscisse 4 a pour équation $y = -1,2x + 3$.
On donne ci-dessous la courbe représentative de la fonction f'' (dérivée de la fonction f') :



On peut alors affirmer que la fonction f est :

- **a.** strictement décroissante sur $]1;4[$ et strictement croissante sur $]4;9[$
- **b.** strictement croissante sur $]1;4[$ et strictement décroissante sur $]4;9[$
- **c.** strictement décroissante sur $]1;9[$
- **d.** strictement croissante sur $]1;9[$

30.

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = \dfrac{e^x}{e^x + 1}$.
L'équation réduite de la tangente à la courbe représentative de f dans le plan muni d'un repère orthonormé en son unique point d'inflexion est :

- **a.** $y = \frac{1}{4}x - \frac{1}{2}$
- **b.** $y = -\frac{1}{4}x - \frac{1}{2}$
- **c.** $y = \frac{1}{4}x + \frac{1}{2}$
- **d.** $y = -\frac{1}{4}x + \frac{1}{2}$

31.

Sachant que $\lim\limits_{x\to+\infty} \ln(1 + u(x)) = 0$, on peut affirmer que $\lim\limits_{x\to+\infty} u(x) =$

- **a.** 0
- **b.** $+\infty$
- **c.** $-\infty$
- **d.** 1

32.

On donne : $\lim\limits_{X\to 0} X\ln(X) = 0$ et $\lim\limits_{X\to 0} \dfrac{\ln(1+X)}{X} = 1$.
On peut alors affirmer que : $\lim\limits_{x\to 0} \ln(x) \times \ln(2021x + 1) =$

- **a.** 0
- **b.** 1
- **c.** 2021
- **d.** $\dfrac{1}{2021}$

ÉQUATIONS DIFFÉRENTIELLES

33.

Si f est solution sur $\mathbb{R}$ de l'équation différentielle $y'(x) + y(x) = a$, avec $a \in \mathbb{R}$, alors f^2 est solution sur $\mathbb{R}$ de l'équation différentielle :

- **a.** $y'(x) + y(x) = 2a$
- **b.** $y'(x) + y(x) = 2af(x)$
- **c.** $y'(x) + 2y(x) = 2af(x)$
- **d.** $2y'(x) + y(x) = 2af(x)$

34.
Soit y_0 l'unique solution de l'équation différentielle $y' - y = 4$ telle que $y_0(1) = 2$.
On peut alors affirmer que $y_0(2) =$

a. 4
b. $6\mathrm{e} - 4$
c. $5\mathrm{e}^{-2}$
d. $5\mathrm{e}^{-2} + 4$

35.
Si u et v sont solutions sur $\mathbb{R}$ de l'équation différentielle $2y'(x) + y(x) = 0$, alors la fonction $f = u + v$ est solution sur $\mathbb{R}$ de l'équation différentielle :

a. $2y'(x) + y(x) = 0$
b. $y'(x) + 2y(x) = 0$
c. $2y'(x) + 2y(x) = 0$
d. Aucune de ces réponses n'est correcte

DÉNOMBREMENT ET PROBABILITÉS

36.
Sachant que n est un entier naturel tel que $\binom{n}{2} - \binom{n}{1} = 9$, on peut affirmer que n :

a. est un multiple de 3
b. est un multiple de 5
c. est un multiple de 7
d. est un multiple de 9

37.
Soient A, B et C trois événements tels que :

$$P(A) = P(\overline{B}) \qquad \text{et} \qquad B = \overline{C}$$

Sachant que $P(C) = 0,4$, on peut affirmer que $P(A)$ est égale à :

a. $0,4$
b. $0,2$
c. $0,6$
d. $0,8$

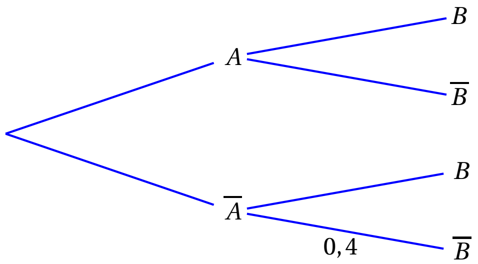
38.
Soient A et B deux événements indépendants tels que : $P(\overline{A} \cup B) = P(A \cup \overline{B})$.
On peut alors affirmer que :

a. $P(A) = P(B)$
b. $P(A) = P(\overline{B})$
c. $P(A) = 0$
d. $P(B) = 0$

39.
Soient A et B deux événements tels que :

$$P(A) = 0,8 \qquad \text{et} \qquad P(B) = 0,7$$

On donne en outre l'arbre de probabilité en partie pondéré suivant :



On peut alors affirmer que la probabilité $P(A \cup B)$ est égale à :

a. $0,92$
b. $0,72$
c. $0,84$
d. $0,90$

40.

Dans l'espace muni d'un repère orthonormé, on définit le plan $\mathscr{P}$ d'équation $3x-2z+3=0$. On lance un dé qui a la forme d'un tétraèdre régulier ; on obtient ainsi de manière équiprobable un chiffre a tel que $1 \leqslant a \leqslant 4$. Enfin, on définit le point A de coordonnées $\left(a^2 ; a+1 ; 3a\right)$. La probabilité que A appartienne à $\mathscr{P}$ est égale à :

a. $\dfrac{1}{4}$

b. $\dfrac{3}{4}$

c. $\dfrac{1}{3}$

d. $\dfrac{1}{2}$

41.

Soient X une variable aléatoire suivant la loi binomiale de paramètres n et $0,1$ et Y une seconde variable aléatoire suivant la loi binomiale de paramètres n et $0,4$:

$$X \hookrightarrow \mathscr{B}(n\,;0,1) \qquad \text{et} \qquad Y \hookrightarrow \mathscr{B}(n\,;0,4)$$

On suppose de plus que X et Y sont indépendantes et on définit également la variable aléatoire Z par $Z = 2X - Y$. Sachant que $V(Z) = 12$, on peut affirmer que $n =$

a. 2

b. 20

c. 200

d. Aucune de ces réponses n'est correcte

42.

Soient X_1, X_2,..., X_n, n variables aléatoires deux à deux indépendantes et admettant toutes une espérance égale à m et une variance égale à σ^2.

On peut alors affirmer que la variable aléatoire $\overline{X}_n = \dfrac{1}{n}\displaystyle\sum_{k=1}^{n} X_i = \dfrac{1}{n}(X_1 + X_2 + \cdots + X_n)$ admet une espérance et une variance, respectivement égales à :

a. m et σ^2

b. $\dfrac{m}{n}$ et $\dfrac{\sigma^2}{n}$

c. m et $\dfrac{\sigma^2}{n}$

d. m et $\dfrac{\sigma}{n}$

ALGORITHMIQUE ET PROGRAMMATION

Pour les questions 43 à 45, on considère l'algorithme suivant :

Algorithme 1 : SUJET ZERO

```
Variables
    S : nombre réel
    N, I : entiers naturels non nuls
Traitement
    Saisir N
    I ← 1
    S ← 0
    Tant que I ⩽ N faire
        S ← S + I
        I ← I + 1
    Afficher S
```

43.

Pour une valeur saisie de N par l'utilisateur, que retourne cet algorithme ?

a. La somme des entiers de 1 à N

b. La somme des entiers des 1 à $N-1$

c. La somme des entiers de 0 à N

d. La somme $N + (N+1) + (N+2) + \cdots + (N+N)$

44.
Pour une valeur saisie par l'utilisateur de $N = 39$, quelle valeur retourne cet algorithme ?

a. 40
b. 380
c. 680
d. 780

45.
Combien existe-t-il de valeur(s) possible(s) de N que peut saisir l'utilisateur pour que cet algorithme retourne la valeur 200 ?

a. 0
b. 1
c. 2
d. 4

• • • FIN • • •