CONCOURS AVENIR – 8 MAI 2013.

Épreuve de mathématiques.
Durée 1h30mn
Coefficient 5

Consignes spécifiques.

Lire attentivement les consignes afin de vous placer dans les meilleures conditions de réussite de cette épreuve :

Cette épreuve comporte volontairement plus d'exercices que vous ne pouvez en traiter dans le temps imparti.

La raison en est que votre enseignant n'a pas forcément traité l'ensemble du programme de Terminale S.

Vous devez répondre à 45 questions au choix parmi les 60 proposées pour obtenir la note maximale.

Si vous traitez plus de 45 questions, seules les 45 premières seront prises en compte.

Aucun brouillon n'est distribué. Les pages blanches de ce sujet peuvent être utilisées à l'usage de brouillon.

L'usage de la calculatrice ou de tout autre appareil électronique est interdit.

Aucun document autre que ce sujet et sa grille réponse n'est autorisé.

Attention, il ne s'agit pas d'un examen mais bien d'un concours qui aboutit à un classement.

Si vous trouvez ce sujet « difficile », ne vous arrêtez pas en cours de composition, n'abandonnez pas, restez concentré(e). Les autres candidats rencontrent probablement les mêmes difficultés que vous !

Barème :

Afin d'éliminer les stratégies de réponses au hasard, **chaque réponse exacte est gratifiée de 3 points**, tandis que **chaque réponse fausse est pénalisée par le retrait d'1 point**.

Simplifications d'écritures.

1. $\frac{1}{2}\ln(27) - 2\ln(3) + \ln(\sqrt{3})$ est :
   a. nul,
   b. strictement négatif,
   c. strictement positif,
   d. aucune des trois propositions proposées ci-dessus n'est correcte.

2. $\frac{-2\mathrm{e}^2\times 3\mathrm{e}^4}{(2\mathrm{e}^2)^2-3mathrme^4}$ est égale à :
   a. $\frac{1}{2\mathrm{e}^2}$,
   b. $-6\mathrm{e}^2$,
   c. $-5\mathrm{e}^2$,
   d. aucune des trois propositions proposées ci-dessus n'est correcte.
3. $(\ln(3))^2 - 2\ln(3)$ est égale à :
   (a) nul,
   (b) strictement négatif,
   (c) strictement positif,
   (d) aucune des trois propositions proposées ci-dessus n'est correcte.
4. $\frac{\cos^2\left(\frac{\pi}{6}\right)+\sin^2\left(\frac{\pi}{6}\right)}{\cos^2\left(\frac{\pi}{3}\right)+\sin^2\left(\frac{\pi}{3}\right)}$ est égal à :
   a. $\frac{1}{2}$,
   b. 1,
   c. 2,
   d. aucune des trois propositions proposées ci-dessus n'est correcte.

Continuité et dérivation.

Soit f une fonction définie sur $\mathbb{R}$.

5. f est continue en -1 signifie que :
   a. $\lim_{x\to -1} f(x)$ est un réel,
   b. $\lim_{x\to 0} f(x-1)$ est un réel,
   c. $\lim_{x\to 0} \frac{f(-1+x)-f(-1)}{x}$ est un réel,
   d. aucune des trois propositions proposées ci-dessus n'est correcte.
6. f est dérivable en -1 signifie que :
   a. $\lim_{x\to -1} f(x)$ est un réel,
   b. $\lim_{x\to 0} f(x-1)$ est un réel,
   c. $\lim_{x\to 0} \frac{f(-1+x)-f(-1)}{x}$ est un réel,
   d. aucune des trois propositions proposées ci-dessus n'est correcte.

Soit g une fonction définie sur $[-1;2]$ telle que $g(-1)=2$; $g(0)=1$; $g(1)=0$ et $g(2)=-1$.

7. On est certain que sur $[-1;2]$:
   a. g est strictement décroissante,

   b. g est strictement croissante,
   c. g n'est pas strictement décroissante,
   d. g n'est pas strictement croissante.
8. On est certain que sur $[-1; 2]$, l'équation $g(x) = 0,5$:
   a. n'admet pas de solution,
   b. admet une unique solution,
   c. admet au moins une solution,
   d. aucune des trois propositions proposées ci-dessus n'est correcte.
9.

Équations et inéquations.

9. $\frac{1}{x} \leq 0,2$ a pour solution :
   a. $]0; 5]$,
   b. $[5; +\infty[$,
   c. $]-\infty; 5]$,
   d. aucune des trois propositions proposées ci-dessus n'est correcte.
10. Le nombre de solutions de l'équation : $\ln(x^2) = (\ln(x))^2$est :
   a. 0.
   b. 1.
   c. 2.
   d. aucune des trois propositions proposées ci-dessus n'est correcte.
11. Le nombre de solutions de l'équation : $(\ln(x))^2 = -(\ln(x))^2$ est :
   a. 0.
   b. 1.
   c. 2.
   d. aucune des trois propositions proposées ci-dessus n'est correcte.
12. Le nombre de solutions de l'inéquation : $\mathrm{e}^{-x^2} \geq 1$ est :
   a. infini.
   b. 0.
   c. 1.
   d. aucune des trois propositions proposées ci-dessus n'est correcte.
13. Le nombre de complexes distincts solutions de l'équation : $2z^2 - 5z + 3 = 0$ est égal à :
   a. 0.
   b. 1.
   c. 2.
   d. aucune des trois propositions proposées ci-dessus n'est correcte.

Implications et équivalences.

Dans les quatre items suivants, P_1 et P_2 sont deux propositions et a et b deux réels. De manière générale :

14. Si P_1 : ´ $a^3 = b^3$ ˇ et P_2 : ´ $a = b$ ˇ alors :
    a. seule P_1 implique P_2.
    b. seule P_2 implique P_1.
    c. P_1 et P_2 sont équivalentes.
    d. aucune des trois propositions proposées ci-dessus n'est correcte.
15. Si P_1 : ´ $\ln(az) = \ln(b)$ ˇ et P_2 : ´ $\mathrm{e}^a = \mathrm{b}$ ˇ alors :
    a. seule P_1 implique P_2.
    b. seule P_2 implique P_1.
    c. P_1 et P_2 sont équivalentes.
    d. aucune des trois propositions proposées ci-dessus n'est correcte.
16. Si P_1 : ´ $a^2 = b$ ˇ et P_2 : ´ $a = \sqrt{b}$ ˇ alors :
    a. seule P_1 implique P_2.
    b. seule P_2 implique P_1.
    c. P_1 et P_2 sont équivalentes.
    d. aucune des trois propositions proposées ci-dessus n'est correcte.
17. Si P_1 : ´ $AB^2 = AC^2 = BC^2$ ˇ et P_2 : ´ ABC est un triangle rectangle ˇ alors :
    a. seule P_1 implique P_2.
    b. seule P_2 implique P_1.
    c. P_1 et P_2 sont équivalentes.
    d. aucune des trois propositions proposées ci-dessus n'est correcte.

Interprétation graphique.

Ci-dessous la parabole représentant la fonction f définie sur $\mathbb{R}$.

Image

Soient les suites (U_n) et (V_n) définies, pour tout entier naturel n , respectivement par :

$U_n = f(n)$ et $\begin{cases} V_0 = a \\ V_{n+1} = f(V_n) \end{cases}$ où a est un réel.

18. La tangente à la parabole au point d'abscisse 3 a pour équation :

a. $x = 6$.
b. $y = 6$.
c. $y = 6x - 18$.
d. aucune des trois propositions proposées ci-dessus n'est correcte.

19. Sur $\mathbb{R}$, la dérivée de f est définie par $f'(x) =$
a. $\frac{-4}{9}x - \frac{4}{3}$.
b. $\frac{-4}{9}x + \frac{4}{3}$.
c. $\frac{4}{9}x - \frac{4}{3}$.
d. $\frac{4}{9}x + \frac{4}{3}$.

20. $\lim_{x\to+\infty}(f(x) - x) =$
(a) $-\infty$.
(b) $+\infty$.
(c) 0.
(d) aucune des trois propositions proposées ci-dessus n'est correcte.

21. $\int_{-1}^{4} f(x)\,\mathrm{d}x$:
a. est nulle.
b. strictement négative.
c. strictement positive.
d. aucune des trois propositions proposées ci-dessus n'est correcte.

22. La suite (U_n) est :
a. minorée non majorée.
b. majorée non minorée.
c. bornée.
d. aucune des trois propositions proposées ci-dessus n'est correcte.

23. Pour $a = 1$, V_2 appartient à :
a. $[0; 2]$.
b. $[2; 4]$.
c. $[4; 6]$.
d. aucune des trois propositions proposées ci-dessus n'est correcte.

24. Pour $a = -1$, la suite (V_n) est :
a. constante.
b. strictement décroissante.
c. strictement croissante.

d. aucune des trois propositions proposées ci-dessus n'est correcte.

25. Pour $a = -4$, (V_n) :
    a. est convergente.
    b. diverge vers $-\infty$.
    c. diverge vers $+\infty$.
    d. aucune des trois propositions proposées ci-dessus n'est correcte.

La trigonométrie.

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x \cdot \cos\left(\frac{X}{3}\right)$.

26. f est :
    a. paire.
    b. impaire.
    c. paire et impaire.
    d. aucune des trois propositions proposées ci-dessus n'est correcte.
27. f est :
    a. périodique de période 2π.
    b. périodique de période 6π.
    c. périodique de période $2\pi/3$.
    d. aucune des trois propositions proposées ci-dessus n'est correcte.
28. Le nombre de solutions sur $[-2\pi, 2\pi]$ de l'équation $f(x) = 0$ est :
    a. 0.
    b. 1.
    c. 2.
    d. 3.
29. Sur $\mathbb{R}$, la fonction dérivée f' est définie par $f'(x) =$:
    a. $-x \sin\left(\frac{x}{3}\right)$.
    b. $\cos\left(\frac{x}{3}\right) + x \cdot \sin\left(\frac{x}{3}\right)$.
    c. $\cos\left(\frac{x}{3}\right) - x \cdot \sin\left(\frac{x}{3}\right)$.
    d. aucune des trois propositions proposées ci-dessus n'est correcte.
30. Sur $\mathbb{R}$, la primitive F de f telle que $F(0) = 0$ est définie par $F(x) =$
    a. $\frac{x^2}{2} \cdot \sin\left(\frac{x}{3}\right)$.
    b. $\frac{3x^2}{2} \cdot \sin\left(\frac{x}{3}\right)$.
    c. $9\cos\left(\frac{x}{3}\right) + 3x \cdot \sin\left(\frac{x}{3}\right)$.

d. aucune des trois propositions proposées ci-dessus n'est correcte.

31. $\lim_{x\to+\infty} f(x) =$
    a. 0.
    b. $-\infty$.
    c. $+\infty$.
    d. aucune des trois propositions proposées ci-dessus n'est correcte.
32. $\lim_{x\to+\infty} f\left(\frac{1}{x}\right) =$
    a. 0.
    b. $-\infty$.
    c. $+\infty$.
    d. aucune des trois propositions proposées ci-dessus n'est correcte.
33. $\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\,\mathrm{d}x$ est :
    a. nulle.
    b. strictement négative.
    c. strictement positive.
    d. aucune des trois propositions proposées ci-dessus n'est correcte.

Algorithmique.

On considère l'algorithme suivant :

Saisir un entier $N \geq 1$
Affecter à S *la valeur* 0
Affecter à I *la valeur* 0
Tant que $S < N$
    Affecter à S *la valeur* $S + I2$
    Affecter à I *la valeur* $I + 1$
Fin de tant que
Afficher S
Afficher I

34. La valeur de S affichée pour $N = 30$ est :
    a. 14.
    b. 30.
    c. 55.
    d. aucune des trois propositions proposées ci-dessus n'est correcte.
35. La valeur de I affichée pour $N = 30$ est :

a. 4.
b. 5.
c. 6.
d. aucune des trois propositions proposées ci-dessus n'est correcte.

36. La plus petite valeur de N telle que $I = 3$ est :
a. 1.
b. 1.
c. 3.
d. aucune des trois propositions proposées ci-dessus n'est correcte.

37. La plus grande valeur de N telle que $I = 3$ est :
a. 1.
b. 3.
c. 5.
d. aucune des trois propositions proposées ci-dessus n'est correcte.

Les complexes.

38. L'écriture exponentielle de $\sqrt{3} - i$ est :
a. $\sqrt{2}\mathrm{e}^{-i\frac{\pi}{6}}$.
b. $\sqrt{2}\mathrm{e}^{-i\frac{\pi}{3}}$.
c. $2\mathrm{e}^{-i\frac{\pi}{6}}$.
d. $2\mathrm{e}^{-i\frac{\pi}{3}}$.

39. $(\sqrt{3} - i)^2$ est :
a. un réel strictement négatif.
b. un réel strictement positif.
c. un imaginaire pur.
d. aucune des trois propositions proposées ci-dessus n'est correcte.

Dans un repère orthonormé direct $(O, \vec{u}, \vec{v})$ du plan complexe, on considère l'application f qui à tout point M d'affixe z où $z \neq -2$ associe le point M' d'affixe $z' = \frac{z-1}{z+2}$.

40. Si $z = -i$ alors $z' =$
a. $\frac{-1}{5} - \frac{3}{5}i$.
b. $\frac{-1}{5} + \frac{3}{5}i$.
c. $\frac{-1}{2} + i$.

d. aucune des trois propositions proposées ci-dessus n'est correcte.

41. Si $z' = -i$ alors $z =$

a. $\frac{-1}{2} + \frac{3}{2}$.

b. $\frac{-1}{2} - \frac{3}{2}i$.

c. $\frac{-3}{2} + \frac{1}{2}i$.

d. aucune des trois propositions proposées ci-dessus n'est correcte.

42. L'ensemble des points M tels que $OM' = 1$ est :

a. une droite privée d'un point.

b. un cercle privé d'un point.

c. une droite.

d. un cercle.

43. L'ensemble des points M tels que $z' = -\overline{z'}$ est :

a. une droite privée d'un point.

b. un cercle privé d'un point.

c. une droite.

d. un cercle

La géométrie analytique dans l'espace.

Dans le repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ *de l'espace, on considère les points* $A(0, -5, 0)$, $B(1, 0, 1)$, $C(-1, -7, 0)$ *et* $D(a, 0, -1)$ *où* a *est un réel.*

44. Une équation du plan (ABC) est :

a. $3x + y + 2z + 5 = 0$.

b. $x + y - 6z + 5 = 0$.

c. $-2x + y - 3z + 5 = 0$.

d. aucune des trois propositions proposées ci-dessus n'est correcte.

45. Le triangle ABD est rectangle en B lorsque $a =$

a. 1.

b. 3.

c. 4.

d. aucune des trois propositions proposées ci-dessus n'est correcte.

46. Les droites (AD) et (BC) sont parallèles lorsque $a =$

a. $\frac{-10}{7}$.

b. $\frac{10}{7}$.

c. 4.

d. aucune des trois propositions proposées ci-dessus n'est correcte.

47. Le nombre de valeurs de a tel que $AD = BC$ est :

a. 0.

b. 1.

c. 2.

d. aucune des trois propositions proposées ci-dessus n'est correcte.

48. $x^2 - 4x + y^2 + 3y = 4$ est une équation :

a. de cercle.

b. de sphère.

c. de plan.

d. aucune des trois propositions proposées ci-dessus n'est correcte.

49. Une équation de la sphère de centre C et de rayon OA est :

a. $x^2 + 2x + y^2 + 14y + z^2 = -25$.

b. $x^2 + 2x + y^2 + 14y + z^2 = 25$.

c. $x^2 - 2x + y^2 - 14y + z^2 = -25$.

d. aucune des trois propositions proposées ci-dessus n'est correcte.

Les probabilités.

Soient A et B deux événements non impossibles, non certains et indépendants l'un de l'autre. De manière générale :

50. $P(A \cup B) =$

a. $P(A) + P(B)$.

b. $P(A) \times P(B)$.

c. $P(A) \times P(\overline{B}) + P(B)$.

d. aucune des trois propositions proposées ci-dessus n'est correcte.

51. $P_B(\overline{A}) =$

a. $P_{\overline{B}}(A)$.

b. $1 - P(A)$.

c. $P(\overline{A} \cap B)$.

d. aucune des trois propositions proposées ci-dessus n'est correcte.

Soit X une variable aléatoire qui suit la loi binomiale de paramètres $(8; 0,3)$; Y une variable aléatoire qui suit une loi uniforme sur $[-2; 1]$ et Z une variable aléatoire qui suit la loi normale centrée réduite.

52. $P(X = 1) - P(X = 7)$ est :
    a. nul.
    b. strictement négatif.
    c. strictement positif.
    d. aucune des trois propositions proposées ci-dessus n'est correcte.
53. $E(X) =$
    a. $7,7$.
    b. $8,3$.
    c. $2,4$.
    d. aucune des trois propositions proposées ci-dessus n'est correcte.
54. $P(-1 \leq Y \leq 2) =$
    a. 1.
    b. $frac23$.
    c. -1.
    d. aucune des trois propositions proposées ci-dessus n'est correcte.
55. $E(Y) =$
    a. $-\frac{1}{3}$.
    b. 1.
    c. $\frac{1}{3}$.
    d. aucune des trois propositions proposées ci-dessus n'est correcte.
56. $P(Z < -2) - P(Z \geq 2)$:
    (a) est nul.
    (b) est strictement négatif.
    (c) est strictement positif.
    (d) aucune des trois propositions proposées ci-dessus n'est correcte.
57. $E(Z)$:
    a. est nulle.
    b. est strictement négative.
    c. est strictement positive.
    d. aucune des trois propositions proposées ci-dessus n'est correcte.

Les statistiques.

Mesdames ***Ave*** *et* ***Nir*** *se présentent à une élection nationale. Un sondage effectué sur un échantillon de n personnes (où $n \geq 50$) donne 52% des suffrages à* ***Ave*** *et 48% à* ***Nir****. Soit p la proportion des votants pour madame* ***Ave****.*

58. Pour $n = 400$, un intervalle de confiance de p, au niveau 95% est :
    a. $[0,51; 0,53]$.
    b. $[0,49; 0,55]$.
    c. $[0,47; 0,57]$.
    d. $[0,45; 0,59]$.
59. Le nombre minimal de personnes interrogées permettant d'affirmer, au niveau 95% que madame Ave va être élue est :
    a. 1 500.
    b. 2 000.
    c. 2 500.
    d. 3 000.
60. Pour obtenir une amplitude 2 fois plus petite de l'intervalle de confiance de p, il suffirait de multiplier le nombre initial de votants par :
    a. $\frac{1}{4}$.
    b. $\frac{1}{2}$.
    c. 2.
    d. 4.

FIN DE L'EPREUVE