Concours avenir 2010.

EPREUVE DE MATHEMATIQUES
DUREE : 1h30mn
Coefficient 5

Consignes spécifiques.

Lire attentivement les consignes afin de vous placer dans les meilleures conditions de réussite de cette épreuve.

Cette épreuve comporte volontairement plus d'exercices que vous ne pouvez en traiter dans le temps imparti.

La raison en est que votre enseignant n'a pas forcément traité l'ensemble du programme de Terminale S.

Vous devez répondre à 45 questions au choix parmi les 60 proposées pour obtenir la note maximale.

Si vous traitez plus de 45 questions, seules les 45 premières seront prises en compte.

Aucun brouillon n'est distribué. Les pages blanches de ce sujet peuvent être utilisées à l'usage de brouillon.

L'usage de la calculatrice ou de tout autre appareil électronique est interdit.

Aucun document autre que ce sujet et sa grille réponse n'est autorisé.

Attention, il ne s'agit pas d'un examen mais bien d'un concours qui aboutit à un classement.

Si vous trouvez ce sujet « difficile », ne vous arrêtez pas en cours de composition, n'abandonnez pas, restez concentré(e). Les autres candidats rencontrent probablement les mêmes difficultés que vous !

Barème : afin d'éliminer les stratégies de réponses au hasard, chaque réponse exacte est gratifiée de 3 points, tandis que chaque réponse fausse est pénalisée par le retrait d'1 point.

Les limites.

1. $\lim_{x\to-\infty} -2x^2 + x + 4\cos(x) =$
   - A. $-\infty$.
   - B. 0.
   - C. n'existe pas.
   - D. aucune des trois réponses précédentes.

2. $\lim_{x\to 0} -2x^2 + x + 4\cos(x) =$
   - A. $-\infty$.

B. 0.

C. n'existe pas.

D. aucune des trois réponses précédentes.

3. $\lim_{x\to-\infty} \frac{x}{\sin(-x)} =$

A. -1.

B. 1.

C. n'existe pas.

D. aucune des 3 réponses précédentes.

4. $\lim_{x\to 0} \frac{x}{\sin(-x)} =$

A. -1.

B. 1.

C. n'existe pas.

D. aucune des 3 réponses précédentes.

Les complexes.

Soit $z_1 = 3e^{i\frac{\pi}{4}} z_2$, où z_2 est un réel strictement négatif.

5. $|z_1| =$

A. $3z_2$.

B. $-3z_2$.

C. $3iz_2$.

D. $-3iz_2$.

6. $\arg(z_1) =$

A. $\frac{\pi}{4}$.

B. $-\frac{\pi}{4}$.

C. $\frac{3\pi}{4}$.

D. $\frac{-3\pi}{4}$.

7. $\overline{z_1} =$

A. $3e^{i\frac{\pi}{4}} z_2$.

B. $-3e^{i\frac{\pi}{4}} z_2$.

C. $3e^{-i\frac{\pi}{4}} z_2$.

D. $-3e^{-i\frac{\pi}{4}} z_2$.

8. z_1^{10} est un
   A. réel strictement positif.
   B. réel strictement négatif.
   C. imaginaire pur de partie imaginaire strictement positive.
   D. imaginaire pur de partie imaginaire strictement négative.

Transformations planes et complexes.

Soient f et g les transformations complexes qui à tout point M d'affixe z du plan associent respectivement les points d'affixes $f(z) = -iz + 1 - i$ et $g(z) = -\overline{z}$.

9. f est
   A. une translation.
   B. une rotation.
   C. une homothétie.
   D. une réflexion.

10. g est une
    A. une translation.
    B. une rotation.
    C. une homothétie.
    D. une réflexion.

11. L'affixe du point fixe de f est
    A. -1.
    B. 1.
    C. $-i$.
    D. i.

12. L'écriture complexe associée à$g \circ f$ est
    A. $-i\overline{z} - 1 - i$.
    B. $-i\overline{z} - 1 + i$.
    C. $i\overline{z} - 1 - i$.
    D. $i\overline{z} - 1 + i$.

Logique.

13. Pour prouver que I est le milieu de $[AB]$, il suffit de prouver que
    A. pour tout point M : $\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} = 2\overrightarrow{MI}$.
    B. $AI = BI$.
    C. $\overrightarrow{AI} + \overrightarrow{IB} = \overrightarrow{AB}$.
    D. $\overrightarrow{AI}$ et $\overrightarrow{AB}$ sont colinéaires.

14. Pour que 4 points distincts A, B, C et D soient coplanaires, il est nécessaire
    A. que trois de ces points soient alignés.
    B. que les droites (AB) et $CD)$ soient parallèles ou sécantes.
    C. de trouver un réel α tel que $\overrightarrow{AD} = \alpha(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC})$.
    D. aucune des 3 réponses précédentes.

15. Si a et b sont irrationnels, alors forcément
    A. $a + b$ est irrationnel.
    B. ab est irrationnels.
    C. a^2 est irrationnel.
    D. aucune des trois réponses précédentes.

16. Si f est définie en a alors nécessairement
    A. f est continue en a.
    B. $\ln(f)$ est définie en a.
    C. $\frac{1}{f}$ est définie en a.
    D. $\frac{1}{\mathrm{e}^f}$ est définie en a.

Équations et inéquations dans $\mathbb{R}$.

17. $x^4 - x^2 - 6 = 6$ admet dans $\mathbb{R}$
    A. 0 solutions.
    B. 1 ou 3 solutions.
    C. 2 solutions.
    D. 4 solutions.

18. $|x^2 - x - 6| = 6$ admet dans $\mathbb{R}$
    A. 0 solutions.

B. 1 ou 3 solutions.

C. 2 solutions.

D. 4 solutions.

19. $(\ln(x))^2 - \ln(x) - 6 = 6$ admet dans $\mathbb{R}$

A. 0 solutions.

B. 1 ou 3 solutions.

C. 2 solutions.

D. 4 solutions.

20. $\ln(x^2) - \ln(x) - 6 = 6$ admet dans $\mathbb{R}$

A. 0 solutions.

B. 1 ou 3 solutions.

C. 2 solutions.

D. 4 solutions.

21. $x^2 \mathrm{e}^{-x} = -1$ admet dans $\mathbb{R}$

A. 0 solution.

B. 1 solution.

C. 2 solution.

D. 3 ou 4 solutions.

22. $x^2 \mathrm{e}^{-x} = 2\mathrm{e}^{-2}$ admet dans $\mathbb{R}$

A. 0 solution.

B. 1 solution.

C. 2 solutions.

D. 3 ou 4 solutions.

23. $\frac{1}{\mathrm{x}} > -\mathrm{e}^{-\frac{1}{3}}$ a pour solution dans $\mathbb{R}$

A. $]0, 3[$.

B. $]-\infty, -3[\cup]0, +\infty[$.

C. $\mathbb{R}$.

D. aucune des 3 réponses précédentes.

24. $\frac{1}{\mathrm{x}} > \mathrm{e}^{\frac{1}{3}}$ a pour solution dans $\mathbb{R}$

A. $]0, 3[$.

B. $]-\infty, -3[\cup]0, +\infty[$.

C. $\mathbb{R}$.

D. aucune des 3 réponses précédentes.

Équations dans $\mathbb{C}$.

25. La somme des solutions complexes de l'équation $z^4 - z^2 - 12 = 0$ est égale à
   A. 0.
   B. 1.
   C. -12.
   D. aucune des 3 réponses précédentes.

26. Le produit des solutions complexes de l'équation $z^4 - z^2 - 12 = 0$ est égale à
   A. 0.
   B. 1.
   C. -12.
   D. aucune des 3 réponses précédentes.

Dérivées et primitives.

27. Sur $\mathbb{R}^*$ la dérivée de $f : x \mapsto \frac{\mathrm{e}^{\frac{1}{x}}}{x}$ est définie par $f'(x) =$
   A. $\frac{-1}{x^2}\mathrm{e}^{\frac{1}{x}}$.
   B. $\frac{x+1}{x^3}\mathrm{e}^{\frac{1}{x}}$.
   C. $\frac{-x-1}{x^3}\mathrm{e}^{\frac{1}{x}}$.
   D. aucune des 3 réponses précédentes.

28. Sur $]-\infty, 0[$ une primitive F de $x \mapsto \ln(-x)$ est définie par $F(x) =$
   A. $x\ln(-x) - x$.
   B. $x\ln(-x) + x$.
   C. $-x\ln(-x) - x$.
   D. $-x\ln(-x) + x$.

29. Sur $\left[-\pi, -\frac{\pi}{2}\right[$ la primitive F de $x \mapsto \tan(x)$ telle que $F(-\pi) = 0$ est définie par $F(x) =$
   A. $\ln(\cos(x))$.
   B. $\ln(-\cos(x))$.
   C. $-\ln(\cos(x))$.
   D. $-\ln(-\cos(x))$.

30. Sachant que sur $\mathbb{R}$: $f''(x) = -f(x)$ alors f ne peut pas être égale à
   A. 0.
   B. e^{-x}.
   C. $\cos(x)$.
   D. $\sin(x)$.

Intégrales.

31. $\int_1^{-1} x\mathrm{e}^{-x^2}\ \mathrm{d}x =$
    A. $\frac{-2}{\mathrm{e}}$.
    B. $\left(\frac{\mathrm{e}-1}{\mathrm{e}}\right)$.
    C. $-\left(\frac{\mathrm{e}-1}{\mathrm{e}}\right)$
    D. aucune des 3 réponses précédentes.

32. $\int_{-1}^{1} x^2\mathrm{e}^{-x}\ \mathrm{d}x =$
    A. 0.
    B. $\mathrm{e}^{-1} - \mathrm{e}$.
    C. $\frac{\mathrm{e}-\mathrm{e}^{-1}}{3}$.
    D. $\mathrm{e} - 5\mathrm{e}^{-1}$.

Équations différentielles.

Soient

$$(E) : \quad y' - 2y = 2x + 5$$

et

$$(F) : \quad y'' - 2y' = 2$$

33. Une solution de (E) est définie par $f(x) =$
    A. $\mathrm{e}^{2x} - \frac{2x+5}{2}$.
    B. $\mathrm{e}^{2x} + \frac{2x+5}{2}$.
    C. $-x - 3$.
    D. aucune des 3 réponses précédentes.

34. Une solution de (F) est défiie par $g(x) =$
    A. $-\mathrm{e}^{2x} - 1$.
    B. $-\mathrm{e}^{2x} - x$.
    C. 1.
    D. x.

35. $y : x \mapsto y(x) = -5\mathrm{e}^{2x} - x - 3$
    A. est solution de (E) et de (F).
    B. est solution de (E) mais pas de (F).
    C. est solution de (F) mais pas de (E).

D. n'est solution ni de (E) ni de (F).

36. $y : x \mapsto y(x) = 3e^{2x} - x + 3$
    A. est solution de (E) et de (F).
    B. est solution de (E) mais pas de (F).
    C. est solution de (F) mais pas de (E).
    D. n'est solution ni de (E) ni de (F).

Géométrie analytique dans l'espace.

Dans un repère orthonormal, on considère le plan P d'équation $2x-3y+z=-4$ et le point A de coordonnées $(2;-1;3)$.

37. Une équation cartésienne du plan passant pas A et parallèle à P est
    A. $2x - 3y + z = 4$.
    B. $-2x + 3y - z = 10$.
    C. $x - y - z = 0$.
    D. aucune des 3 réponses précédentes.

38. Une équation cartésienne d'un plan passant par A et perpendiculaire à P est
    A. $\frac{1}{2}x - \frac{1}{3}y + z = \frac{13}{3}$.
    B. $y + 3z = 8$.
    C. $-x + 2z = -4$.
    D. aucune des trois réponses précédentes.

39. La distance du point A au plan P est
    A. 14.
    B. $\sqrt{7}$.
    C. $\sqrt{14}$.
    D. aucune des 3 réponses précédentes.

40. L'intersection du plan P avec la sphère de centre A et de rayon 3 est
    A. vide.
    B. un point.
    C. un cercle.
    D. aucune des 3 réponses précédentes.

Espace et vecteurs.

Soient A et B deux points distincts de l'espace l'ensemble des points M tels que

41. $||3\overrightarrow{MA} - 5\overrightarrow{MB}|| = ||5\overrightarrow{MA} - 3\overrightarrow{MB}||$
    A. est une droite ou un cercle.
    B. est une sphère.
    C. est un plan.
    D. aucune des 3 réponses précédentes.

42. $||3\overrightarrow{MA} - 5\overrightarrow{MB}|| = ||5\overrightarrow{MB} - 3\overrightarrow{MA}||$
    A. est une droite ou un cercle.
    B. est une sphère.
    C. est un plan.
    D. aucune des trois réponses précédentes.

Suites arithmétiques et géométriques.

(u_n) étant une suite telle que $u_3 = -5$ et $u_6 = 40$.
Si (u_n) est arithmétique alors :

45. $u_3 + u_4 + \cdots + u_7 =$
    (a) 100
    (b) 200
    (c) 70
    (d) aucune des 3 réponses précédentes.

46. $\mathrm{e}^{u_3}\mathrm{e}^{u_4}\ldots\mathrm{e}^{u_7} =$
    (a) e^{100}
    (b) e^{200}
    (c) e^{70}
    (d) aucune des 3 réponses précédentes.

Si (u_n) est géométrique alors :

47. $u_3 + u_4 + \cdots + u_7 =$
    (a) $-\frac{165}{3}$

(b) 165

(c) 155

(d) aucune des 3 réponses précédentes.

48. $\ln|u_3| + \ln|u_4| + \dots \ln|u_7| =$

(a) $\ln\left(\frac{165}{3}\right)$

(b) $\ln(165)$

(c) $\ln(155)$

(d) aucune des 3 réponses précédentes.