Concours avenir 2010.

EPREUVE DE MATHEMATIQUES
DUREE : 1h30mn
Coefficient 5

Consignes spécifiques.

Lire attentivement les consignes afin de vous placer dans les meilleures conditions de réussite de cette épreuve.

Cette épreuve comporte volontairement plus d'exercices que vous ne pouvez en traiter dans le temps imparti.

La raison en est que votre enseignant n'a pas forcément traité l'ensemble du programme de Terminale S.

Vous devez répondre à 45 questions au choix parmi les 60 proposées pour obtenir la note maximale.

Si vous traitez plus de 45 questions, seules les 45 premières seront prises en compte.

Aucun brouillon n'est distribué. Les pages blanches de ce sujet peuvent être utilisées à l'usage de brouillon.

L'usage de la calculatrice ou de tout autre appareil électronique est interdit.

Aucun document autre que ce sujet et sa grille réponse n'est autorisé.

Attention, il ne s'agit pas d'un examen mais bien d'un concours qui aboutit à un classement.

Si vous trouvez ce sujet « difficile », ne vous arrêtez pas en cours de composition, n'abandonnez pas, restez concentré(e). Les autres candidats rencontrent probablement les mêmes difficultés que vous !

Barème : afin d'éliminer les stratégies de réponses au hasard, chaque réponse exacte est gratifiée de 3 points, tandis que chaque réponse fausse est pénalisée par le retrait d'1 point.

Les limites.

1. $\lim_{x\to-\infty} -2x^2 + x + 4\cos(x) =$

   A. $-\infty$.

   B. 0.

   C. n'existe pas.

   D. aucune des trois réponses précédentes.

   Réponse A.

   Intuitivement : le polynome l'emportera sur le cosinus qui est borné.

Notons $f(x) = -2x^2 + x + 4\cos(x)$.
Soit $x \in \mathbb{R}$.

$$-2x^2 + x - 4 \leq f(x) \qquad \leq -2x^2 + x + 4$$

Remarquons
$$\begin{cases} -2x^2 + x - 4 = -2x^2\left(1 - \frac{1}{2x} + \frac{2}{x^2}\right) \\ -2x^2 + x + 4 = -2x^2\left(1 - \frac{1}{2x} - \frac{2}{x^2}\right) \end{cases}$$

Or
$$\begin{cases} \lim_{x\to-\infty} -2x^2\left(1 - \frac{1}{2x} + \frac{2}{x^2}\right) = \lim_{x\to-\infty} -2x^2 = -\infty \\ \lim_{x\to-\infty} -2x^2\left(1 - \frac{1}{2x} - \frac{2}{x^2}\right) = \lim_{x\to-\infty} -2x^2 = -\infty \end{cases}$$

donc, d'après les théorèmes d'encadrement des limites

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = -\infty$$

2. $\lim_{x\to 0} -2x^2 + x + 4\cos(x) =$
   A. $-\infty$.
   B. 0.
   C. n'existe pas.
   D. aucune des trois réponses précédentes.

   Réponse D.

$$\begin{cases} \lim_{x\to 0} -2x^2 + x = 0 \\ \lim_{x\to 0} 4\cos(x) = 4 \end{cases} \Rightarrow \lim_{x\to 0} -2x^2 + x + 4\cos(x) = 4$$

3. $\lim_{x\to-\infty} \frac{x}{\sin(-x)} =$
   A. -1.
   B. 1.
   C. n'existe pas.
   D. aucune des 3 réponses précédentes.

   Réponse C.

   Intuitivement : le x au numérateur conduira à des valeurs infinies mais le dénominateur changeant de signe périodiquement il n'y aura pas de limites.

Notons $f(x) = \frac{x}{\sin(-x)}$ Choisissons deux suites de réels convergeant vers $-\infty$

$$\begin{cases} u_n = \frac{\pi}{2} - 2n\pi \\ v_n = -\frac{\pi}{2} - 2n\pi \end{cases}$$

Nous remarquons que

$$f(u_n) = \frac{\frac{\pi}{2} - 2n\pi}{\sin\left(-\frac{\pi}{2} + 2n\pi\right)} = -\frac{\pi}{2} + 2n\pi$$

D'où

$$\lim_{n\to+\infty} f(u_n) = +\infty$$

Nous démontrerions de même que $\lim_{n\to+\infty} f(v_n) = -\infty$.

4. $\lim_{x\to 0} \frac{x}{\sin(-x)} =$
   A. -1.
   B. 1.
   C. n'existe pas.
   D. aucune des 3 réponses précédentes.

   Réponse A.

   Remarquons

$$f(x) = \frac{x}{\sin(-x)}) \frac{-1}{\frac{\sin(x)}{x}}$$

   D'après le cours

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sin(x)}{x} = 1$$

   Donc

$$\lim_{x\to 0} f(x) = -1$$

Les complexes.

Soit $z_1 = 3e^{i\frac{\pi}{4}} z_2$, où z_2 est un réel strictement négatif.

5. $|z_1| =$
   A. $3z_2$.
   B. $-3z_2$.
   C. $3iz_2$.

D. $-3iz_2$.

Réponse B.

Par élimination : c'est la seule réponse réelle positive.

Nous pouvons également calculer

$$|z_1| = |3z_2\mathrm{e}^{i\frac{\pi}{4}}| = |3z_2| = 3|z_2| = 3 \times (-z_2)$$

6. $\arg(z_1) =$
   A. $\frac{\pi}{4}$.
   B. $-\frac{\pi}{4}$.
   C. $\frac{3\pi}{4}$.
   D. $\frac{-3\pi}{4}$.

Réponse D.

$$\begin{aligned} z_1 &= 3 \times (-z_2) \times \left(-\mathrm{e}^{i\frac{\pi}{4}}\right) \\ &= 3 \times (-z_2) \times \left(\mathrm{e}^{-i\pi}\mathrm{e}^{i\frac{\pi}{4}}\right) \\ &= 3 \times (-z_2)\mathrm{e}^{i\left(\frac{\pi}{4}-\pi\right)} \\ &= 3 \times (-z_2)\mathrm{e}^{-i\frac{3\pi}{4}} \end{aligned}$$

Comme $3 \times (-z_2) = |z_1|$ nous pouvons conclure.

7. $\overline{z_1} =$
   A. $3\mathrm{e}^{i\frac{\pi}{4}}z_2$.
   B. $-3\mathrm{e}^{i\frac{\pi}{4}}z_2$.
   C. $3\mathrm{e}^{-i\frac{\pi}{4}}z_2$.
   D. $-3\mathrm{e}^{-i\frac{\pi}{4}}z_2$.

Réponse D.

$$z_1 = -3z_2\mathrm{e}^{i\frac{\pi}{4}}$$

donc

$$\overline{z_1} = \overline{-3z_2} \times \overline{\mathrm{e}^{i\frac{\pi}{4}}} = -3z_2\mathrm{e}^{-i\frac{\pi}{4}}$$

8. z_1^{10} est un

A. réel strictement positif.

B. réel strictement négatif.

C. imaginaire pur de partie imaginaire strictement positive.

D. imaginaire pur de partie imaginaire strictement négative.

Réponse C.

Dans les questions précédentes nous avons établi l'écriture de z_1 sous forme trigonométrique, ce qui nous permet d'écrire

$$z_1^{10} = (-3z_2)^{10}\mathrm{e}^{-i10\times\frac{3\pi}{4}}$$

Compte tenu de la 2π-périodcité des fonctions cosinus et sinus :

$$\begin{aligned} z_1^{10} &= (-3z_2)^{10}\mathrm{e}^{-i2\times\frac{3\pi}{4}} \\ &= (-3z_2)^{10}\mathrm{e}^{-i\frac{3\pi}{2}} \\ &= (-3z_2)^{10}\mathrm{e}^{i\frac{\pi}{2}} \end{aligned}$$

Donc z_1^{10} est un imaginaire pure de partie imaginaire strictement positive.

Transformations planes et complexes.

Soient f et g les transformations complexes qui à tout point M d'affixe z du plan associent respectivement les points d'affixes $f(z) = -iz + 1 - i$ et $g(z) = -\overline{z}$.

9. f est

A. une translation.

B. une rotation.

C. une homothétie.

D. une réflexion.

Réponse C.

f est de la forme $f(z) = az + b$ avec $(a, b) \in \mathbb{C}$ et $|a| = 1$. Donc f est une homothétie.

10. g est une

A. une translation.

B. une rotation.

C. une homothétie.

D. une réflexion.

Réponse

La conjugaison est une symétrie par rapport à l'axe des abscisses. L'application opposée est une symétrie par rapport à l'origine du repère. La composée de ces deux application est donc une symétrie par rapport à l'axe des ordonnées.

11. L'affixe du point fixe de f est
    A. -1.
    B. 1.
    C. $-i$.
    D. i.

Réponse C.

$f(z) = z$ équivaut successivement à

$$\begin{aligned}
z &= -iz + 1 + i \\
z(1+i) &= 1 - i \\
z &= \frac{1-i}{1+i} \\
z &= \frac{(1-i)(1-i)}{(1+i)(1-i)} \\
z &= \frac{(1-i)^2}{1^2+1^2} \\
z &= \frac{1-2i-1}{2} \\
z &= -i
\end{aligned}$$

12. L'écriture complexe associée à$g \circ f$ est
    A. $-i\overline{z} - 1 - i$.
    B. $-i\overline{z} - 1 + i$.
    C. $i\overline{z} - 1 - i$.
    D. $i\overline{z} - 1 + i$.

Réponse A.

$$\begin{aligned} g \circ f(z) &= -(\overline{-iz + 1 - i}) \\ &= -(\overline{-i} \times \overline{z} + \overline{1 - i}) \\ &= -(i\overline{z} + 1 + i) \\ &= -i\overline{z} - 1 - i \end{aligned}$$

Logique.

13. Pour prouver que I est le milieu de $[AB]$, il suffit de prouver que
    A. pour tout point M : $\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} = 2\overrightarrow{MI}$.
    B. $AI = BI$.
    C. $\overrightarrow{AI} + \overrightarrow{IB} = \overrightarrow{AB}$.
    D. $\overrightarrow{AI}$ et $\overrightarrow{AB}$ sont colinéaires.

    Réponse A.

    Intuitivement : en dessinant nous voyons que la première proposition correspond à l'identité du parallélogramme, et que I est alors le centre d'un parallélogramme dont $[AB]$ est une diagonale.

    Démontrons le. I est milieu de $[AB]$ équivaut successivement à

$$\begin{aligned} \overrightarrow{AI} &= \frac{1}{2}\overrightarrow{AB} \\ 2\overrightarrow{AI} &= \overrightarrow{AB} \end{aligned}$$

    Avec la relation de Chasles

$$\begin{aligned} 2\overrightarrow{AM} + 2\overrightarrow{MI} &= \overrightarrow{AM} + \overrightarrow{MB} \\ 2\overrightarrow{MI} &= -\overrightarrow{AM} + \overrightarrow{MB} \\ 2\overrightarrow{MI} &= \overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} \end{aligned}$$

14. Pour que 4 points distincts A, B, C et D soient coplanaires, il est nécessaire
    A. que trois de ces points soient alignés.
    B. que les droites (AB) et $CD)$ soient parallèles ou sécantes.
    C. de trouver un réel α tel que $\overrightarrow{AD} = \alpha(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC})$.

D. aucune des 3 réponses précédentes.

Réponse B.

C'est un résultat de cours dans l'espace à 3 dimensions deux droites sont coplanaires si et seulement si elles sont parallèles ou sécante. En particulier nous retrouvons bien l'implication.

15. Si a et b sont irrationnels, alors forcément

A. $a+b$ est irrationnel.

B. ab est irrationnels.

C. a^2 est irrationnel.

D. aucune des trois réponses précédentes.

Réponse

Montrons avec des contre-exemples que les trois premières propositions sont inexactes.
$a=\sqrt{2}$ et $b=-\sqrt{2}$ sont irrationnels et pourtant $a=b=0$ est rationnel.
$a=b=\sqrt{2}$ sont irrationnels et pourtant $ab=a^2=2$ est rationnel.

16. Si f est définie en a alors nécessairement

A. f est continue en a.

B. $\ln(f)$ est définie en a.

C. $\frac{1}{f}$ est définie en a.

D. $\frac{1}{\mathrm{e}^f}$ est définie en a.

Réponse D.

Montrons que les trois premières propositions sont inexactes.
La fonction partie entière est définie pour tout réel mais n'est pas continue en 1 (par exemple).
Ne sachant pas si $f(a)$ est strictement positive, nous ne pouvons affirmer que $\ln(f)$ est définie en a.
Ne sachant pas si $f(a)$ est non nul, nous ne pouvons affirmer que $\frac{1}{f}$ est définie en a.

Équations et inéquations dans $\mathbb{R}$.

17. $x^4 - x^2 - 6 = 6$ admet dans $\mathbb{R}$
    A. 0 solutions.
    B. 1 ou 3 solutions.
    C. 2 solutions.
    D. 4 solutions.

    Réponse C.

    On effectue le changement de variable $Y = x^2$. L'équation devient alors

    $$Y^2 - Y - 12 = 0$$

    C'estune équation du second degré. Recherche du disciminant

    $$\Delta = b^2 - 4ac = 25$$

    donc l'équation admet deux solutions réelles distinctes Y_1 et Y_2.

    $$Y_1 = \frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{1-\sqrt{25}}{2\times 1} = -1 \qquad Y_2 = \frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{1+\sqrt{25}}{2\times 1} = 3$$

    Donc

    $$(x^2 = -1) \text{ ou } (x^2 = 3)$$

    Finalement les solutions réelles sont donc $\sqrt{3}$ et $-\sqrt{3}$.

18. $|x^2 - x - 6| = 6$ admet dans $\mathbb{R}$
    A. 0 solutions.
    B. 1 ou 3 solutions.
    C. 2 solutions.
    D. 4 solutions.

    Réponse D.

    $$|x^2 - x - 6| = 6 \Leftrightarrow \begin{array}{c} x^2 - x - 6 = 6 \\ \text{ou} \\ -x^2 + x + 6 = 6 \end{array}$$

    La première équation du second degré a déjà été résolue et admet pour solutions : -1 et 3.

La seconde équation s'écrit

$$x(-x+1)=0$$

ses solutions sont donc 1 et 0.
L'ensemble des solutions de l'équation est $\{-1,3,1,0\}$.

19. $(\ln(x))^2-\ln(x)-6=6$ admet dans $\mathbb{R}$
    - A. 0 solutions.
    - B. 1 ou 3 solutions.
    - C. 2 solutions.
    - D. 4 solutions.

    Réponse 2.

    En effectuant le changement de variable $Z=\ln(x)$ on voit, avec les précédentes résolutions que $Z=-1$ ou $Z=3$. Autrement dit

    $$(\ln(x)=-1) \text{ ou } (\ln(x)=3)$$

    En composant de part et d'autre par la fonction exponentielle qui est définie sur $\mathbb{R}$

    $$(x=\mathrm{e}^{-1}) \text{ ou } (\mathrm{e}^{3})$$

20. $\ln(x^2)-\ln(x)-6=6$ admet dans $\mathbb{R}$
    - A. 0 solutions.
    - B. 1 ou 3 solutions.
    - C. 2 solutions.
    - D. 4 solutions.

    Réponse B.

    $$\ln(x^2)-\ln(x)-6=6 \Leftrightarrow 2\ln(x)-\ln(x)=12$$

    C'est une équation du premier degré d'inconnue $\ln(x)$. L'unique solution est $\ln(x)=12$. Autrement dit $x=\mathrm{e}^{12}$.

21. $x^2\mathrm{e}^{-x}=-1$ admet dans $\mathbb{R}$
    - A. 0 solution.
    - B. 1 solution.
    - C. 2 solution.

D. 3 ou 4 solutions.

Réponse A.

$x^2 e^{-x} \geq 0$ pour tout $x \in \mathbb{R}$.

22. $x^2 e^{-x} = 2e^{-2}$ admet dans $\mathbb{R}$
   A. 0 solution.
   B. 1 solution.
   C. 2 solutions.
   D. 3 ou 4 solutions.

Réponse D.

Étudions les variations de la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x^2 e^{-x} - 2e^{-2}$ pour tout x réel.
f est dérivable sur $\mathbb{R}$ et pour tout x réel

$$\begin{aligned} f'(x) &= 2xe^{-x} - x^2 e^{-x} \\ &= (2x - x^2)e^{-x} \\ &= x(2 - x)e^{-x} \end{aligned}$$

De plus

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = -2e^{-2}$$

et

$$\lim_{x \to -\infty} f(x) = +\infty$$

Nous en déduisons le tableau de variations de f

x	$-\infty$		0		2		$+\infty$
x		$-$	0	$+$		$+$	
$2-x$		$+$		$+$	0	$-$	
e^{-x}		$+$		$+$		$+$	
$f'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	
f	$+\infty$	$\searrow$	$-2e^{-2}$	$\nearrow$	$2e^{-2}$	$\searrow$	$-2e^{-2}$

Au vu du tableau de variation et f étant continue, d'après le théorème des valeurs intermédiaires, l'équation $f(x) = 0$ admet 3 solutions.

23. $\frac{1}{\mathrm{x}} > -\mathrm{e}^{-\frac{1}{3}}$ a pour solution dans $\mathbb{R}$

A. $]0, 3[$.

B. $]-\infty, -3[\cup]0, +\infty[$.

C. $\mathbb{R}$.

D. aucune des 3 réponses précédentes.

Réponse C.

Pour tout x réel $\frac{1}{\mathrm{x}} \geq 0 > -\mathrm{e}^{-\frac{1}{3}}$.

24. $\frac{1}{\mathrm{x}} > \mathrm{e}^{\frac{1}{3}}$ a pour solution dans $\mathbb{R}$

A. $]0, 3[$.

B. $]-\infty, -3[\cup]0, +\infty[$.

C. $\mathbb{R}$.

D. aucune des 3 réponses précédentes.

Réponse A.

Intuitivement exponentielle est strictement croissante et bijective donc l'inéquation équivaut à $\frac{1}{x} > \frac{1}{3}$.

Soit $x \in \mathbb{R}$.
$\mathrm{e}^{\frac{1}{x}} > \frac{1}{3}$ équivaut successivement à

$$\mathrm{e}^{\frac{1}{x}}\mathrm{e}^{-\frac{1}{3}} > 1$$
$$\mathrm{e}^{\frac{1}{x}-\frac{1}{3}} > 1$$

La fonction ln étant croissante sur $\mathbb{R}_+^*$

$$\ln\left[\mathrm{e}^{\frac{1}{x}-\frac{1}{3}}\right] > \ln(1)$$
$$\frac{1}{x} - \frac{1}{3} > 0$$
$$\frac{1}{x} > \frac{1}{3}$$
$$0 < x < 3$$

Équations dans $\mathbb{C}$.

25. La somme des solutions complexes de l'équation $z^4 - z^2 - 12 = 0$ est égale à
    A. 0.
    B. 1.
    C. -12.
    D. aucune des 3 réponses précédentes.

    Réponse A.

    Réponse rapide. Pour un polynôme unitaire (coefficient dominant égale 1), $P(X) = X^n + a_{n-1}X^{n-1} + \cdots + a_1 X + a_0$, $(-1)^n a_0$ est le produit des racines et $-a_{n-1}$ est la somme des racines (répétées autant de fois que l'indique leur degré de multiplicité). Donc la somme des racines est 0.

    Recherchons les solutions de l'équation.
    Procédons au changement de variable : $z^2 = Y$. L'équation s'écrit :

    $$Y^2 - Y - 12 = 0 \quad (*)$$

    Or

    $$\Delta = b^2 - 4ac = 49$$

    donc $(*)$ admet deux racines réelles distinctes :

    $$Y_1 = \frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{1-\sqrt{49}}{2\times 1} = -3 \qquad Y_1 = \frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{1+\sqrt{49}}{2\times 1} = 4$$

    D'où les racines de l'équation initiale : $\{-2, 2, -i\sqrt{3}, i\sqrt{3}\}$. La somme des racines est donc 0.

26. Le produit des solutions complexes de l'équation $z^4 - z^2 - 12 = 0$ est égale à
    A. 0.
    B. 1.
    C. -12.
    D. aucune des 3 réponses précédentes.

    Réponse C.

    Réponse rapide. Pour un polynôme unitaire (coefficient dominant égale 1), $P(X) = X^n + a_{n-1}X^{n-1} + \cdots + a_1 X + a_0$, $(-1)^n a_0$ est le produit des racines et $-a_{n-1}$ est la somme des racines (répétées autant de fois que l'indique leur degré de multiplicité). Donc la somme des racines est 0.

Recherchons les solutions de l'équation.
Procédons au changement de variable : $z^2 = Y$. L'équation s'écrit :

$$Y^2 - Y - 12 = 0 \quad (*)$$

Or

$$\Delta = b^2 - 4ac = 49$$

donc $(*)$ admet deux racines réelles distinctes :

$$\begin{aligned} Y_1 &= \frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a} \\ &= \frac{1-\sqrt{49}}{2\times 1} \\ &= -3 \end{aligned} \qquad \begin{aligned} Y_1 &= \frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a} \\ &= \frac{1+\sqrt{49}}{2\times 1} \\ &= 4 \end{aligned}$$

D'où les racines de l'équation initiale : $\{-2, 2, -i\sqrt{3}, i\sqrt{3}\}$. Le produit des racines est donc -12.

Dérivées et primitives.

27. Sur $\mathbb{R}^*$ la dérivée de $f : x \mapsto \frac{e^{\frac{1}{x}}}{x}$ est définie par $f'(x) =$

A. $\frac{-1}{x^2}e^{\frac{1}{x}}$.

B. $\frac{x+1}{x^3}e^{\frac{1}{x}}$.

C. $\frac{-x-1}{x^3}e^{\frac{1}{x}}$.

D. aucune des 3 réponses précédentes.

Réponse C.

f est dérivable sur $\mathbb{R}^*$ et, d'après les résultats la dérivée de fonctions composées, pour tout $x \in \mathbb{R}^*$

$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{-\frac{1}{x^2}e^{\frac{1}{x}} \times x - e^{\frac{1}{x}}}{x^2} \\ &= \frac{e^{\frac{1}{x}}\left(-\frac{1}{x} - 1\right)}{x^2} \\ &= \frac{\frac{-x-1}{x}e^{\frac{1}{x}}}{x^2} \\ &= \frac{-x-1}{x^3}e^{\frac{1}{x}} \end{aligned}$$

28. Sur $]-\infty, 0[$ une primitive F de $x \mapsto \ln(-x)$ est définie par $F(x) =$
   A. $x\ln(-x) - x$.
   B. $x\ln(-x) + x$.
   C. $-x\ln(-x) - x$.
   D. $-x\ln(-x) + x$.

   Réponse A.

   Notons $g(x) = x\ln(-x) - x$
   g est dérivable sur $]-\infty, 0[$ et

$$\begin{aligned} g'(x) &= x\left(-\frac{1}{-x}\right) + 1 \times \ln(-x) - 1 \\ &= 1 + \ln(-x) - 1 \\ &= f(x) \end{aligned}$$

29. Sur $\left[-\pi, -\frac{\pi}{2}\right[$ la primitive F de $x \mapsto \tan(x)$ telle que $F(-\pi) = 0$ est définie par $F(x) =$
   A. $\ln(\cos(x))$.
   B. $\ln(-\cos(x))$.
   C. $-\ln(\cos(x))$.
   D. $-\ln(-\cos(x))$.

   Réponse D.

   La condition $F(-\pi) = 0$ impose que la réponse soit B ou D.
   Puis nous vérifions avec la règle de dérivation des fonctions composées que la fonction $h : x \mapsto -\ln(-\cos(x))$ convient :

$$\begin{aligned} h'(x) &= -\left[-(-\sin(x)) \times \frac{1}{-\cos(x)}\right] \\ &= \frac{\sin(x)}{\cos(x)} \\ &= \tan(x) \end{aligned}$$

30. Sachant que sur $\mathbb{R}$: $f''(x) = -f(x)$ alors f ne peut pas être égale à
   A. 0.
   B. e^{-x}.
   C. $\cos(x)$.
   D. $\sin(x)$.

   Réponse B.

   La dérivée seconde de $x \mapsto \mathrm{e}^{-x}$ est $x \mapsto \mathrm{e}^{-x}$ et non son opposée.

Intégrales.

31. $\int_1^{-1} x\mathrm{e}^{-x^2}\ \mathrm{d}x =$
   A. $\frac{-2}{\mathrm{e}}$.
   B. $\left(\frac{\mathrm{e}-1}{\mathrm{e}}\right)$.
   C. $-\left(\frac{\mathrm{e}-1}{\mathrm{e}}\right)$
   D. aucune des 3 réponses précédentes.

   Réponse D.

   La fonction $f : x \mapsto x{-}\mathrm{x}^2$ est impaire (symétrie de la courbe représentative de la fonction par rapport à l'origine du repère)

$$f(-x) = -x\mathrm{e}^{-(-x)^2} = -x{-}\mathrm{x}^2 = -f(x)$$

   Donc
$$\int_1^0 x\mathrm{e}^{-x^2}\ \mathrm{d}x = -\int_0^{-1} x\mathrm{e}^{-x^2}\ \mathrm{d}x$$

   Et enfin, d'après la relation de Chasles

$$\int_1^{-1} x\mathrm{e}^{-x^2}\ \mathrm{d}x = 0$$

32. $\int_{-1}^{1} x^2\mathrm{e}^{-x}\ \mathrm{d}x =$
   A. 0.
   B. $\mathrm{e}^{-1} - \mathrm{e}$.
   C. $\frac{\mathrm{e}-\mathrm{e}^{-1}}{3}$.
   D. $\mathrm{e} - 5\mathrm{e}^{-1}$.

   Réponse D.

   Les fonctions considérées sont de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[-1, 1]$ nous pouvons donc intégrer par parties en choisissant

$u(x) = x^2$	$u'(x) = 2x$
$v'(x) = \mathrm{e}^{-x}$	$v(x) = -\mathrm{e}^{-x}$

nous obtenons

$$\begin{aligned}\int_{-1}^{1} x^2 e^{-x}\, dx &= \left[x^2(-e^{-x})\right]_{-1}^{1} - \int_{-1}^{1} 2x(-e^{-x}\, dx \\ &= -e^{-1} + e + 2\int_{-1}^{1} xe^{-x}\, dx \\ &= -e^{-1} + e + 2\left[-(x+1)e^{-x}\right]_{-1}^{1} \\ &= -e^{-1} + e + 2\times(-2e^{-1}) \\ &= e - 5e^{-1}\end{aligned}$$

Équations différentielles.

Soient

$$(E): \quad y' - 2y = 2x + 5$$

et

$$(F): \quad y'' - 2y' = 2$$

33. Une solution de (E) est définie par $f(x) =$
    A. $e^{2x} - \frac{2x+5}{2}$.
    B. $e^{2x} + \frac{2x+5}{2}$.
    C. $-x - 3$.
    D. aucune des 3 réponses précédentes.

    Réponse C.

    Il suffit d'essayer les différentes propositions en commençant par la plus simple.

34. Une solution de (F) est défiie par $g(x) =$
    A. $-e^{2x} - 1$.
    B. $-e^{2x} - x$.
    C. 1.
    D. x.

    Réponse B.

    Il suffit d'essayer les différentes propositions en commençant par la plus simple.

35. $y : x \mapsto y(x) = -5\mathrm{e}^{2x} - x - 3$
   A. est solution de (E) et de (F).
   B. est solution de (E) mais pas de (F).
   C. est solution de (F) mais pas de (E).
   D. n'est solution ni de (E) ni de (F).

   Réponse A.

$$\begin{aligned} y'(x) &= -10\mathrm{e}^{2x} - 1 \\ y''(x) &= -20\mathrm{e}^{2x} \end{aligned}$$

   Donc :

$$\begin{aligned} y'(x) - 2y(x) &= -10\mathrm{e}^{2x} - 1 + 2 \times 5\mathrm{e}^{2x} + 2x + 6 \\ &= 2x + 5 \end{aligned}$$

   et

$$\begin{aligned} y''(x) - 2y'(x) &= -20\mathrm{e}^{2x} + 2 \times 10\mathrm{e}^{2x} + 2 \times 1 \\ &= 2 \end{aligned}$$

36. $y : x \mapsto y(x) = 3\mathrm{e}^{2x} - x + 3$
   A. est solution de (E) et de (F).
   B. est solution de (E) mais pas de (F).
   C. est solution de (F) mais pas de (E).
   D. n'est solution ni de (E) ni de (F).

   Réponse C.

$$\begin{aligned} y'(x) &= 6\mathrm{e}^{2x} - 1 \\ y''(x) &= 12\mathrm{e}^{2x} \end{aligned}$$

   Donc :

$$\begin{aligned} y'(x) - 2y(x) &= 6\mathrm{e}^{2x} - 1 - 6\mathrm{e}^{2x} + 2x - 6 \\ &= 2x - 7 \end{aligned}$$

   et

$$\begin{aligned} y''(x) - 2y'(x) &= 12\mathrm{e}^{2x} - 12\mathrm{e}^{2x} + 2 \\ &= 2 \end{aligned}$$

   Donc y est solution de (F) mais pas de(E).

Géométrie analytique dans l'espace.

Dans un repère orthonormal, on considère le plan P d'équation $2x-3y+z=-4$ et le point A de coordonnées $(2;-1;3)$.

37. Une équation cartésienne du plan passant pas A et parallèle à P est
    A. $2x-3y+z=4$.
    B. $-2x+3y-z=10$.
    C. $x-y-z=0$.
    D. aucune des 3 réponses précédentes.

    Réponse D.

    Recherchons les plans auxquels appartient A parmi ceux proposés.

$$\begin{gathered}2\times 2-3\times(-1)+1\times 3=10\\ -2\times 2+3\times(-1)-1\times 3=-10\\ 1\times 2-1\times(-1)-1\times 3=0\end{gathered}$$

    Donc si l'une des trois équations proposées convient ce ne peut être que la dernière. Un vecteur normal au plan dont c'est l'équation est $(1,-1,-1)$. Clairement (en raisonnant par l'absurde par exemple) nous vérifions que les vecteurs $(1,-1,-1)$ et $(2,-1,3)$ ne sont pas colinéaires. Or dans un espace à trois dimensions deux vecteurs orthogonaux à un même plan sont nécessairement colinéaires. le plan P et le plan d'équation $x-y-z=0$ ne sont pas parralèles.

38. Une équation cartésienne d'un plan passant par A et perpendiculaire à P est
    A. $\frac{1}{2}x-\frac{1}{3}y+z=\frac{13}{3}$.
    B. $y+3z=8$.
    C. $-x+2z=-4$.
    D. aucune des trois réponses précédentes.

    Réponse B.

    En remplaçant x, y et z par les coordonnées de A dans les trois équations nous vouyons que seules les deux premières conviennent.
    Deux plans de l'espace sont perpendiculaires si et seulement si leurs vecteurs normaux sont orthogonaux.
    Un vecteur normal à P est $\vec{n}(2,-3,1)$. Or c'est aussi un vecteur normal du plan de la proposition A. La proposition A ne convient donc pas.

Un vecteur normal au plan de la proposition B est $\vec{s}(0,1,3)$. Pour vérifier l'othogonalité de $\vec{n}$ et $\vec{s}$ calculons leur produit scalaire.

$$\begin{aligned}\vec{n}\cdot\vec{s} &= 2\times 0+(-3)\times 1+1\times 3\\ &= 0\end{aligned}$$

Les vecterus sont orthogonaux et donc les plans sont perpendiculaires.

39. La distance du point A au plan P est
    A. 14.
    B. $\sqrt{7}$.
    C. $\sqrt{14}$.
    D. aucune des 3 réponses précédentes.

    Réponse C.

    Soit H le projeté orthogonal de A sur P.
    Remarquons que $B(2,1,-5)\in P$ puisque ses coordonnées vérifient l'équation de P.
    $\vec{n}(2,-3,1)$ étant normal à P

    $$\frac{\vec{n}}{||\vec{n}||}\cdot\overrightarrow{AB}=AH$$

    Or

    $$\begin{aligned}\frac{\vec{n}}{||\vec{n}||}\cdot\overrightarrow{AB} &= \frac{1}{\sqrt{2^2+(-3)^2+1^2}}\cdot[2\times(2-2)+(-3)\times(-1-1)+1\times(3-(-5))]\\ &= \frac{1}{\sqrt{14}}\cdot 14\\ &= \sqrt{14}\end{aligned}$$

40. L'intersection du plan P avec la sphère de centre A et de rayon 3 est
    A. vide.
    B. un point.
    C. un cercle.
    D. aucune des 3 réponses précédentes.

    Réponse A.

    D'après la question précédente la distance de A à P est $\sqrt{14}$. Or le rayon de la sphère de centre A est $3=\sqrt{9}$, donc, la fonction racine carrée étant strictement croissante, il ny a pas de point commun au cercle et au plan.

Espace et vecteurs.

Soient A et B deux points distincts de l'espace l'ensemble des points M tels que

41. $||3\overrightarrow{MA} - 5\overrightarrow{MB}|| = ||5\overrightarrow{MA} - 3\overrightarrow{MB}||$

    A. est une droite ou un cercle.

    B. est une sphère.

    C. est un plan.

    D. aucune des 3 réponses précédentes.

    Réponse

$$\begin{aligned} ||3\overrightarrow{MA} - 5\overrightarrow{MB}|| &= \sqrt{(3\overrightarrow{MA} - 5\overrightarrow{MB})^2} \\ &= \sqrt{9MA^2 - 30\overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{MB} + 25MB^2} \end{aligned}$$

    et

$$\begin{aligned} ||5\overrightarrow{MA} - 3\overrightarrow{MB}|| &= \sqrt{(5\overrightarrow{MA} - 3\overrightarrow{MB})^2} \\ &= \sqrt{25MA^2 - 30\overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{MB} + 9MB^2} \end{aligned}$$

    Donc

$$||3\overrightarrow{MA} - 5\overrightarrow{MB}|| = ||5\overrightarrow{MA} - 3\overrightarrow{MB}|| \Leftrightarrow MA = MB$$

    L'ensemble des points M est donc la médiatrice de $[AB]$.

42. $||3\overrightarrow{MA} - 5\overrightarrow{MB}|| = ||5\overrightarrow{MB} - 3\overrightarrow{MA}||$

    A. est une droite ou un cercle.

    B. est une sphère.

    C. est un plan.

    D. aucune des trois réponses précédentes.

    Réponse D.

    Soit I le milieu de $[AB]$.

$$\begin{aligned} 3\overrightarrow{MA} - 5\overrightarrow{MB} &= 3\overrightarrow{MI} + 3\overrightarrow{IA} - 5\overrightarrow{MI} - 5\overrightarrow{IB} \\ &= -2\overrightarrow{MI} - 8\overrightarrow{IB} \end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned}5\overrightarrow{MB} - 3\overrightarrow{MA} &= 5\overrightarrow{MI} + 5\overrightarrow{IB} - 3\overrightarrow{MI} - 3\overrightarrow{IA} \\ &= 2\overrightarrow{MI} + 8\overrightarrow{IB}\end{aligned}$$

donc $||3\overrightarrow{MA} - 5\overrightarrow{MB}|| = ||5\overrightarrow{MB} - 3\overrightarrow{MA}||$ si et seulement si

$$||2\overrightarrow{MI} + 8\overrightarrow{IB}|| = || - 2\overrightarrow{MI} - 8\overrightarrow{IB}||$$

Ce qui est toujours vrai quelque soit M dans l'espace. L'ensemble des points vérifiant l'égalité est donc l'espace tout entier.

Suites arithmétiques et géométriques.

(u_n) étant une suite telle que $u_3 = -5$ et $u_6 = 40$.
Si (u_n) est arithmétique alors :

45. $u_3 + u_4 + \cdots + u_7 =$
    (a) 100
    (b) 200
    (c) 70
    (d) aucune des 3 réponses précédentes.

(u_n) arithmétique $\Leftarrow \exists r \in \mathbb{R},\ u_{n=1} = r + u_n$.
Donc : $u_6 = r + u_5 = 2r + u_4 = 3r + u_3$
i.e. $40 = 3r - 5$. Ainsi : $r = 15$.
$\sum i = 3^7 u_i = \sum i = 0^4 u_3 + ir = 5u_3 + r\sum_{i=0}^4 i = -25 + 15 \times \frac{(0+4)\times 5}{2} = 125$

46. $\mathrm{e}^{u_3}\mathrm{e}^{u_4}\ldots\mathrm{e}^{u_7} =$
    (a) e^{100}
    (b) e^{200}
    (c) e^{70}
    (d) aucune des 3 réponses précédentes.

$\mathrm{e}^{u_3}\mathrm{e}^{u_4}\ldots\mathrm{e}^{u_7} = \mathrm{e}^{u_3+u_4+\cdots+u_7} = \mathrm{e}^{125}$

Si (u_n) est géométrique alors :

47. $u_3 + u_4 + \cdots + u_7 =$

(a) $-\frac{165}{3}$

(b) 165

(c) 155

(d) aucune des 3 réponses précédentes.

(u_n) géométrique donc : $\exists q \in \mathbb{R},\ u_{n=1} = u_n$.
D'où : $u_6 = q^3 u_3$. Donc : $q = -2$.
$u_3 = -5,\ u_4 = 10,\ u_5 = -20,\ u_6 = 40,\ u_7 = -80$. Donc : $u_3 + u_4 + \cdots + u_7 = -55 = -\frac{165}{3}$

48. $\ln|u_3| + \ln|u_4| + \ldots \ln|u_7| =$

(a) $\ln\left(\frac{165}{3}\right)$

(b) $\ln(165)$

(c) $\ln(155)$

(d) aucune des 3 réponses précédentes.

$\ln|u_3| + \ln|u_4| + \ldots \ln|u_7| = \ln|u_3| \times |u_4| \cdots \times |u_7| = \ln|u_3 u_4 \ldots u_7| = \ln|u_3^5 \times q^{0+1+2+3+4}| = \ln(3\,200\,000)$