

# Concours avenir 2012.

## EPREUVE DE MATHÉMATIQUES

DURÉE : 1h30mn

Coefficient 5

### Consignes spécifiques.

Lire attentivement les consignes afin de vous placer dans les meilleures conditions de réussite de cette épreuve.

Cette épreuve comporte volontairement plus d'exercices que vous ne pouvez en traiter dans le temps imparti.

La raison en est que votre enseignant n'a pas forcément traité l'ensemble du programme de Terminale S.

Vous devez répondre à 45 questions au choix parmi les 60 proposées pour obtenir la note maximale.

Si vous traitez plus de 45 questions, seules les 45 premières seront prises en compte.

Aucun brouillon n'est distribué. Les pages blanches de ce sujet peuvent être utilisées à l'usage de brouillon.

L'usage de la calculatrice ou de tout autre appareil électronique est interdit.

Aucun document autre que ce sujet et sa grille réponse n'est autorisé.

Attention, il ne s'agit pas d'un examen mais bien d'un concours qui aboutit à un classement.

Si vous trouvez ce sujet « difficile », ne vous arrêtez pas en cours de composition, n'abandonnez pas, restez concentré(e). Les autres candidats rencontrent probablement les mêmes difficultés que vous !

Barème : afin d'éliminer les stratégies de réponses au hasard, chaque réponse exacte est gratifiée de 3 points, tandis que chaque réponse fautive est pénalisée par le retrait d'1 point.

### La logique et son contraire.

1. Le contraire de « tous les élèves de TS1 sont des filles » est :
  - (a) « tous les élèves de TS1 sont des garçons ».
  - (b) « tous les élèves de TS1 ne sont pas des garçons ».
  - (c) « au moins un des élèves de TS1 n'est pas une fille ».
  - (d) Aucune des trois propositions proposées ci-dessus n'est correcte.
2. Le contraire de «  $A^2 = B^2$  » est :
  - (a) «  $A \neq B$  ».

- (b) «  $A \neq B$  ou  $A \neq -B$  ».
- (c) «  $A \neq B$  et  $A \neq -B$  ».
- (d) Aucune des trois propositions proposées ci-dessus n'est correcte.
3. Le contraire de « il existe une unique solution réelle à l'équation  $f(x) = 0$  » est :
- (a) « l'équation  $f(x) = 0$  n'admet pas de solution réelle ».
- (b) « l'équation  $f(x) = 0$  admet un nombre fini de solutions réelles ».
- (c) « l'équation  $f(x) = 0$  admet une infinité de solutions réelles ».
- (d) Aucune des trois propositions proposées ci-dessus n'est correcte.
4. Le contraire de «  $f$  est une fonction non dérivable en  $a$  » est :
- (a) «  $\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)-f(a)}{x-a}$  est réelle ».
- (b) «  $\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)-f(a)}{x-a}$  est infinie ».
- (c) «  $\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)-f(a)}{x-a}$  n'existe pas ».
- (d) Aucune des trois propositions proposées ci-dessus n'est correcte.

## Complexes.

Dans le plan complexe on considère l'application  $\psi$  qui à tout point  $M$  d'affixe  $z$  associe le point  $M'$  d'affixe  $z'$  telle que :  $z' = i\bar{z} + 1$ .

19.  $\overline{z'}$  =

- (a)  $iz - 1$ .
- (b)  $-iz - 1$ .
- (c)  $iz + 1$
- (d)  $-iz + 1$ .

$$\begin{aligned} \overline{z'} &= \overline{i\bar{z} + 1} \\ &= \overline{i\bar{z}} + \overline{1} \\ &= \overline{i\bar{z}} + 1 \\ &= -iz + 1 \end{aligned}$$

20. Sachant que la forme algébrique de  $z$  est  $x + iy$ , celle de  $z'$  est :

- (a)  $x - iy$ .
- (b)  $1 + i(x - iy)$ .
- (c)  $(y + 1) + ix$ .
- (d)  $(y + 1) - ix$ .

$$\begin{aligned}
 z' &= i\bar{z} + 1 \\
 &= i(x - iy) + 1 \\
 &= ix + y + 1 \\
 &= (y + 1) + ix
 \end{aligned}$$

21. Lorsque  $z = \frac{3i}{1-i}$  la forme algébrique de  $z'$  est :

- (a)  $\frac{3}{2} - \frac{5}{2}i$ .
- (b)  $\frac{3}{2} + \frac{5}{2}i$ .
- (c)  $\frac{5}{2} - \frac{3}{2}i$ .
- (d)  $\frac{5}{2} + \frac{3}{2}i$ .

$$\begin{aligned}
 z' &= i\bar{z} + 1 \\
 &= i\frac{\overline{3i}}{\overline{1-i}} + 1 \\
 &= i\frac{-3i}{1+i} + 1 \\
 &= \frac{3}{1+i} \times \frac{1-i}{1-i} + 1 \\
 &= \frac{3-3i}{2} + 1 \\
 &= \frac{5}{2} - \frac{3}{2}i
 \end{aligned}$$

22. L'antécédent par  $\psi$  du point d'affixe  $\frac{3i}{1-i}$  a pour affixe :

- (a)  $\frac{3}{2} - \frac{5}{2}i$ .
- (b)  $\frac{3}{2} + \frac{5}{2}i$ .
- (c)  $\frac{5}{2} - \frac{3}{2}i$ .

(d)  $\frac{5}{2} + \frac{3}{2}i$ .

$$i\bar{z} + 1 = \frac{3i}{1-i}$$

Ce qui équivaut successivement à :

$$\bar{z} = -i \left( \frac{3i}{1-i} - 1 \right)$$

$$\bar{z} = \frac{3}{1-i} + i$$

$$z = \frac{\bar{3}}{1-i} + \bar{i}$$

$$z = \frac{3}{1+i} - i$$

$$z = \frac{3}{1+i} \times \frac{1-i}{1-i} - i$$

$$z = \frac{3-3i}{2} - i$$

$$z = \frac{3}{2} - \frac{5}{2}i$$

23. Le nombre de points invariants par  $\psi$  est :

(a) 0.

(b) 1.

(c) infini.

(d) Aucune des trois proposition proposées ci-dessus n'est correcte.

Dire que le point  $M$  d'affixe  $z$  est invariant par  $\psi$  équivaut successivement à :

$$z = i\bar{z} + 1$$

$$x + iy = i(x - iy) + 1$$

$$x + iy = y + ix + 1$$

$$(x - y - 1) + i(y - x) = 0$$

$$\begin{cases} x - y - 1 = 0 \\ y - x = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x - x - 1 = 0 \\ y = x \end{cases}$$

$$\begin{cases} -1 = 0 \\ y = x \end{cases}$$

Ce qui est impossible il n'y donc pas de solution au système. Il n'y a pas de points invariants par  $\psi$ .

24. L'ensemble des points  $M$ , lorsque  $z'$  est un imaginaire pur, est décrit par :
- l'axe des abscisses.
  - l'axe des ordonnées.
  - la droite d'équation :  $y = -1$ .
  - Aucune des trois propositions proposées ci-dessus n'est correcte.

Dire que  $z'$  est un imaginaire pur équivaut successivement à :

$$\begin{aligned} \frac{1}{2}(z' + \bar{z}') &= 0 \\ z' + \bar{z}' &= 0 \\ i\bar{z} + 1 + \overline{i\bar{z} + 1} &= 0 \\ i(x - iy) + 1 + (-i)(x + iy) + 1 &= 0 \\ 2 + 2y &= 0 \\ y &= -1 \end{aligned}$$

## Continuité, dérivabilité et intégration.

Soient  $f$  et  $g$  deux fonctions dérivables sur  $\mathbb{R}$  telles que pour tout réel  $x$  :  $g'(x) = f(x)$  et  $\varphi$  la fonction définie sur  $\mathbb{R}$  par :  $\varphi(x) = g'(-x) - (g(-x))'$

- $g$  est donc sur  $\mathbb{R}$  :
  - la dérivée de  $f$ .
  - une dérivée de  $f$ .
  - la primitive de  $f$ .
  - une primitive de  $f$ .

C'est une primitive de  $f$ .

- Pour tout réel  $x$  :  $\varphi(x) =$

- (a) 0.
- (b)  $2f(-x)$ .
- (c)  $-2f(-x)$ .
- (d) Aucune des trois propositions proposées ci-dessus n'est correcte.

Soit  $h$  la fonction définie sur  $\mathbb{R}$  par :

$$h(x) = \begin{cases} x^3 & \text{sur } ]-\infty; 0] \\ x^2 & \text{sur } ]0; 1] \\ x & \text{sur } ]1; 4[ \\ \sqrt{x} & \text{sur } [4; +\infty[ \end{cases}$$

27. Le plus grand ensemble sur lequel  $h$  est continue est :
- (a)  $\mathbb{R}$ .
  - (b)  $\mathbb{R} \setminus \{4\}$ .
  - (c)  $\mathbb{R} \setminus \{4; 1; 0\}$ .
  - (d) Aucune des trois proposition proposées ci-dessus n'est correcte.
28. Le plus grand ensemble sur lequel  $h$  est dérivable est :
- (a)  $\mathbb{R}$ .
  - (b)  $\mathbb{R} \setminus \{4\}$ .
  - (c)  $\mathbb{R} \setminus \{4; 1; 0\}$ .
  - (d) Aucune des trois proposition proposées ci-dessus n'est correcte.
29. Le nombre de solutions sur  $\mathbb{R}$  de l'équation  $h(x) = 3$  est :
- (a) 1
  - (b) 2
  - (c) 3
  - (d) Aucune des trois propositions proposées ci-dessus n'est correcte.
30. Le nombre de solutions sur  $\mathbb{R}$  de l'équation  $\frac{2h(x)}{x} = 1$  est :
- (a) 1
  - (b) 2
  - (c) 3
  - (d) Aucune des trois propositions proposées ci-dessus n'est correcte.
31.  $\int_{-1}^1 h(x) dx =$

(a)  $\frac{1}{12}$

(b) 0.

(c)  $\frac{2}{3}$ .

(d) Aucune des trois propositions proposées ci-dessus n'est correcte.

32. La primitive  $H$  de  $h$  sur  $[-1; 1]$  s'annulant en 0 :

(a) est définie par  $H(x) = \frac{x^4}{4}$ .

(b) est définie par  $H(x) = \frac{x^3}{3}$ .

(c) n'existe pas.

(d) Aucune des trois propositions proposées ci-dessus n'est correcte.

33. Le plus grand ensemble sur lequel la fonction :  $x \mapsto \ln(h(x) - 3)$  est définie

(a) est  $] - 3; 3]$ .

(b) est  $]3; +\infty[$ .

(c) est  $]3; 4[\cup]9; +\infty[$ .

(d) Aucune des trois propositions proposées ci-dessus n'est correcte.

### Suites.

Soit la suite  $(u_n)$  où  $n \in \mathbb{N}^*$  définie par :  $\begin{cases} u_2 = 11 \\ u_{n+1} = u_n - \frac{2}{n(n+1)} \text{ pour } n \geq 1 \end{cases}$

34.  $u_3 =$

(a) 10.

(b)  $\frac{32}{3}$ .

(c)  $\frac{65}{6}$ .

(d) Aucune des trois propositions proposées ci-dessus n'est correcte.

$$u_3 = u_2 - \frac{2}{2(2+1)} = \frac{64}{6} = \frac{32}{3}$$

35.  $u_1 =$

(a) 10.

(b) 11.

(c) 12.

(d) Aucune des trois propositions proposées ci-dessus n'est correcte.

$$u_2 = u_1 - \frac{2}{1(1+1)} \Leftrightarrow u_2 + 1 = u_1 \Leftrightarrow u_1 = 12.$$

36.  $(u_n)$  est :

- (a) une suite arithmétique non géométrique.
- (b) une suite géométrique non arithmétique.
- (c) une suite arithmétique et géométrique.
- (d) Aucune des trois propositions proposées ci-dessus n'est correcte.

Il ne s'agit d'aucune des trois proposition.

37.  $(u_n)$  est :

- (a) une suite croissante.
- (b) une suite décroissante.
- (c) une suite monotone.
- (d) Aucune des trois propositions proposées ci-dessus n'est correcte.

Clairement :  $u_{n+1} = u_n - \frac{2}{n(n+1)} < u_n$ . La suite est donc strictement décroissante.

38.  $(u_n)$  est :

- (a) une suite convergente.
- (b) une suite divergente vers  $+\infty$ .
- (c) une suite divergente vers  $-\infty$ .
- (d) Aucune des trois propositions proposées ci-dessus n'est correcte.

$$\begin{aligned}
 u_{n+1} &= u_1 - \frac{2}{1(1+1)} - \frac{2}{2(2+1)} - \dots - \frac{2}{n(n+1)} \\
 &= u_1 - 2 \sum_{k=1}^n \frac{1}{k(k+1)} \\
 &= u_1 - 2 \sum_{k=1}^n \left( \frac{1}{k} - \frac{1}{k+1} \right) \\
 &= u_1 - 2 \sum_{k=1}^n \frac{1}{k} + 2 \sum_{k=1}^n \frac{1}{k+1} \\
 &= u_1 - 2 \times \frac{2}{1} + 2 \frac{1}{n(n+1)}
 \end{aligned}$$

D'où :  $u_n \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{} 12 - 2 = 10$ .



Une présentation plus simple :

$$u_{n+1} = u_n - 2 \left( \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1} \right)$$

$$u_{n+1} = u_n - \frac{2}{n} + \frac{2}{n+1}$$

Donc :

$$u_{n+1} - \frac{2}{n+1} = u_n - \frac{2}{n}$$

Ceci étant vrai pour tout  $n$  on en déduit (par récurrence) :

$$u_n - \frac{2}{n} = u_1 - \frac{2}{1}$$

$$u_n - \frac{2}{n} = 10$$

Puis on passe à la limite dans cette dernière égalité.

39. Pour tout  $n \in \mathbb{N}^*$ ,  $u_n =$

(a)  $12 - \frac{2}{n}$

(b)  $10,5 + \frac{1}{n}$

(c)  $10 + \frac{2}{n}$

(d) Aucune des trois propositions proposées ci-dessus n'est correcte.

D'après la réponse précédente aucune ne convient.

40.  $\sum_{k=1}^4 (-1)^k u_k =$

(a)  $\frac{-7}{6}$ .

(b) 0.

(c)  $\frac{7}{6}$ .

(d) Aucune des trois propositions proposées ci-dessus n'est correcte.

$$\begin{aligned}
 \sum_{k=1}^4 (-1)^k u_k &= -u_1 + u_2 - u_3 + u_4 \\
 &= (u_2 - u_1) + (u_4 - u_3) \\
 &= \frac{2}{1(1+1)} + \frac{2}{3(3+1)} \\
 &= 1 + \frac{1}{6} \\
 &= \frac{7}{6}
 \end{aligned}$$

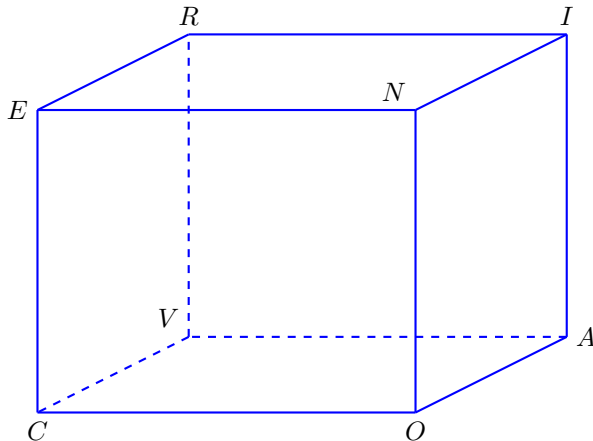
## Les probabilités.

Dans une boîte se trouvent 12 jetons indiscernables au toucher tel que sur chacun d'entre eux est inscrit l'un des 12 caractères de : CONCOURS2012 (chacun des 12 caractères n'étant inscrit que sur l'un des 12 jetons).

On tire successivement et sans remise deux des jetons de cette boîte et l'on considère les événements :  $A$  : « Les deux jetons sont des consonnes » et  $B$  : « Les deux jetons représentent le même caractère ».

## Géométrie analytique dans l'espace.

Dans le repère orthonormé  $(C; \frac{1}{5}\overrightarrow{CO}, \frac{1}{3}\overrightarrow{CV}, \frac{1}{4}\overrightarrow{CE})$ , on considère le pavé droit ci-dessous :  $COAVENIR$  tels que (en centimètres) :  $CO = 5$ ,  $CV = 3$  et  $CE = 4$ .



52. Les coordonnées du milieu de  $[EA]$  sont :
- $(\frac{1}{2}; \frac{1}{2}; \frac{1}{2})$ .
  - $(\frac{5}{2}; \frac{3}{2}; 2)$ .
  - $(\frac{5}{2}; \frac{3}{2}; -2)$ .
  - aucune des trois propositions proposées ci-dessus n'est correcte.
53. En centimètres, la longueur  $EA$  est égale à :
- 4.
  - $\sqrt{3}$ .
  - $5\sqrt{2}$ .
  - aucune des trois propositions proposées ci-dessus n'est correcte.
54. Le produit scalaire  $\overrightarrow{CN} \cdot \overrightarrow{RO}$  est égal à :
- 9.
  - 0.
  - 9.
  - aucune des trois propositions proposées ci-dessus n'est correcte.
55. Une équation cartésienne du plan  $(RVO)$  est :
- $y - 3 = 0$ .
  - $4y - 3z = 0$ .
  - $x + y - 1 = 0$ .
  - aucune des trois propositions proposées ci-dessus n'est correcte.
56. En centimètres, la distance du point  $I$  au plan  $(RVO)$  est égale à :
- $\frac{15}{\sqrt{34}}$ .
  - $\frac{1}{\sqrt{2}}$ .
  - 3.
  - aucune des trois propositions proposées ci-dessus n'est correcte.
57. En centimètres carrés, l'aire du triangle  $RVO$  est égale à :
- $\sqrt{34}$ .
  - $2\sqrt{34}$ .
  - $3\sqrt{34}$ .
  - aucune des trois propositions proposées ci-dessus n'est correcte.

58. En centimètres cubes, le volume du tétraèdre  $RVOI$  est égal à :
- (a) 10.
  - (b) 20.
  - (c) 30.
  - (d) aucune des trois propositions proposées ci-dessus n'est correcte.
59. L'ensemble des points  $M$  de l'espace tels que :  $||\overrightarrow{MC}|| = ||\overrightarrow{MC} - \overrightarrow{ME}||$  est :
- (a) une droite ou un cercle.
  - (b) un plan.
  - (c) une sphère.
  - (d) aucune des trois propositions proposées ci-dessus n'est correcte.
60. L'ensemble des points  $M$  de l'espace tels que :  $||\overrightarrow{MC}|| = ||\overrightarrow{MC} - 2\overrightarrow{ME}||$  est :
- (a) une droite ou un cercle.
  - (b) un plan.
  - (c) une sphère.
  - (d) aucune des trois propositions proposées ci-dessus n'est correcte.