Notations

Dans tout le problème on désigne par $\mathbb{N}$ l'ensemble des entiers naturels, par $\mathbb{R}$ le corps des nombres réels et par $\mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{R})$ l'espace vectoriel des matrices à coefficients réels avec m lignes et n colonnes. Lorsque $m = n$, on écrira plus simplement $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ au lieu de $M_{n,n}(\mathbb{R})$.

On note $\mathscr{C}^k(I,F)$ l'espace vectoriel des applications de classe $\mathscr{C}^k$ sur l'intervalle I et à valeurs dans un espace vectoriel vectoriel normé F de dimension finie.

Pour $f \in \mathscr{C}^0([a,b],F)$, on notera $\displaystyle\int_a^b f(t)\mathrm{d}t$ l'intégrale de f sur $[a,b]$.

Notations et rappels sur les équations différentielles

Les équations différentielles étudiées par la suite sont définies pour des fonctions d'une variable x à valeurs dans l'intervalle $I = [0,1]$. Dans ce cadre, nous adoptons les définitions suivantes.

- *Une équation différentielle linéaire scalaire du premier ordre d'inconnue $y \in \mathscr{C}^1([0,1],\mathbb{R})$ est du type*

$$y' + uy = v \quad \text{avec } (u,v) \in \mathscr{C}^0([0,1],\mathbb{R})^2.$$

  La fonction v est le second membre de l'équation. Si $v = 0$, on dit que l'équation est homogène.

- *Une équation différentielle linéaire scalaire du deuxième ordre d'inconnue $y \in \mathscr{C}^2([0,1],\mathbb{R})$ est du type*

$$y'' + uy' + vy = w \quad \text{avec } (u,v,w) \in \mathscr{C}^0([0,1],\mathbb{R})^3.$$

  La fonction w est le second membre de l'équation. Si $w = 0$, on dit que l'équation est homogène.

- *Soit $n \geqslant 2$ un entier. Une équation différentielle linéaire matricielle du premier ordre d'inconnue $Y \in \mathscr{C}^1([0,1],\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R}))$ est du type*

$$Y' + UY = V \quad \text{avec } U \in \mathscr{C}^0([0,1],\mathcal{M}_n(\mathbb{R})) \text{ et } V \in \mathscr{C}^0([0,1],\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})).$$

  La fonction V est le second membre de l'équation. Si $V = 0$, on dit que l'équation est homogène.

Soient $U \in \mathscr{C}^0([0,1],\mathcal{M}_n(\mathbb{R}))$ et $V \in \mathscr{C}^0([0,1],\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R}))$. Pour $x_0 \in [0,1]$ et $Y_0 \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$, on appelle problème de Cauchy la recherche d'une fonction $Y \in \mathscr{C}^1([0,1],\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R}))$ vérifiant

$$\begin{cases} Y' + UY = V \\ Y(x_0) = Y_0 \end{cases} \tag{1}$$

Dans ce cadre, on rappelle le théorème de Cauchy pour les équations différentielles linéaires matricielles (aussi appelées vectorielles) du premier ordre, qui pourra être utilisé tout au long du sujet :

Théorème de Cauchy

Soient $U \in \mathscr{C}^0([0,1],\mathcal{M}_n(\mathbb{R}))$ et $V \in \mathscr{C}^0([0,1],\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R}))$, ainsi que $x_0 \in [0,1]$ et $Y_0 \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$.
Il existe une unique solution $Y \in \mathscr{C}^1([0,1],\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R}))$ définie sur $[0,1]$ du problème de Cauchy (1).

Présentation du problème de Sturm-Liouville

Par la suite, et jusqu'à la fin du problème, a, b, c et d désignent quatre réels fixés tels que $(a,b) \neq (0,0)$ et $(c,d) \neq (0,0)$.

- *On note $\mathscr{E}$ l'espace préhilbertien $\mathscr{C}^0([0,1],\mathbb{R})$ muni du produit scalaire $\langle f,g\rangle = \int_0^1 fg$. La norme associée est notée $\| \|_2$.*
- *On note $\mathscr{E}_2$ le sous-espace vectoriel de $\mathscr{E}$ constitué des fonctions g de $\mathscr{C}^2([0,1],\mathbb{R})$ telles que*

$$ag(0) + bg'(0) = 0 \text{ et } cg(1) + dg'(1) = 0.$$

Pour $p \in \mathscr{C}^0([0,1],\mathbb{R})$, on définit l'application linéaire

$$H_p : \left\{ \begin{array}{ccc} \mathscr{E}_2 & \longrightarrow & \mathscr{E} \\ y & \longmapsto & -y'' + py. \end{array} \right.$$

Par extension, et bien que H_p ne soit pas un endomorphisme (les espaces vectoriels de départ et d'arrivée sont distincts), on dit que le réel λ est une valeur propre de H_p s'il existe un élément y non nul de $\mathscr{E}_2$ vérifiant $H_p(y) = \lambda y$. Dans ce cas, y est un vecteur propre de H_p associé à λ et $\{y \in \mathscr{E}_2 \ / \ H_p(y) = \lambda y\}$ est le sous-espace propre de H_p associé à λ.

Enfin, pour $f \in \mathscr{E}$, on considère le problème de Sturm-Liouville, d'inconnue $y \in \mathscr{C}^2([0,1],\mathbb{R})$

$$\begin{cases} -y'' + py = f \\ ay(0) + by'(0) = 0 \\ cy(1) + dy'(1) = 0. \end{cases} \qquad SL_p(f)$$

Ainsi, $y \in \mathscr{C}^2(0,1],\mathbb{R})$ est une solution du problème $SL_p(f)$ si et seulement $y \in \mathscr{E}_2$ et si $H_p(y) = f$.

L'objectif de ce problème est d'étudier l'existence et/ou l'unicité de solutions du problème de Sturm-Liouville.

- *La partie **I** met en place des résultats classiques pour l'étude des équations différentielles linéaires.*
- *La partie **II** traite d'un exemple et pose le problème de l'existence et de l'unicité d'une solution à un problème de Sturm-Liouville explicite.*
- *Une étude spectrale de l'application H_p est proposée à la partie **III** et, lorsque cet opérateur est bijectif, une étude spectrale de l'inverse est menée en partie **V**.*
- *La partie **IV** étudie le problème de Sturm-Liouville lorsque l'application H_p est injective.*
- *La question initiale est traitée dans la partie **VI**, en lien avec le spectre de l'application H_p.*

I. Exercices préliminaires

Il s'agit de résultats classiques utiles par la suite. Bien entendu, ces résultats sont à établir, même s'ils apparaissent explicitement au programme du concours.

1. Les affirmations suivantes sont-elles vraies ou fausses ? On justifiera soigneusement les réponses.

(a) Affirmation : « la fonction $x \longmapsto \mathrm{e}^x - 4$, définie sur $\mathbb{R}$, est solution de l'équation différentielle $y' = y + 4$. »

C'est vrai. Cette fonction que nous notons f est bien dérivable sur $\mathbb{R}$ et pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f'(x) = \mathrm{e}^x = f(x) + 4$.

(b) Affirmation : « l'unique solution du système de Cauchy

$$\begin{cases} y' = y + 4 \\ y(0) = 1 \end{cases}$$

est la fonction $x \longmapsto \mathrm{e}^x - 4$, définie sur $\mathbb{R}$. »

C'est faux. Cette fonction f ne vérifie pas $f(0) = 1$.

(c) Affirmation : « l'équation différentielle $y' = y + 4$ possède une unique solution définie sur $\mathbb{R}$. »

C'est faux. Les fonctions $x \longmapsto \mathrm{e}^x - 4$ et $x \longmapsto -4$ sont deux solutions distinctes de cette équation différentielle.

(d) Affirmation : « l'ensemble des solutions de l'équation $y' = y+4$ est un sous-espace vectoriel de $\mathscr{C}^1(\mathbb{R}, \mathbb{R})$. »

C'est faux : la fonction nulle n'est pas solution de cette équation différentielle.

2. (a) On étudie l'équation différentielle scalaire homogène du premier ordre $y' + py = 0$, avec $p \in \mathscr{C}^0([0,1], \mathbb{R})$.

En considérant, pour $y \in \mathscr{C}^1([0,1], \mathbb{R})$, la fonction $z : x \longmapsto y(x)e^{\int_0^x p(t)\mathrm{d}t}$, déterminer l'ensemble des solutions de cette équation différentielle.

Comme p est continue, la fonction $x \longmapsto \displaystyle\int_0^x p(t)\mathrm{d}t$ est dérivable sur $[0,1]$ et sa dérivée est p. On en déduit immédiatement que z est dérivable sur $[0,1]$ et que pour tout $x \in [0,1]$,

$$z'(x) = y'(x)e^{\int_0^x p(t)\mathrm{d}t} + y(x)p(x)e^{\int_0^x p(t)\mathrm{d}t} = (y'(x) + p(x))e^{\int_0^x p(t)\mathrm{d}t}.$$

Par suite,

$$\begin{aligned} y \text{ est solution de } y' + py = 0 &\iff \forall x \in [0,1],\ p'(x) + p(x)y(x) = 0 \\ &\iff \forall x \in [0,1],\ z'(x) = 0 \\ &\iff \exists \alpha \in \mathbb{R},\ \forall x \in [0,1],\ z(x) = \alpha \\ &\iff \exists \alpha \in \mathbb{R},\ \forall x \in [0,1],\ y(x) = \alpha e^{-\int_0^x p(t)\mathrm{d}t} \end{aligned}$$

Ainsi, l'ensemble des solutions de $y' + py = 0$ est

$$\left\{x \longmapsto \alpha e^{-\int_0^x p(t)\mathrm{d}t} \mid \alpha \in \mathbb{R}\right\}.$$

(b) On considère à présent une équation différentielle scalaire du premier ordre $y' + py = f$, avec $(p, f) \in \mathscr{C}^0([0,1],\mathbb{R})^2$.

En considérant, pour $y \in \mathscr{C}^1([0,1],\mathbb{R})$, la fonction $z : x \longmapsto y(x)e^{\int_0^x p(t)\mathrm{d}t}$, établir que les solutions de l'équation sont les fonctions du type

$$y : x \longmapsto \alpha e^{-\int_0^x p(t)\mathrm{d}t} + \int_0^x f(u)e^{\int_x^u p(t)\mathrm{d}t}\mathrm{d}u$$

où α est une constante réelle arbitraire.

Nous avons montré à la question précédente que z est dérivable sur $[0,1]$ et donné sa dérivée. On en déduit que

$$\begin{aligned}
&y \text{ est solution de } y' + py = f\\
&\iff \forall x \in [0,1],\ p'(x) + p(x)y(x) = f(x)\\
&\iff \forall x \in [0,1],\ z'(x) = f(x)e^{\int_0^x p(t)\mathrm{d}t}\\
&\iff \exists \alpha \in \mathbb{R},\ \forall x \in [0,1],\ z(x) = \alpha + \int_0^x f(u)e^{\int_0^u p(t)\mathrm{d}t}\mathrm{d}u\\
&\iff \exists \alpha \in \mathbb{R},\ \forall x \in [0,1],\ y(x) = \alpha e^{-\int_0^x p(t)\mathrm{d}t} + e^{-\int_0^x p(t)\mathrm{d}t}\int_0^x f(u)e^{\int_0^u p(t)\mathrm{d}t}\mathrm{d}u\\
&\iff \exists \alpha \in \mathbb{R},\ \forall x \in [0,1],\ y(x) = \alpha e^{-\int_0^x p(t)\mathrm{d}t} + \int_0^x e^{-\int_0^x p(t)\mathrm{d}t} f(u)e^{\int_0^u p(t)\mathrm{d}t}\mathrm{d}u\\
&\iff \exists \alpha \in \mathbb{R},\ \forall x \in [0,1],\ y(x) = \alpha e^{-\int_0^x p(t)\mathrm{d}t} + \int_0^x f(u)e^{-\int_0^x p(t)\mathrm{d}t + \int_0^u p(t)\mathrm{d}t}\mathrm{d}u\\
&\iff \exists \alpha \in \mathbb{R},\ \forall x \in [0,1],\ y(x) = \alpha e^{-\int_0^x p(t)\mathrm{d}t} + \int_0^x f(u)e^{\int_x^u p(t)\mathrm{d}t}\mathrm{d}u,
\end{aligned}$$

ce qui donne le résultat annoncé.

Jusqu'à la fin de cette partie, pour p un élément de $\mathscr{C}^1([0,1],\mathbb{R})$, q et f des éléments de $\mathscr{C}^0([0,1],\mathbb{R})$, on considère les équations différentielles linéaires

$$y'' + py' + qy = f \qquad (E) \qquad\qquad y'' + py' + qy = 0 \qquad (EH)$$

$$\begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \end{pmatrix}' + \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ q & p \end{pmatrix}\begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ f \end{pmatrix} \qquad (S) \qquad\qquad \begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \end{pmatrix}' + \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ q & p \end{pmatrix}\begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \end{pmatrix} = 0 \qquad (SH).$$

On note $\mathscr{S}(E)$, $\mathscr{S}(EH)$, $\mathscr{S}(S)$ et $\mathscr{S}(SH)$ les ensembles des solutions de (E), (EH), (S) et (SH) respectivement.

3. (a) Vérifier que si y est solution de (E), alors $\begin{pmatrix} y \\ y' \end{pmatrix}$ est solution de (S).

Si y est solution de (E), alors

$$\begin{pmatrix} y \\ y' \end{pmatrix}' + \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ q & p \end{pmatrix}\begin{pmatrix} y \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y' \\ y'' \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ q & p \end{pmatrix}\begin{pmatrix} y \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y' - y' \\ y'' + qy + py' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ f \end{pmatrix},$$

donc $\begin{pmatrix} y \\ y' \end{pmatrix}$ est solution de (S).

(b) Réciproquement, montrer que si $\begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \end{pmatrix}$ est solution de (S), alors z_1 est solution de (E) et $z_2 = z_1'$.

Par hypothèse,

$$\begin{pmatrix} z_1' - z_2 \\ z_2' + qz_1 + pz_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ f \end{pmatrix},$$

donc $z_1' = z_2$ et $z_2' + qz_1 + pz_2 = f$. Ainsi $z_2 = z_1'$ et $z_1'' + qz_1 + pz_1 = f$ et z_1 est bien solution de (E).

4. En déduire le résultat fondamental pour les équations différentielles linéaires scalaires d'ordre deux suivant :

Pour $x_0 \in [0,1]$ et $(\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2$, il existe une unique solution de (E) vérifiant $y(x_0) = \alpha$ et $y'(x_0) = \beta$.

Existence. Par le théorème de Cauchy, (S) possède une solution $\begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \end{pmatrix}$ telle que $z_1(0) = \alpha$ et $z_2(0) = \beta$. Par la question 3. (b), z_1 est solution de (E) et de plus, $z_2 = z_1'$. Donc $z_1(0) = \alpha$ et $z_1'(0) = \beta$.

Unicité. Soient y_1 ety_2 deux solution de (E) telle que $y_1(0) = y_2(0) = \alpha$ et $y_1'(0) = y_2'(0) = \beta$. Alors $\begin{pmatrix} y_1 \\ y_1' \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} y_2 \\ y_2' \end{pmatrix}$ sont deux solutions de (S) d'après la question 3.(a) et vérifient toutes les deux $z_1(0) = \alpha$ et $z_2(0) = \beta$. D'après le théorème de Cauchy, $\begin{pmatrix} y_1 \\ y_1' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y_2 \\ y_2' \end{pmatrix}$ et donc $y_1 = y_2$.

5. (a) Établir que l'ensemble $\mathscr{S}(EH)$ des solutions de (EH) est un sous-espace vectoriel de $\mathscr{E}$ de dimension 2.

L'ensemble $\mathscr{S}(EH)$ est le noyau de l'application linéaire $y \longmapsto y'' + py' + qy$ définie de $\mathscr{C}^2([0,1], \mathbb{R})$ dans $\mathscr{C}^0([0,1], \mathbb{R})$: il s'agit donc d'un sous-espace de $\mathscr{C}^2([0,1], \mathbb{R})$.

On considère l'application

$$\left\{ \begin{array}{rcl} \mathscr{S}(EH) & \longrightarrow & \mathbb{R}^2 \\ y & \longmapsto & \begin{pmatrix} y(0) \\ y'(0) \end{pmatrix} \end{array} \right. .$$

Elle est évidemment linéaire et, d'après la question 4, elle est bijective. Donc $\mathscr{S}(EH)$ et $\mathbb{R}^2$ ont la même dimension, c'est-à-dire 2.

(b) Montrer que l'ensemble des solutions de (E) est un sous-espace affine de $\mathscr{E}$ de direction $\mathscr{S}(EH)$.

D'après la question 4, $\mathscr{S}(E)$ est non vide. Soit $y_0 \in \mathscr{S}(E)$. Pour tout $y \in \mathscr{C}^2([0,1], \mathbb{R})$,

$$\begin{aligned} y \in \mathscr{S}(E) &\iff y'' + py' + qy = f \\ &\iff y'' + py' + qy = y_0'' + py_0' + qy_0 \\ &\iff (y - y_0)'' + p(y - y_0)' + q(y - y_0) = 0 \\ &\iff y - y_0 \in \mathscr{S}(EH). \end{aligned}$$

Donc $\mathscr{S}(E)$ est le sous-espace affine de $\mathscr{E}$ de direction $\mathscr{S}(EH)$ et passant par y_0.

(c) Pour tout couple de solutions (y_1, y_2) de (EH), on définit le wronskien w de ce couple de solutions par

$$\forall x \in [0,1],\ w(x) = \begin{vmatrix} y_1(x) & y_2(x) \\ y_1'(x) & y_2'(x) \end{vmatrix}.$$

Montrer que les conditions suivantes sont équivalentes :

i. (y_1, y_2) est une base de $\mathscr{S}(EH)$.

ii. Pour tout $x \in [0,1]$, $w(x)$ est non nul.

iii. Il existe $x \in [0,1]$ tel que $w(x)$ est non nul.

Indication : on pourra travailler sur le système (SH) équivalent à (EH).

i. $\Longrightarrow$ *ii.* On raisonne par contraposée. S'il existe $x \in [0,1]$ tel que $w(x) = 0$, alors $\left(\begin{pmatrix} y_1(x) \\ y_1'(x) \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} y_2(x) \\ y_2'(x) \end{pmatrix}\right)$ est liée dans $\mathscr{S}(SH)$. Il existe $(u,v) \in \mathbb{R}^2 - \{(0,0)\})$ tel que $u \begin{pmatrix} y_1(x) \\ y_1'(x) \end{pmatrix} + v \begin{pmatrix} y_2(x) \\ y_2'(x) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$. Par unicité de la solution du problème de Cauchy, la fonction $uy_1 + vy_2$ est donc nulle sur $[0,1]$ et (y_1, y_2) est une famille liée.

ii. $\Longrightarrow$ *iii.* Évident.

iii. $\Longrightarrow$ *i.* On raisonne par contraposée. Supposons qu' il existe $(u,v) \in \mathbb{R}^2 - \{(0,0)\}$ tel que $u \begin{pmatrix} y_1 \\ y_1' \end{pmatrix} + v \begin{pmatrix} y_2 \\ y_2' \end{pmatrix}$ soit la fonction nulle. Alors, pour tout $x \in [0,1]$, $w(x) = 0$.

Un tel couple (y_1, y_2) de solutions de (EH) est appelé système fondamental de solutions de (EH).

6. On considère à nouveau l'équation avec second membre (E).
Montrer qu'il existe une fonction $u \in \mathscr{C}^2([0,1],]0, +\infty[)$ telle que la proposition suivante est vraie :
la fonction y est solution de (E) si et seulement si la fonction z définie par $y = uz$ est solution d'une équation du type $-z'' + rz = g$.
Les fonctions r et g seront explicitées à partir de p, q et f.
Analyse. Si u existe, alors si z vérifie $y = uz$, on obtient

$$y'' + py' + qy = uz'' + (2u' + pu)z' + (u'' + pu' + qu)z.$$

Il convient donc de prendre pour u une solution de l'équation différentielle $2u' + pu = 0$.
Synthèse. On choisit $u : t \longmapsto e^{-\frac{1}{2}\int_0^t p(x)\mathrm{d}x}$. Cette fonction est strictement positive sur $[0,1]$, de classe $\mathscr{C}^2$ et vérifie $2u' + pu = 0$. Par suite, si $y \in \mathscr{C}^2([0,1], \mathbb{R})$, on définit une fonction $z \in \mathscr{C}^2([0,1], \mathbb{R})$ par $y = uz$ et, de plus,

$$y'' + py' + qy = uz'' + (2u' + pu)z' + (u'' + pu' + qu)z = uz'' + (u'' + pu' + qu)z,$$

donc y est solution de (E) si et seulement si z est solution de $-z'' + rz = g$, avec $r = -\dfrac{u'' + pu' + qu}{u}$ et $g = -\dfrac{f}{u}$.

7. Établir que le wronskien $w = y_1 y_2' - y_1' y_2$ d'un système fondamental de solutions (y_1, y_2) d'une équation du type $-y'' + py = 0$ est une fonction constante non nulle.
C'est un calcul direct : $w = y_1 y_2' - y_1' y_2$ et donc $w' = y_1 y_2'' - y_1'' y_2 = p(y_1 y_2 - y_1 y_2) = 0$. Le wronskien est donc constant sur $[0,1]$ et nécessairement non nul d'après la question 5.(c).

Ainsi, la résolution d'une équation telle que (E) est équivalente à la résolution d'une équation du type $-y'' + py = f$. C'est cette équation réduite qui sera étudiée par la suite.

II. Étude d'un exemple d'équation de Sturm-Liouville

Dans cette partie, exceptée la dernière question, on étudie le problème de Sturm-Liouville $SL_p(f)$ dans le cas particulier $p = 0$, $a = c = 1$ et $b = d = 0$:

$$\begin{cases} -y'' = f \\ y(0) = 0 \\ y(1) = 0. \end{cases} \qquad SL_0(f)$$

8. Déterminer la solution y_1 de l'équation différentielle $y'' = 0$ vérifiant $y_1(0) = 0$ et $y_1'(0) = 1$. De même, déterminer la solution y_2 de $y'' = 0$ vérifiant $y_2(1) = 0$ et $y_2'(1) = -1$.
On obtient immédiatement $y_1 : x \longrightarrow x$ et $y_2 : x \longrightarrow 1 - x$.

9. Vérifier que (y_1, y_2) est un système fondamental de solutions de $y'' = 0$ vérifiant

$$\forall x \in [0,1],\ \ y_1'(x)y_2(x) - y_1(x)y_2'(x) = 1$$

Par un calcul direct, pour tout $x \in [0,1]$,

$$y_1'(x)y_2(x) - y_1(x)y_2'(x) = 1(1-x) - x(-1) = 1.$$

10. On pose

$$K_0(x,t) = \begin{cases} y_2(x)y_1(t) & \text{si } 0 \leqslant t \leqslant x \leqslant 1, \\ y_1(x)y_2(t) & \text{si } 0 \leqslant x < t \leqslant 1. \end{cases}$$

Pour $f \in \mathscr{E}$, on définit $\Phi(f)$ sur $[0,1]$ par

$$\forall x \in [0,1],\ \ \Phi(f)(x) = \int_0^1 K_0(x,t)f(t)\mathrm{d}t.$$

Établir que $\Phi(f)$ est l'unique solution de $SL_0(f)$.
Unicité. Si z_1 et z_2 sont deux solutions de $SL_0(f)$, alors $z = z_1 - z_2$ vérifie $z'' = 0$, donc est un polynôme de degré $\leqslant 2$. De plus, $z(0) = z(1) = 0$: comme z possède au moins deux racines, $z = 0$, donc $z_1 = z_2$.
Existence. Pour tout $x \in [0,1]$,

$$\begin{aligned} \Phi(f)(x) &= \int_0^x y_2(x)y_1(t)f(f)\,\mathrm{d}t + \int_x^1 y_1(x)y_2(t)f(t)\,\mathrm{d}t \\ &= y_2(x)\int_0^x y_1(t)f(f)\,\mathrm{d}t - y_1(x)\int_1^x y_2(t)f(t)\,\mathrm{d}t. \end{aligned}$$

Comme y_1, y_2 et f sont continues, par le théorème fondamental de l'analyse $\Phi(f)$ est dérivable et pour tout $x \in [0,1]$,

$$\begin{aligned}\Phi(f)'(x) &= y_2'(x)\int_0^x y_1(t)f(f)\,\mathrm{d}t + y_2(x)y_1(x)f(x) - y_1'(x)\int_1^x y_2(t)f(t)\,\mathrm{d}t - y_1(x)y_2(x)f(x)\\ &= y_2'(x)\int_0^x y_1(t)f(f)\,\mathrm{d}t - y_1'(x)\int_1^x y_2(t)f(t)\,\mathrm{d}t.\end{aligned}$$

De nouveau par le théorème fondamental de l'analyse $\Phi(f)'$ est dérivable et pour tout $x \in [0,1]$,

$$\begin{aligned}\varphi(f)''(x) &= y_2''(x)\int_0^x y_1(t)f(f)\,\mathrm{d}t + y_2'(x)y_1(x)f(x) - y_1''(x)\int_1^x y_2(t)f(t)\,\mathrm{d}t - y_1'(x)y_2(x)f(x)\\ &= (y_2'(x)y_1(x) - y_1'(x)y_2(x))f(x)\\ &= -f(x),\end{aligned}$$

car $y_1'' = y_2'' = 0$ et $y_2'y_1 - y_1'y_2 = -1$. De plus, comme $y_1(0) = y_2(1) = 0$, $\Phi(f)(0) = \Phi(f)(1) = 0$.

On cherche à présent à résoudre ce même problème $SL_0(f)$ par une approche spectrale.
Sous les hypothèses définies dans cette partie, on a

$$\mathscr{E}_2 = \{g \in \mathscr{C}^2([0,1],\mathbb{R}) \mid g(0) = g(1) = 0\},$$

et

$$H_0 : \left\{\begin{array}{ccc}\mathscr{E}_2 & \longrightarrow & \mathscr{E}\\ g & \longmapsto & -g''.\end{array}\right.$$

Ainsi, $y \in \mathscr{C}^2([0,1],\mathbb{R})$ est une solution de $SL_0(f)$ si et seulement si y appartient à $\mathscr{E}_2$ et $H_0(y) = f$.

11. L'application H_0 est-elle injective ?

Soit $y \in \ker(H_0)$. Alors $y'' = 0$, donc y est un polynôme de degré au plus 2. Comme il appartient à $\mathscr{E}_2$, il s'annule en 0 et en 1, donc il est nul. Le noyau de H_0 est réduit à $\{0\}$, donc H_0 est injective.

12. Établir qu'il existe une suite de nombres réels $(\lambda_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ strictement croissante et de limite $+\infty$ tel que l'ensemble des valeurs propres de H_0 est $\{\lambda_n \mid n \in \mathbb{N}^*\}$.

On explicitera la valeur de λ_n ainsi qu'un vecteur propre associé φ_n vérifiant $\|\varphi_n\|_2 = 1$ et $\varphi_n'(0) > 0$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.

Soit $\lambda \in \mathbb{R}$ et $y \in \mathscr{E}_2$ tels que $H_0(y) = \lambda y$. Alors $y'' + \lambda y = 0$ et on connaît un système fondamental de solutions de cette équation différentielle :

- Si $\lambda < 0$, $y(x) = \alpha\,\mathrm{sh}(\sqrt{-\lambda}x) + \beta\,\mathrm{ch}(\sqrt{-\lambda}x)$ qui n'admet que la solution nulle dans $\mathscr{E}_2$.
- Si $\lambda = 0$, $y(x) = \alpha x + \beta$ qui n'admet que la solution nulle dans $\mathscr{E}_2$.
- Si $\lambda > 0$, $y(x) = \alpha\sin(\sqrt{\lambda}x) + \beta\cos(\sqrt{\lambda}x)$ qui admet pour solutions $y(x) = \alpha\sin(\sqrt{\lambda}x)$ dans $\mathscr{E}_2$, $\alpha \in \mathbb{R}$, et seulement si $y(1) = 0$.

Ainsi, les valeurs propres de H_0 sont les $\lambda_n = \pi^2 n^2$, $n \in \mathbb{N}^*$. De plus,

$$\int_0^1 \sin(\pi n t)^2\,\mathrm{d}t = \int_0^1 \frac{1-\cos(2\pi n t)}{2} = \left[\frac{t}{2} - \frac{\sin(2\pi n t)}{4\pi n}\right]_0^1 = \frac{1}{2}.$$

On normalise en posant $\varphi_n(x) = \sqrt{2}\sin(\pi n x)$.

13. Soit f un élément de $\mathscr{E}$. Montrer que l'unique solution y du problème $SL_0(f)$ est

$$y : x \longmapsto \alpha x - \int_0^x \left(\int_0^u f(t)\mathrm{d}t \right) \mathrm{d}u,$$

où α est une constante réelle que l'on déterminera en fonctions d'intégrales dépendant de f.
L'unicité se démontre comme dans la question 10. Par le théorème fondamental de l'analyse, f étant continue, y est deux fois dérivable et pour tout $x \in [0, 1]$,

$$y'(x) = \alpha - \int_0^x f(t)\,\mathrm{d}t, \qquad y''(x) = -f(x).$$

De plus, $y(0) = 0$ et pour $\alpha = \displaystyle\int_0^1 \left(\int_0^u f(t)\mathrm{d}t \right) \mathrm{d}u$, $y(1) = 0$. Donc y est solution de $SL_0(f)$.

14. Soit f un élément de $\mathscr{E}$. Pour $k \in \mathbb{N}^*$, on pose $a_k = \langle f, \varphi_k \rangle$.

(a) Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On note f_n la projection orthogonale de f sur le sous-espace vectoriel $F_n = \mathrm{Vect}(\varphi_k\,;\, 1 \leqslant k \leqslant n)$. Déterminer f_n en fonction des coefficients $(a_k)_{k\in\mathbb{N}^*}$.
La famille $(\varphi_k)_{k\in\mathbb{N}^*}$ est orthonormale et par suite $(\varphi_k)_{1\leqslant k\leqslant n}$ est une base orthonormale de F_n, d'où, $\forall n \in \mathbb{N}$, $f_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} a_k \varphi_k$.

(b) Pour $n \in \mathbb{N}^*$, établir que le problème $SL_0(f_n)$ admet une unique solution que l'on écrira à nouveau en fonction de $(a_k)_{k\in\mathbb{N}^*}$. On notera y_n cette solution.
On sait que si la solution existe, alors elle est unique (question 10). Cherchons y_n dans F_n sous la forme $y_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} u_k \varphi_k$. Alors $y_n(0) = y_n(1)$ et

$$y_n'' = \sum_{k=1}^{n} \pi^2 k^2 \varphi_k.$$

Par suite, on choisit $y_n = -\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{a_k}{\pi^2 k^2} \varphi_k$, qui convient.

(c) Vérifier que la suite $(y_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge uniformément vers une fonction $y \in \mathscr{E}$.
Pour $k \in \mathbb{N}^*$, obtient

$$\left\| \frac{a_k}{\pi^2 k^2} \varphi_k \right\|_\infty \leqslant \sqrt{2} \frac{|a_k|}{\pi^2 k^2}.$$

De plus,

$$|a_k| \leqslant \sqrt{2} \int_0^1 |f(t) \sin(\pi n t)|\,\mathrm{d}t \leqslant \sqrt{2} \|f\|_\infty,$$

d'où

$$\left\| \frac{a_k}{\pi^2 k^2} \varphi_k \right\|_\infty \leqslant 2 \frac{\|f\|_\infty}{\pi^2 k^2}.$$

On obtient la convergence normale sur $[0, 1]$ de la série de terme général $\dfrac{a_k}{\pi^2 k^2} \varphi_k$ et en conséquence sa convergence uniforme.

(d) Établir que y est la solution de $SL_0(f)$.

Par la question 13, pour tout $x \in [0,1]$, $y_n(x) = \alpha_n x - \int_0^x \left(\int_0^u f_n(v)dv\right)du$ avec $\alpha_n = \int_0^1 g_n(u)\mathrm{d}u$ où $g_n(u) = \int_0^u f_n(v)\mathrm{d}v$. On pose $g(u) = \int_0^u f(v)\mathrm{d}v$ et, pour $u \in [0,1]$,

$$|g_n(u) - g(u)| \leqslant \left(\int_0^u |f_n(v) - f(v)|^2\right)^{1/2} \leqslant \|f_n - f\|_2 = \left(\sum_{k=n+1}^{+\infty} |a_n|^2\right)^{1/2}$$

par inégalité de Cauchy-Schwarz, majoration puis égalité de Parseval. Par convergence uniforme, pour $x \in [0,1]$,

$$\lim_{n\to+\infty} \int_0^x \left(\int_0^u f_n(v)\mathrm{d}v\right)\mathrm{d}u = \int_0^x \left(\int_0^u f(v)dv\right)\mathrm{d}u.$$

Et en particulier pour $x = 1$, $(\alpha_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers $\alpha = \int_0^1 \left(\int_0^u f(v)dv\right)du$. Un passage à la limite donne

$$y = \alpha x - \int_0^x \left(\int_0^u f(v)\mathrm{d}v\right)\mathrm{d}u$$

qui est bien solution de $SL_0(f)$ par la question 13.

15. Dans cette question seulement, on pose $p_0 : x \longmapsto -\pi^2$, $a = c = 1$ et $b = d = 0$ et on s'intéresse au problème de Sturm-Liouville $SL_{p_0}(f)$ suivant :

$$\begin{cases} -y'' - \pi^2 y = f \\ y(0) = 0 \\ y(1) = 0. \end{cases}$$

On considère l'application linéaire

$$H_{p_0} : \begin{cases} \mathscr{E}_2 & \longrightarrow & \mathscr{E} \\ y & \longmapsto & -y'' - \pi^2 y. \end{cases}$$

(a) L'application H_{p_0} est-elle injective ?

Non, car $x \longmapsto \sin(\pi x)$ est dans le noyau de H_{p_0}.

(b) Déterminer explicitement les solutions y_1 et y_2 de l'équation homogène $y'' + \pi^2 y = 0$ vérifiant respectivement

$$\begin{cases} y_1(0) = 1 \\ y_1'(0) = 0 \end{cases} \qquad \text{et} \qquad \begin{cases} y_2(0) = 0 \\ y_2'(0) = \pi. \end{cases}$$

Vérifier qu'il s'agit d'un système fondamental de l'équation homogène.

On trouve immédiatement $y_1 : x \longmapsto \cos(\pi x)$ et $y_2 : x \longmapsto \sin(\pi x)$. Le wronskien de y_1 et y_2 est

$$w(x) = \pi\cos(\pi x)^2 + \pi\sin(\pi x)^2 = \pi.$$

Par la question 5.(c), (y_1, y_2) est un système fondamental de solutions.

(c) Pour $f \in \mathscr{E}$, on veut résoudre l'équation différentielle $y'' + \pi^2 y = -f$ par la méthode dite de variation des constantes.

Pour cela on s'appuie sur le système fondamental (y_1, y_2) obtenu à la question précédente. On cherche alors les solutions de $y'' + \pi^2 y = -f$ sous la forme

$$y = u_1 y_1 + u_2 y_2, \ \text{ avec } (u_1, u_2) \in \mathscr{C}^2([0,1], \mathbb{R})^2 \text{ vérifiant } u_1' y_1 + u_2' y_2 = 0.$$

Déterminer une solution particulière de l'équation $y'' + \pi^2 y = -f$ à l'aide d'une ou plusieurs intégrales dépendant de f, puis exprimer la solution générale de cette même équation.

On obtient

$$\begin{aligned}
y' &= u_1' y_1 + u_2' y_2 + u_1 y_1' + u_2 y_2' \\
&= u_1 y_1' + u_2 y_2', \\
y'' &= u_1' y_1' + u_1 y_1'' + u_2' y_2' + u_2 y_2'', \\
y'' + \pi^2 y &= u_1(y_1'' + \pi^2 y_1) + u_2(y_2'' + \pi^2 y_2) + u_1' y_1' + u_2' y_2' \\
&= u_1' y_1' + u_2' y_2'.
\end{aligned}$$

On résout donc le système

$$\begin{cases} y_1 u_1' + y_2 u_2' &= 0, \\ y_1' u_1' + y_2' u_2' &= -f. \end{cases}$$

Les formules de Cramer donnent

$$u_1' = \frac{\begin{vmatrix} 0 & y_2 \\ -f & y_2' \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} y_1 & y_2 \\ y_1' & y_2' \end{vmatrix}} = \frac{1}{\pi} f(x) \sin(\pi x),$$

$$u_2' = \frac{\begin{vmatrix} y_1 & 0 \\ y_1' f & -f \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} y_1 & y_2 \\ y_1' & y_2' \end{vmatrix}} = -\frac{1}{\pi} f(x) \cos(\pi x),$$

et finalement il existe $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ tels que pour tout $x \in [0,1]$,

$$\begin{aligned}
y(x) &= \alpha \cos(\pi x) + \beta \sin(\pi x) + \frac{\cos(\pi x)}{\pi} \int_0^x f(t) \sin(\pi t) \, \mathrm{d}t - \frac{\sin(\pi x)}{\pi} \int_0^x f(t) \cos(\pi t) \, \mathrm{d}t \\
&= \alpha \cos(\pi x) + \beta \sin(\pi x) + \frac{1}{\pi} \int_0^x f(t) \sin(\pi(t - x)) mathrmdt.
\end{aligned}$$

(d) Lorsque $f : x \longmapsto \cos(\pi x)$, établir que le problème de Sturm-Liouville $SL_{p_0}(f)$ admet plusieurs solutions que l'on précisera.

On résout d'abord l'équation différentielle en utilisant la question 15. (c).

$$\begin{aligned}
\int_0^x \cos(\pi t) \sin(\pi(t - x)) \mathrm{d}t &= \frac{1}{2} \int_0^x \sin(\pi(2t - x)) \, \mathrm{d}t + \frac{1}{2} \int_0^x \sin(\pi(-x)) \, \mathrm{d}t \\
&= -\frac{1}{4\pi} [\cos(\pi(2t - x))]_0^x - \frac{x \sin(\pi x)}{2} \\
&= -\frac{x \sin(\pi x)}{2}.
\end{aligned}$$

Les solutions de l'équations différentielles sont donc de la forme

$$x \longmapsto \alpha\cos(\pi x) + \beta\sin(\pi x) - \frac{x\sin(\pi x)}{2\pi}.$$

Pour une telle solution y,

$$\begin{cases} y(0) = 0 \\ y(1) = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} \alpha = 0 \\ -\alpha = 0. \end{cases}$$

Les solutions de $SL_{p_0}(f)$ sont donc les fonctions de la forme $x \longmapsto \beta\sin(\pi x) - \frac{x}{2\pi}\sin(\pi x)$ avec $\beta \in \mathbb{R}$.

(e) Lorsque $f : x \longmapsto \sin(\pi x)$, établir que le problème de Sturm-Liouville $SL_{p_0}(f)$ n'admet aucune solution.

On résout d'abord l'équation différentielle en utilisant la question 15. (c).

$$\begin{aligned}
\int_0^x \sin(\pi(t-x)) f\sin(\pi t)\mathrm{d}t &= \frac{1}{2}\int_0^x \cos(\pi(2t-x))\,\mathrm{d}t - \frac{1}{2}\int_0^x \cos(\pi(-x))\,\mathrm{d}t \\
&= \frac{1}{4\pi}\left[\sin(\pi(2t-x))\right]_0^x - \frac{x\cos(\pi x)}{2} \\
&= \frac{\sin(\pi x)}{2\pi} - \frac{x\cos(\pi x)}{2}.
\end{aligned}$$

Les solutions de l'équations différentielles sont donc de la forme

$$y(x) = \alpha\cos(\pi x) + \beta\sin(\pi x) - \frac{x\cos(\pi x)}{2\pi}.$$

Pour une telle solution y,

$$\begin{cases} y(0) = 0 \\ y(1) = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} \alpha = 0 \\ -\alpha = \dfrac{1}{2}. \end{cases}$$

Le problème de Cauchy $SL_{p_0}(f)$ n'a donc aucune solution.

III. Une étude spectrale de l'application H_p

On considère à présent le cas général où p est une fonction appartenant à $\mathscr{C}^0([0,1],\mathbb{R})$ et a, b, c, d sont quatre nombres réels tels que $(a,b) \neq (0,0)$ et $(c,d) \neq (0,0)$.

16. *Un calcul préliminaire.* Soit $y \in \mathscr{C}^1([0,1],\mathbb{R})$ et $\alpha > 0$.

(a) Établir l'inégalité

$$2\int_0^1 |y(t)y'(t)|\mathrm{d}t \leqslant \alpha\int_0^1 y(t)^2\mathrm{d}t + \frac{1}{\alpha}\int_0^1 y'(t)^2\mathrm{d}t.$$

Indication : On pourra remarquer que pour $\delta > 0$, pour tout $x \in [0,1]$, on a

$$\left(\delta|y(x)| - \frac{1}{\delta}|y'(x)|\right)^2 \geqslant 0.$$

On tire de l'indication que pour tout $\delta > 0$, pour tout $x \in [0,1]$,

$$\delta^2|y(x)|^2 + \frac{1}{\delta^2}|y'(x)|^2 \geqslant 2|y(x)y'(x)|.$$

On choisit alors $\delta = \sqrt{\alpha}$ et on intégre cette inégalité sur $[0,1]$.

(b) Vérifier l'égalité $y^2(0) + y^2(1) = -\int_0^1 z'(x)\mathrm{d}x$, où $z : x \longmapsto y^2(x)\cos(\pi x)$ et en déduire que pour tous réels u et v il existe une constante $C(u,v)$ telle que

$$uy^2(0) + vy^2(1) \leqslant C(u,v)\int_0^1 y(t)^2\mathrm{d}t + \int_0^1 y'(t)^2\mathrm{d}t.$$

Par le théorème fondamental de l'analyse,

$$-\int_0^1 z'(x)\,\mathrm{d}x = z(0) - z(1) = y^2(0) + y^2(1).$$

Il vient

$$\begin{aligned} y^2(0) + y^2(1) &= \pi\int_0^1 y^2(x)\sin(\pi x)\mathrm{d}x - 2\int_0^1 y(x)y'(x)\cos(\pi x)\mathrm{d}x \\ &\leqslant \pi\int_0^1 |y^2(x)\sin(\pi x)|\,\mathrm{d}x + 2\int_0^1 |y(x)y'(x)\cos(\pi x)|\,\mathrm{d}x \\ &\leqslant \pi\int_0^1 |y^2(x)|\,\mathrm{d}x + 2\int_0^1 |y(x)y'(x)|\,\mathrm{d}x \\ &\leqslant (\pi+\alpha)\int_0^1 |y^2(x)|\,\mathrm{d}x + \frac{1}{\alpha}\int_0^1 |y(x)y'(x)^2\,\mathrm{d}x, \end{aligned}$$

en utilisant la question 16. (a). Si $(u,v) \neq (0,0)$, on obtient

$$uy^2(0) + vy^2(1) \leqslant (|u|+|v|)(y^2(0)+y^2(1)) \leqslant C(u,v)\int_0^1 |y^2(x)|\,\mathrm{d}x + \int_0^1 |y'^2(x)|\,\mathrm{d}x$$

en choisissant $\alpha = (|u|+|v|)$ et $C(u,v) = (|u|+|v|)(\pi + (|u|+|v|))$. Enfin, $C(0,0) = 0$ convient.

17. Soient $\lambda \in \mathbb{R}$ et y dans $\mathscr{E}_2$ vérifiant $-y'' + py = \lambda y$.

(a) Établir l'égalité

$$y'(1)y(1) - y'(0)y(0) = \int_0^1 y'(t)^2\mathrm{d}t + \int_0^1 (p(t)-\lambda)y(t)^2\mathrm{d}t.$$

Comme $y'' = py - \lambda y$, $y''''y = (p-\lambda)y^2$. En intégrant par parties, y et y' étant de classe C^1,

$$\begin{aligned} \int_0^1 (p(t)-\lambda)y(t)^2\,\mathrm{d}t &= \int_0^1 y''(t)y(t)\,\mathrm{d}t \\ &= [y'(t)y(t)]_0^1 - \int_0^1 y'(t)^2\,\mathrm{d}t \\ &= y'(1)y(1) - y'(0)y(0) - \int_0^1 y'(t)^2\,\mathrm{d}t, \end{aligned}$$

ce qui implique immédiatement l'égalité demandée.

(b) En déduire l'existence d'une constante λ_0 dépendant de a, b, c, d, et de la fonction p, telle que, pour $\lambda < \lambda_0$, en posant $q : x \longmapsto p(x) - \lambda$, le problème $SL_q(0)$ n'a que l'application $y = 0$ comme solution. *Indication : on pourra traiter à part le cas $bd = 0$.*

Supposons dans un premier temps $bd \neq 0$. Il vient

$$\int_0^1 y'^2 + \int_0^1 (p-\lambda)y^2 = y'(1)y(1) - y'(0)y(0) \leqslant \left|\frac{c}{d}\right| y^2(1) + \left|\frac{a}{b}\right| y^2(0) \leqslant C \int_0^1 y^2 + \int_0^1 y'^2,$$

avec $C = C\left(\left|\frac{c}{d}\right|, \left|\frac{a}{b}\right|\right)$. Ainsi, $\int_0^1 (C - p(t) + \lambda)y^2(t)\,dt \geqslant 0$. On pose $\lambda_0 = -C - \|p\|_\infty$. Si $\lambda < \lambda_0$, pour tout $x \in [0,1]$, $C - p(x) + \lambda < 0$ et la seule solution possible dans $\mathscr{E}_2$ est $y = 0$. Si $bd = 0$, la méthode s'adapte immédiatement avec $y(0) = 0$ ou $y(1) = 0$.

On rappelle que H_p est l'application linéaire définie par

$$H_p : \left\{ \begin{array}{ccc} \mathscr{E}^2 & \longrightarrow & \mathscr{E} \\ y & \longmapsto & -y'' + py. \end{array} \right.$$

18. Montrer que H_p vérifie la relation de symétrie

$$\forall (y,z) \in \mathscr{E}_2^2,\ \ \langle H_p(y), z\rangle = \langle y, H_p(z)\rangle.$$

On obtient en intégrant par parties, y' et z étant de classe C^1,

$$\begin{aligned} \langle H_p(y), z\rangle &= -\int_0^1 y''(t)z(t)\,dt + \int_0^1 p(t)y(t)z(t)\,dt \\ &= -y'(1)z(1) + y'(0)z(0) + \int_0^1 y'(t)z't(t)\,dt + \int_0^1 p(t)y(t)z(t)\,dt. \end{aligned}$$

De même,

$$\begin{aligned} \langle y, H_p(z)\rangle &= -\int_0^1 y''(t)z(t)\,dt + \int_0^1 p(t)y(t)z(t)\,dt \\ &= -y(1)z'(1) + y(0)z'(0) + \int_0^1 y'(t)z't(t)\,dt + \int_0^1 p(t)y(t)z(t)\,dt \end{aligned}$$

et finalement

$$\langle H_p(y), z\rangle - \langle y, H_p(z)\rangle = (y'(0)z(0) - y(0)z'(0)) - (y'(1)z(1) - y(1)z'(1)).$$

Par hypothèse, $(y(0), y'(0))$ et $(z(0), z'(0))$ sont tous les deux colinéaires à $(-b, a)$ (car orthogonaux à (a,b)), donc sont colinéaires : $y'(0)z(0) - y(0)z'(0) = 0$. De même, $y'(1)z(1) - y(1)z'(1) = 0$. Finalement, $\langle H_p(y), z\rangle = \langle y, H_p(z)\rangle$.

19. Établir que deux sous-espaces propres associés à deux valeurs propres distinctes de H_p sont orthogonaux.

Si $\lambda \neq \mu$ sont deux valeurs propres distinctes associées aux vecteurs propres respectifs y et z, alors $\langle H_p(y), z\rangle = \lambda\langle y, z\rangle = \langle y, H_p(z)\rangle = \mu\langle y, z\rangle$ et comme $\lambda \neq \mu$, $\langle y, z\rangle = 0$.

20. Démontrer que tout sous-espace propre de H_p est de dimension 1.

Par construction, si λ est une valeur propre de H_p, la dimension du sous-espace propre associé est au moins 1. Si la dimension était supérieure ou égale à 2, alors on aurait deux solutions y_1 et y_2 de l'équation différentielle $-y'' + (p-\lambda)y = 0$ linéairement indépendantes dans $\mathscr{E}_2$. L'ensemble des solutions $\mathcal{S}_\lambda$ de cette équation différentielle linéaire d'ordre 2 étant un espace vectoriel de dimension 2, (y_1, y_2) est une base de $\mathcal{S}_\lambda$ et cet espace est donc inclus dans $\mathscr{E}_2$. On obtient que toute solution de $-y'' + (p-\lambda)y = 0$ vérifie $ay(0) + by'(0) = 0$. Or, par le théorème de Cauchy, il existe une solution vérifiant $y(0) = a$ et $y'(0) = b$, ce qui donne $a^2 + b^2 = 0$: ceci contredit $(a, b) \neq (0, 0)$. Donc les espaces propres de H_p sont de dimension 1.

IV. Fonction de Green

Dans toute cette partie, on considère une fonction $q \in \mathscr{C}^0([0,1], \mathbb{R})$ telle que le problème $SL_q(0)$ n'a que la fonction $y = 0$ comme solution.

On rappelle que a, b c et d sont des réels tels que $(a, b) \neq (0, 0)$ et $(c, d) \neq (0, 0)$.

21. Vérifier que l'application $H_q : \mathscr{E}_2 \longrightarrow \mathscr{E}$ est injective.

Par hypothèse, le noyau de H_q est nul.

22. (a) Établir l'existence de deux éléments non nuls y_1 et y_2 de $\mathscr{C}^2([0,1], \mathbb{R})$ tels que

$$\begin{cases} -y_1'' + qy_1 = 0 \\ ay_1(0) + by_1'(0) = 0 \end{cases} \qquad \text{et} \qquad \begin{cases} -y_2'' + qy_2 = 0 \\ cy_2(1) + dy_2'(1) = 0. \end{cases}$$

Indication : On pourra chercher à résoudre deux problèmes de Cauchy bien choisis.

On résout les deux problèmes de Cauchy

$$\begin{cases} -y'' + qy = 0, \\ y(0) = b, \\ yd'(0) = -a, \end{cases} \qquad \begin{cases} -y'' + qy = 0, \\ y(0) = d, \\ y'(0) = -c, \end{cases}$$

dont les solutions sont notées y_1 et y_2. Alors y_1 et y_2 conviennent et sont non nulles, puisque $(a, b) \neq (0, 0)$ et $(c, d) \neq (0, 0)$.

(b) Montrer qu'un tel couple (y_1, y_2) est un système fondamental de solution de $-y'' + qy = 0$ et qu'il est possible de choisir ce couple de sorte que

$$\forall x \in [0,1],\ w(x) = y_1(x)y_2'(x) - y_1'(x)y_2(x) = -1.$$

Supposons y_1 et y_2 colinéaires. Comme y_2 et y_1 sont non nuls, il existe $\alpha \in \mathbb{R}$ tel que $y_2 = \alpha y_1$. Par suite, $y_2 \in \mathscr{E}_2$ et $y_2 = 0$ par hypothèse sur H_q, ce qui est aboutit à une contradiction.

Le wronskien est constant et non nul (question 7), il suffit de multiplier y_1 par une constante non nulle adaptée pour obtenir un nouveau couple (y_1, y_2) de wronskien -1.

Jusqu'à la fin de cette partie, le couple (y_1, y_2) fait référence à un système fondamental de solutions de l'équation $-y'' + qy = 0$ tel que définis à la question 22.(b).

23. Soit f un élément de $\mathscr{E}$.

(a) Vérifier que les solutions de l'équation différentielle $-y'' + qy = f$ sont exactement les fonctions de la forme

$$y : x \longmapsto \left(\alpha + \int_x^1 f(t)y_2(t)\mathrm{d}t\right)y_1(x) + \left(\beta + \int_0^x f(t)y_1(t)\mathrm{d}t\right)y_2(x),$$

où (α, β) sont deux constantes réelles arbitraires. Déterminer une forme analogue pour la dérivée y' de la solution précédente y.

L'ensemble des solutions de cette équation différentielle est un espace affine de dimension 2, dont l'espace vectoriel sous-jacent a pour base (y_1, y_2). Pour le déterminer, il suffit de trouver une solution particulière. On considère

$$z \longmapsto y_1(x)\int_x^1 f(t)y_2(t)\,\mathrm{d}t + y_2(x)\int_0^x f(t)y_1(t)\,\mathrm{d}t.$$

Par le théorème fondamental de l'analyse, z est deux fois dérivable et pour tout $x \in [0,1]$,

$$\begin{aligned}
y'(x) &= y_1'(x)\int_x^1 f(t)y_2(t)\,\mathrm{d}t - y_1(x)y_2(x)f(x) + y_2'(x)\int_0^x f(t)y_1(t)\,\mathrm{d}t + y_2(x)y_1(x)f(x)\\
&= y_1'(x)\int_x^1 f(t)y_2(t)\,\mathrm{d}t + y_2'(x)\int_0^x f(t)y_1(t)\,\mathrm{d}t,\\
y''(x) &= y_1''(x)\int_x^1 f(t)y_2(t)\,\mathrm{d}t - y_1'(x)y_2(x)f(x) + y_2''(x)\int_0^x f(t)y_1(t)\,\mathrm{d}t + y_2'(x)y_1(x)f(x)\\
&= y_1''(x)\int_x^1 f(t)y_2(t)\,\mathrm{d}t + y_2''(x)\int_0^x f(t)y_1(t)\,\mathrm{d}t - f(x)\\
&= q(x)\left(y_1(x)\int_x^1 f(t)y_2(t)\,\mathrm{d}t + y_2(x)\int_0^x f(t)y_1(t)\,\mathrm{d}t\right) - f(x)\\
&= -q(x)y(x) - f(x).
\end{aligned}$$

Donc y est solution de $-y'' + qy = f$. Le résultat demandé en découle.

(b) En déduire que $SL_q(f)$ admet une unique solution y qui s'écrit sous la forme

$$y : x \longmapsto \int_0^1 K_q(x,t)f(t)\mathrm{d}t$$

où l'on a posé

$$K_q(x,t) = \begin{cases} y_1(t)y_2(x) & \text{si } 0 \leqslant t \leqslant x \leqslant 1,\\ y_1(x)y_2(t) & \text{si } 0 \leqslant x < t \leqslant 1.\end{cases}$$

On dit que K_q est *la fonction de Green* associée au problème $SL_q(f)$.

Utilisons la forme des solutions de $-y'' + qy = f$ de la question précédente. On obtient immédiatement

$$\begin{cases} ay(0) + by'(0) = 0\\ cy(1) + dy(1) = 0\end{cases} \Longleftrightarrow \begin{cases} \beta(ay_2(0) + by_2'(0)) = 0\\ \alpha(cy_1(1) + dy_1(1)) = 0.\end{cases}$$

Or, $ay_2(0) + by_2'(0) = 0$ entraînerait $y_2 \in \mathscr{E}_2$ avec $H_q(y_2) = 0$ puis $y_2 = 0$ par hypothèse sur H_q, ce qui contredit la non nullité de y_2. On en déduit que $\beta = 0$. Pour la même raison, $\alpha = 0$. Il n'existe donc qu'une seule solution et elle vérifie $\alpha = \beta = 0$. L'unique solution du problème $SL_q(f)$ est donc donnée par

$$\begin{aligned} y(x) &= y_1(x)\int_x^1 f(t)y_2(t)\mathrm{d}t + y_2(x)\int_0^x f(t)y_1(t)\mathrm{d}t \\ &= \int_x^1 f(t)y_2(t)y_1(x)\mathrm{d}t + \int_0^x f(t)y_1(t)y_2(x)\mathrm{d}t \\ &= \int_x^1 K_q(x,t)f(t)\,\mathrm{d}t + \int_0^x K_q(x,t)f(t)\,\mathrm{d}t \\ &= \int_0^1 K_q(x,t)f(t)\,\mathrm{d}t. \end{aligned}$$

(c) Établir que $K_q : [0,1]^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ est une application continue sur $[0,1]^2$.

Il est immédiat que K_q est continue sur les deux triangles

$$T_1 = \{(x,t) \in [0,1]^2 \mid 0 \leqslant t \leqslant x \leqslant 1\}, \qquad T_2' = \{(x,t) \in [0,1]^2 \mid 0 \leqslant x < t \leqslant 1\},$$

par continuité de y_1 et y_2. De plus, K_q se prolonge par continuité sur

$$T_2 = \{(x,t) \in [0,1]^2 \mid 0 \leqslant x \leqslant t \leqslant 1\}$$

en posant $K_q(x,x) = y_1(x)y_2(x)$ pour tout $x \in [0,1]$. Comme ce prolongement par continuité coïncide avec K_q sur la diagonale $\{(x,x) \mid x' \in [0,1]\}$, K_q est continue sur $T_1 \cup T_2 = [0,1]^2$.

V. Analyse spectrale de l'application $\Phi_q = H_q^{-1}$

Dans toute cette partie, on considère une fonction $q \in \mathscr{C}^0([0,1],\mathbb{R})$ telle que le problème $SL_q(0)$ n'a que la fonction $y = 0$ comme solution.

Pour rappel, l'espace vectoriel $\mathscr{E}$ est muni du produit scalaire $\langle f, g\rangle = \int_0^1 f(t)g(t)\mathrm{d}t$ et on note $\|\ \|_2$ la norme associée.

D'après la partie précédente, pour $f \in \mathscr{E}$, le problème $SL_q(f)$ admet une unique solution, à savoir $\Phi_q(f)$ définie de la façon suivante :

$$\Phi_q : \left\{ \begin{array}{ccc} \mathscr{E} & \longrightarrow & \mathscr{E}_2 \\ f & \longmapsto & \left(x \longmapsto \displaystyle\int_0^1 K_q(x,t)f(t)\mathrm{d}t \right) \end{array} \right. .$$

Dans la mesure où $\mathscr{E}_2$ est un sous-espace vectoriel de $\mathscr{E}$, on pourra considérer que Φ_q est un endomorphisme de $\mathscr{E}$ et introduire ses valeurs propres et ses espaces propres, par exemple, comme cela a été fait pour H_q précédemment.

24. Vérifier que H_q et Φ_q sont deux isomorphismes réciproques l'un de l'autre.

Les deux applications H_q et Φ_q sont clairement linéaires. Il suffit de vérifier que $H_q \circ \Phi_q = Id_{\mathscr{E}}$ et $\Phi_q \circ H_q = Id_{\mathscr{E}_2}$

Pour $f \in \mathscr{E}$, $\Phi(f)$ est la solution de $SL_q(f)$ et par suite $\Phi(f) \in \mathscr{E}_2$ avec $H_q \circ \Phi_q(f) = f$, d'où $H_q \circ \Phi_q = Id_{\mathscr{E}}$.

Pour $g \in \mathscr{E}_2$, posons $f = H_q(g) \in \mathscr{E}$. Le problème $SL_q(f)$ admet une unique solution qui est précisément g car $g \in \mathscr{E}_2$. Il vient donc $\Phi_q(H_q(g)) = g$, c'est à dire $\Phi_q \circ H_q = Id_{\mathscr{E}_2}$.

25. Établir que pour tout $(f, g) \in \mathscr{E}^2$, on a

$$\langle \Phi_q(f), g\rangle = \langle f, \Phi_q(g)\rangle.$$

On a montré dans la question 18 que pour tout $(y, z) \in \mathscr{E}_2^2$, $\langle H_q(y), z\rangle = \langle y, H_q(z)\rangle$. Soient $(f, g) \in \mathscr{E}^2$. D'après la question 24, en posant $y = \Phi_q(f)$ et $z = \Phi_q(g)$, alors $f = H_q(y)$, $g = H_q(z)$ et

$$\langle f, \Phi_q(g)\rangle = \langle H_q(y), z\rangle = \langle y, H_q(z)\rangle = \langle \Phi_q(f), g\rangle.$$

26. Montrer que Φ_q est une application continue de $(\mathscr{E}, \|\ \|_2)$ vers $(\mathscr{E}_2, \|\ \|_2)$.

Soit $f \in \mathscr{E}$. On pose $M = \max\{|K(x,t)|,\ (x,t) \in [0,1]^2\}$. Comme K est continue sur le compact $[0,1]^2$ (question 23. (c)), M existe. De plus, d'après la question 23. (b), pour tout $x \in [0,1]$,

$$\begin{aligned}
|\Phi_q(f)(x)| &= \left| \int_0^1 K_q(x,t) f(t)\, \mathrm{d}t \right| \\
&\leqslant \int_0 |K_q(x,t) f(t)|\, \mathrm{d}t \\
&\leqslant M \int_0^1 |f(t)|\, \mathrm{d}t \\
&\leqslant M\|f\|_2 \times \|1\|_2 \\
&\leqslant M\|f\|_2,
\end{aligned}$$

en utilisant l'inégalité de Cauchy-Schwarz. En élevant au carré et en intégrant cette inégalité sur $[0,1]$, on obtient

$$\|\Phi_q(f)\|_2 \leqslant M\|f\|_2.$$

Donc Φ_q est continue.

27. (a) Vérifier que pour toute valeur propre λ de Φ_q, le sous-espace propre de Φ_q associé à λ est de dimension 1.

Soit $\lambda \in \mathbb{R}$ une valeur propre de Φ_q. Comme Φ_q est iniective, λ est non nulle. Pour tout $y \in \mathscr{E}$,

$$\Phi_q(y) = \lambda y \iff y = \lambda H_q(y) \iff H_q(y) = \frac{1}{\lambda} y.$$

Ainsi, l'espace propre de Φ_q associé à λ est égal à l'espace propre associé à la valeur propre $\dfrac{1}{\lambda}$ de H_q. D'après la question 20, il est de dimension 1.

(b) Justifier que les sous-espaces propres de Φ_q correspondant à deux valeurs propres distinctes sont orthogonaux.

Soient λ_1 et λ_2 deux valeurs propres distinctes de Φ_q et y_1, y_2 deux vecteurs propres associés.

$$\langle \Phi_q(y_1), y_2\rangle = \lambda_1\langle y_1, y_2\rangle = \langle y_1, \Phi_q(y_2)\rangle = \lambda_2\langle y_1, y_2\rangle.$$

Comme $\lambda_1 \neq \lambda_2$, $\langle y_1, y_2\rangle = 0$.

VI. Solutions de l'équation de Sturm-Liouville $SL_p(f)$

On revient au problème de Sturm-Liouville dans le cas général, c'est-à-dire trouver les solutions du système d'équations d'inconnue $y \in \mathscr{C}^2([0,1],\mathbb{R})$ suivant :

$$\begin{cases} -y'' + py = f \\ ay(0) + by'(0) = 0 \\ cy(1) + dy'(1) = 0. \end{cases} \qquad SL_p(f)$$

où p et f sont des éléments de $\mathscr{E}$.

28. Vérifier que le noyau et l'image de H_p sont deux sous-espaces vectoriels orthogonaux de $\mathscr{E}$.

Soient $x \in \mathrm{Ker}(H_q)$ et $y \in \mathrm{Im}(H_q)$. Soit $z \in \mathscr{E}$ tel que $y = H_q(z)$. Alors

$$\langle x, y\rangle = \langle x, H_q(z)\rangle = \langle H_q(x), z\rangle = 0.$$

29. Établir l'existence d'un réel λ_0 tel que toute valeur propre λ de H_p vérifie $\lambda > \lambda_0$.

D'après la question 17. (b), il existe $\lambda_0 \in \mathbb{R}$ tel que pour $\lambda < \lambda_0$, $H_p(y) = \lambda y$ n'a que la fonction nulle comme solution (dans $\mathscr{E}_2$, donc). Ainsi, toutes les valeurs propres de H_p sont dans $[\lambda_0, +\infty[$.

On fixe à présent une valeur $\lambda < \lambda_0$. Par suite, la fonction $q = p - \lambda$ est telle que les valeurs propres de H_q sont incluses dans $\mathbb{R}_+^*$.

30. Vérifier que μ est une valeur propre de Φ_q si et seulement si $\dfrac{1}{\mu} + \lambda$ est une valeur propre de H_p.

Soit $f \in \mathscr{E}$. On constate que

$$\Phi_q(f) = \mu f \iff H_q(f) = \frac{1}{\mu} f \iff H_p(f) = \left(\frac{1}{\mu} + \lambda\right) f,$$

d'où le résultat demandé.

31. Dans cette question uniquement, on suppose que H_p est injective. Montrer que, pour tout $f \in \mathscr{E}$, $SL_p(f)$ admet une unique solution.

C'est la question 23.(b).

32. Dans cette question, on suppose que H_p n'est pas injective et on note $\varphi \in \mathscr{E}_2$ un vecteur propre associé à la valeur propre 0.

(a) Soit $f \in \mathscr{E}$. Montrer que si $\langle f, \varphi\rangle \neq 0$, alors $SL_p(f)$ n'a pas de solution.

Soit y une solution de $SL_p(f)$. Alors $f \in \mathrm{Im}(H_p)$. D'après la question 28, y est orthogonale à φ : c'est une contradiction. Donc $SL_p(f)$ ne possède aucune solution.

(b) Soit $f \in \mathscr{E}$. Montrer que si $\langle f, \varphi\rangle = 0$, alors $SL_p(f)$ admet une infinité de solutions dont on précisera la structure.

La fonction φ est une solution non triviale de $H_p(y) = 0$, que l'on complète en un système fondamental de solutions (φ, ψ) de $H_p(y) = 0$ avec $\varphi\psi' - \varphi'\psi = 1$. D'après la question 20, $\mathrm{Ker}(H_p)$ est de dimension 1, donc engendré par φ. Par suite, $\psi \notin \mathscr{E}_2$. Ainsi $a\psi(0)+b\psi'(0) \neq 0$ ou $c\psi(1) + d\psi'(1) \neq 0$. Supposons, par exemple, $a\psi(0) + b\psi'(0) \neq 0$.
On cherche les solutions de $-y'' + py = f$ dans $\mathscr{E}_2$ par méthode de variation des constantes, sous la forme $y = u\varphi + v\psi$ avec $u'\varphi + v'\psi = 0$. La condition en 0 sur y donne $v(0) = 0$. Cette résolution donne

$$y(x) = -\varphi(x)\left(A + \int_0^x f(t)\psi(t)\mathrm{d}t\right) + \psi(x)\int_0^x f(t)\varphi(t)\mathrm{d}t$$

avec un réel A à déterminer, et qui paramètre la direction de la droite affine solution. Il reste à vérifier que la solution particulière

$$y_0(x) = -\varphi(x)\int_0^x f(t)\psi(t)\mathrm{d}t + \psi(x)\int_0^x \varphi(t)f(t)\mathrm{d}t$$

vérifie les contraintes aux limites. On obtient

$$y_0'(x) = -\varphi'(x)\int_0^x f(t)\psi(t)\mathrm{d}t + \psi'(x)\int_0^x f(t)\varphi(t)\mathrm{d}t$$

on a bien $ay_0(0) + by_0'(0) = 0$. La condition $\langle f, \varphi\rangle = 0$ s'écrit

$$\int_0^1 f(t)\varphi(t)\mathrm{d}t = 0$$

et donc

$$y_0(1) = -\varphi(1)\int_0^1 f(t)\psi(t)\mathrm{d}t,$$
$$y_0'(1) = -\varphi'(1)\int_0^1 f(t)\psi(t)\mathrm{d}t.$$

Finalement,

$$cy_0(1) + dy_0'(1) = -(c\varphi(1) + d\varphi'(1))\int_0^x f(t)\psi(t)\mathrm{d}t = 0.$$

Ainsi, l'ensemble des solutions de $SL_p(f)$ est un espace affine de dimension 1, contenant y_0 et dirigé par φ. Le cas $c\psi(1) + d\psi'(1) \neq 0$ se traite de manière analogue.

FIN DU SUJET