Agrégation interne 2022 première épreuve.

Lien vers le corrigé seul : pdf.

Lien vers le sujet seul : pdf.

Durée : 6 heures.

Notations.

Dans tout le sujet, $\mathbb{R}$ désignera le corps des nombres réels et $\mathbb{N}$ l'ensemble des entiers naturels. De plus n désignera un entier naturel strictement supérieur à 1.

On considère un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbf{P})$. Pour X une variable aléatoire réelle définie sur Ω, on note $\mathbf{E}(X)$ son espérance (lorsqu'elle existe) et $\mathbf{V}(X)$ sa variance (lorsqu'elle existe).

On rappelle que, sous réserve d'existence, la covariance de deux variables aléatoires X et Y définies sur Ω est le nombre réel noté $\mathbf{Cov}(X,Y)$ et défini par

$$\mathbf{Cov}(X,Y) = \mathbf{E}\left((X - \mathbf{E}(X))(Y - \mathbf{E}(Y))\right) = \mathbf{E}(XY) - \mathbf{E}(X)\mathbf{E}(Y).$$

En conséquence sous réserve de l'existence de $\mathbf{V}(X)$, $\mathbf{V}(Y)$ et $\mathbf{V}(X+Y)$:

$$\mathbf{V}(X+Y) = \mathbf{V}(X) + \mathbf{V}(Y) + 2\mathbf{Cov}(X,Y).$$

Objectifs du problème.

Soit X une variable aléatoire définie sur Ω. On se place dans le contexte où la loi de X n'est pas complètement spécifiée et où cette loi dépend d'un paramètre θ inconnu. Le but de l'estimation consiste à approcher la valeur de ce paramètre θ, ou éventuellement la valeur de son image $g(\theta)$ par une fonction réelle g.

La première partie revient sur quelques résultats au sujet des séries entières. La deuxième partie étudie les familles sommables. Dans les deux dernières parties, on se place dans le cas où X est une variable aléatoire définie sur Ω suivant une loi de Poisson de paramètre θ inconnu et on développe quelques outils pour l'estimation de ce paramètre.

I Séries entières.

1. Les affirmation suivantes ont-elles vraies ou fausses ? On justifiera soigneusement les réponses.

(a) Affirmation : « soient $(u_k)_{k\in\mathbb{N}}$ et $(v_k)_{k\in\mathbb{N}}$ deux suites de nombres réels positifs, telles que la série de terme général v_k converge et que pour tout $k \in \mathbb{N}$, $u_k \leqslant v_k$. Alors la série de terme général u_k converge également ».

Démontrons l'affirmation.

* $(u_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathbb{R}_+^{\mathbb{N}}$ donc $\left(\sum_{k=0}^{n} u_k\right)_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante.
* Puisque : $\forall k \in \mathbb{N},\ u_k \leqslant v_k$ en sommant :

$$\forall n \in \mathbb{N},\ \sum_{k=0}^{n} u_k \leqslant \sum_{k=0}^{n} v_k.$$

Or : $(v_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathbb{R}_+^{\mathbb{N}}$, donc

$$\forall \ell \in \mathbb{N},\ \ \forall n \in \mathbb{N},\ \ell > n \Rightarrow \sum_{k=0}^{n} u_k \leqslant \sum_{k=0}^{n} v_k + \sum_{k=n+1}^{\ell} v_k.$$

Puisque $\sum_{n\geqslant 0} v_n$ est croissante et convergente :

$$\forall n \in \mathbb{N},\ \sum_{k=0}^{n} u_k \leqslant \sum_{k=0}^{+\infty} v_k.$$

* Aux deux points précédents nous avons établi que la suite $\left(\sum_{k=0}^{n} u_k\right)_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante et majorée donc elle est convergente.

L'affirmation est vraie.

(b) Affirmation : « soient $(u_k)_{k\in\mathbb{N}}$ et $(v_k)_{k\in\mathbb{N}}$ deux suites de nombres réels, telles que la série de terme général v_k converge et que pour tout $k \in \mathbb{N}$, $u_k \leqslant v_k$. Alors la série de terme général u_k converge également ».

Exhibons un contre-exemple.

Posons : $\forall n \in \mathbb{N}, \begin{cases} v_n = 2^{-n} \\ u_n = -n \end{cases}.$

On a bien

$$\forall n \in \mathbb{N},\ u_n \leqslant v_n,$$

et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge (vers 0) et pourtant $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ diverge vers $-\infty$.

L'affirmation est fausse.

(c) Affirmation : « soit $(u_k)_{k\in\mathbb{N}}$ une suite de nombres réels tous non nuls. On suppose que
$$\lim_{k\to+\infty}\left|\frac{u_{k+1}}{u_k}\right| = \ell,$$
avec $\ell < 1$. Alors la série de terme général u_k converge absolument ».

Démontrons que $\sum_{k\geqslant 0}|u_k|$ converge.

Soit $q = \frac{1+\ell}{2}$.

Puisque $\lim_{k\to+\infty}\left|\frac{u_{k+1}}{u_k}\right| = \ell$:
$$\exists N\in\mathbb{N},\ \forall k\in\mathbb{N},\ k\geqslant N \Rightarrow \left|\frac{u_{k+1}}{u_k}\right| - \ell < q-\ell.$$

Donc :
$$\forall k\in\mathbb{N},\ k\geqslant N \Rightarrow |u_{k+1}| < q|u_k|.$$

En itérant :
$$\forall k\in\mathbb{N},\ k\geqslant N \Rightarrow |u_{k+N}| < q^k|u_N|.$$

Par construction de q, $l < q < 1$, donc la série géométrique $|u_N|\sum_{k\geqslant N} q^k$ converge. D'après la question I.1.(a) (quitte à changer l'indexation) nous en déduisons par comparaison de séries positives, que $\sum_{k\geqslant N}|u_k|$ est convergente et donc que $\sum_{k\geqslant 0}|u_k|$ l'est aussi.

L'affirmation est vraie.

(d) Affirmation : « soit $(u_k)_{k\in\mathbb{N}}$ une suite de fonctions réelles continues définies sur un même intervalle I, telle que pour tout $x\in I$, la suite $(u_k(x))_{k\in\mathbb{N}}$ converge vers un réel $\mathcal{U}(x)$. La fonction $\mathcal{U}$ ainsi définie sur I est continue ».

Exhibons un contre-exemple.

Soit
$$\forall k\in\mathbb{N},\ u_k : \left\{\begin{array}{ccc} [0;1] & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & x^k \end{array}\right.$$

$(u_k(x))_{k\in\mathbb{N}}$ est une suite de fonctions continues sur $[0;1]$ qui converge vers
$$U(x) = \left\{\begin{array}{l} 0 \text{ si } x\in[0;1[\\ 1 \text{ sinon} \end{array}\right.$$

$x\mapsto U(x)$ n'est pas continue en 1.

L'affirmation est fausse.

2. *Question de cours.* Soit $(u_k)_{k\in\mathbb{N}}$ une suite de nombres réels. On rappelle que le rayon de convergence de la série entière de terme général $u_k x^k$ est défini par
$$R = \sup\left\{x \in \mathbb{R} \mid \left(\left|u_k x^k\right|\right)_{k\in\mathbb{N}} \text{ est majorée}\right\} \in \mathbb{R}_+ \cup \{+\infty\}.$$

(a) Soit $x \in \mathbb{R}$.

i. Montrer que si $|x| < R$, alors la série de terme général $u_k x^k$ converge absolument.

Démontrons l'implication proposée.

Soit x tel que : $|x| < R$.
Par définition de la borne supérieure, il existe $r \in \mathbb{R}$ tel que $|x| < r < R$ et $\left(|u_k r^k|\right)_{k\in\mathbb{N}}$ est majorée.
$\left(|u_k r^k|\right)_{k\in\mathbb{N}}$ est majorée donc
$$\exists M \in \mathbb{R}_+,\ \forall k \in \mathbb{N},\ |u_k r^k| \leqslant M.$$

Soit $k \in \mathbb{N}$.
$$|u_k x^k| = |u_k r^k| \cdot \left|\frac{x}{r}\right|^k \leqslant M \cdot \left|\frac{x}{r}\right|^k.$$

Puisque $\left|\frac{x}{r}\right| < 1$ la série géométrique $\sum_{k\geqslant 0}\left|\frac{x}{r}\right|^k$ converge. Donc par comparaison de séries positives, $\sum_{k\geqslant 0}|u_k x^k|$ converge.

Si $|x| < R$ alors $\sum_{k\geqslant 0} u_k x^k$ converge absolument.

ii. Monter que si $|x| > R$, alors la série de terme général $u_k x^k$ diverge.

Si $|x| > R$ alors $(|u_k x^k|)_{k\in\mathbb{N}}$ n'est pas majorée donc diverge.
Notamment $(|u_k x^k|)_{k\in\mathbb{N}}$, et donc $(u_k x^k)_{k\in\mathbb{N}}$, ne tend pas vers 0. D'où

$\sum_{k\geqslant 0} u_k x^k$ diverge grossièrement.

On considère alors la fonction $\mathcal{S} :]-R, R[\to \mathbb{R}$ définie par

$$\mathcal{S}(x) = \sum_{k=0}^{+\infty} u_k x^k.$$

(b) Soit $R' \in]0, R[$. Montrer que la série de terme général $u_k x^k$ converge uniformément sur $[-R', R']$. Que peut-on en déduire sur la régularité de S ?

* Montrons la convergence uniforme.

- Puisque $0 < R' < R$: $\forall k \in \mathbb{N},\ \forall x \in [-R', R'],\ |u_k x^k| \leqslant |u_k R'^k|$.
- D'après I.2.(a).i. : $\sum_k u_k R'^k$ converge absolument.

Donc $\sum_k u_k x^k$ converge normalement sur $[-R', R']$.
Donc

$$\boxed{\sum_k u_k x^k \text{ converge uniformément sur } [-R', R'].}$$

* Justifions que $\mathcal{S}$ est continue sur $]-R, R[$.

$\sum_k u_k x^k$ converge uniformément sur $[-R', R']$ et, pour tout $k \in \mathbb{N}$, $x \mapsto u_k x^k$ est continue donc $\mathcal{S}$ est continue sur $[-R', R']$.
Enfin, ceci étant vrai pour tout $R' \in]0; R[$, nous en déduisons que

$$\boxed{\mathcal{S} \text{ est continue sur }]-R, R[.}$$

(c) Montrer que le rayon de convergence de la série de terme général $(k+1)u_{k+1}x^k$ est égal à R.

$\sum_{k\in\mathbb{N}}(k+1)u_{k+1}x^k$ est une série entière. Notons R_d son rayon de convergence.

* Soit $x \in]-R_d, R_d[$.

Démontrons que $|x| \leqslant R$.

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$:

$$\begin{aligned} |u_n x^n| &\leqslant |n u_n x^n| \\ &\leqslant |n u_n x^{n-1}| \cdot |x| \\ &\leqslant |n u_n x^{n-1}| \cdot R_d \end{aligned}$$

Puisque $x \in]-R_d, R_d[$, $(|nu_n x^{n-1}|)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est majorée et donc $(|u_n x^n|)_{n\in\mathbb{N}^*}$ l'est aussi.
$(|u_n x^n|)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est majorée donc $(|u_n x^n|)_{n\in\mathbb{N}}$ l'est aussi et par conséquent $|x| \leqslant R$.
Ceci étant vrai pour tout $x \in]-R_d, R_d[$, nous avons

$$\boxed{R_d \leqslant R.}$$

* Si $R = 0$ clairement : $R \leqslant R_d$. Supposons $R > 0$ et soit $x \in]-R, R[$.

Démontrons que $|x| \leqslant R_d$.

Soit $\rho = \frac{|x|+R}{2}$. On a donc $0 \leqslant |x| < \rho < R$ puisque $0 \leqslant |x| < R$.
Soit $n \in \mathbb{N}^*$.

$$|nu_n x^{n-1}| = |u_n \rho^n| \cdot \frac{1}{\rho} \cdot n \left|\frac{x}{\rho}\right|^{n-1}$$

Par comparaison de suite arithmétique et géométrique, et puisque $0 \leqslant \frac{|x|}{\rho} < 1$: $\lim_{n\to+\infty} \frac{1}{\rho} n \left|\frac{x}{\rho}\right|^{n-1} = 0$.
De plus $(|u_n \rho^n|)$ est majorée donc $(nu_n x^{n-1})_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge vers 0. Par conséquent $(|nu_n x^{n-1}|)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est majorée. Nous en déduisons que $x \leqslant R_d$.
Ceci étant vrai pour tout $x \in]-R, R[$, nécessairement

$$\boxed{R \leqslant R_d.}$$

Des deux points précédents nous déduisons :

$$\boxed{R = R_d.}$$

(d) Montrer que $\mathcal{S}$ est indéfiniment dérivable sur $]-R, R[$.

Démontrons par récurrence sur $n \in \mathbb{N}$ que $\mathscr{P}(n)$: « $S^{(n)} = \sum_{k=0}^{+\infty} v_{n,k} x^k$ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $]-R, R[$. » est vraie.

* . Pour $n \in \mathbb{N}$, $x \mapsto u_n x^n$ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $]-R, R[$,
. $\sum_{n\geqslant 1} nu_n x^{n-1}$ converge localement uniformément sur $]-R, R[$ d'après la question 2.(b),

. $\sum_{n\geqslant 0} u_n 0^n$ converge,
donc $\sum_{n\geqslant 0} u_n x^n$ converge localement uniformément sur $]-R, R[$ vers $\mathcal{S}$ qui est de classe $\mathcal{C}^1$ et $S'(x) = \sum_{n=0}^{+\infty}(n+1)u_{n+1}x^n$ pour tout $x \in]-R, R[$.

* Soit $k \in \mathbb{N}$. Supposons que $S^{(k)} = \sum_{i=0}^{+\infty} x \mapsto v_{k,i}x^i$ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $]-R, R[$.
En appliquant le même raisonnement qu'à l'initialisation on obtient que $S^{(k+1)}$ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $]-R, R[$.

3. Soit r un entier naturel non nul. Déterminer le rayon de convergence de la série entière de terme général $\dfrac{k^r x^k}{k!}$. Déterminer sa somme lorsque $r = 1$ et lorsque $r = 2$.

   * Déterminons le rayon de convergence.

4. On note, pour tout entier $N \geqslant 1$, α_N le nombre de partitions de l'ensemble $[\![1, N]\!]$ et on convient que $\alpha_0 = 1$

   (a) Calculer α_1, α_2 et α_3.

   (b) Montrer que pour tout entier $N \geqslant 0$,
$$\alpha_{N+1} = \sum_{k=0}^{N} \binom{N}{k} \alpha_k.$$

   (c) Montrer que, pour tout $N \geqslant 0$, $\alpha_N \leqslant N!$.

   (d) En déduire que la série entière de terme général $\dfrac{\alpha_N x^N}{N!}$ converge pour tout x réel tel que $|x| < 1$. On note $f(x)$ sa somme.

   (e) Montrer que f est dérivable sur $]-1, 1[$ et que pour tout $x \in]-1, 1[$, $f'(x) = \mathrm{e}^x f(x)$.
   En déduire que pour tout $x \in]-1, 1[$, $f(x) = \mathrm{e}^{\mathrm{e}^x - 1}$.

   (f) En déduire que pour tout entier naturel N,
$$\alpha_N = \frac{1}{\mathrm{e}} \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{k^N}{k!}.$$

II Familles sommables.

Soit $I \subset \mathbb{N}^n$. Les éléments de I seront notés sous la forme $\underline{i} = (i_1, i_2, \dots, i_n)$.

Cas des familles sommables de réels positifs.

Soit $u = \left(u_{\underline{i}}\right)_{\underline{i} \in I}$ une famille de réels positifs ou nuls indexée par I. on dit que u est sommable lorsque la borne supérieure suivante est finie :

$$\sup \left\{ \sum_{\underline{i} \in J}, \; J \subset I \text{ et } J \text{ fini} \right\} < +\infty.$$

Dans ce cas, on note

$$\sum_{\underline{i} \in I} u_{\underline{i}} = \sup \left\{ \sum_{\underline{i} \in J}, \; J \subset I \text{ et } J \text{ fini} \right\}.$$

Soit $\left(u_{\underline{i}}\right)_{\underline{i} \in I}$ et $\left(v_{\underline{i}}\right)_{\underline{i} \in I}$ deux familles de réels positifs et a, b deux réels positifs.

5. On suppose que pour tout $\underline{i} \in I$,

$$u_{\underline{i}} \leqslant v_{\underline{i}}.$$

Montrer que si v est sommable, alors u est sommable.

6. On suppose que u et v sont sommables. Montrer que la famille $au + bv$ définie par

$$(au + bv)_{\underline{i}} = au_{\underline{i}} + bv_{\underline{i}}$$

est sommable et que

$$\sum_{\underline{i} \quad I} \left(au_{\underline{i}} + bv_{\underline{i}}\right) = a \left(\sum_{\underline{i} \in I} v_{\underline{i}} \right) + \quad .$$

7. On considère $(I_k)_{k \in \mathbb{N}}$ une famille de sous-ensembles de I tels que

▷ $\bigcup_{k \in \mathbb{N}} I_k = I$.

▷ Pour tout $k, l \in \mathbb{N}$, distincts, $I_k \cap I_l = \varnothing$.

Par convention, si $I_k = \varnothing$, on pose

$$\sum_{\underline{i} \in I_k} u_{\underline{i}} = 0.$$

On suppose que u est sommable.

(a) Montrer que la famille $\left(u_{\underline{i}}\right)_{\underline{i} \in I_k}$ est sommable pour tout $k \in \mathbb{N}$.

(b) Montrer que pour tout $p \in \mathbb{N}$,

$$\sum_{k=0}^{p} \left(\sum_{\underline{i} \in I_k} u_{\underline{i}} \right) \leqslant \sum_{\underline{i} \in I} u_{\underline{i}}.$$

(c) Montrer que la série de terme général $\sum\limits_{\underline{i} \in I_k} u_{\underline{i}}$ converge. Sa somme est notée $\sum\limits_{k=0}^{+\infty} \sum\limits_{\underline{i} \in I_k} u_{\underline{i}}$.

(d) Montrer que

$$\sum_{k=0}^{+\infty} \sum_{\underline{i} \in I_k} u_{\underline{i}} \leqslant \sum_{\underline{i} \in I} u_{\underline{i}}.$$

8. Réciproquement, montrer que si la famille $\left(u_{\underline{i}}\right)_{\underline{i} \in I_k}$ est sommable pour tout $k \in \mathbb{N}$ et si la série de terme général $\sum\limits_{\underline{i} \in I_k} u_{\underline{i}}$ converge, alors $\left(u_{\underline{i}}\right)_{\underline{i} \in I}$ est sommable et

$$\sum_{\underline{i} \in I} u_{\underline{i}} \leqslant \sum_{k=0}^{+\infty} \sum_{\underline{i} \in I_k} u_{\underline{i}}.$$

9. Déduire des questions précédentes le résultat suivant, appelé *théorème de sommation par paquets* :
$\left(u_{\underline{i}}\right)_{\underline{i} \in I_k}$ est sommable pour tout $k \in \mathbb{N}$ et la série de terme général $\sum_{\underline{i} \in I_k} u_{\underline{i}}$ converge si et seulement si $\left(u_{\underline{i}}\right)_{\underline{i} \in I}$ est sommable. De plus, dans ce cas,

$$\sum_{\underline{i} \in I} u_{\underline{i}} = \sum_{k=0}^{+\infty} \sum_{\underline{i} \in I_k} u_{\underline{i}}.$$

Cas des familles sommables de réels quelconques.

Soit $u = \left(u_{\underline{i}}\right)_{\underline{i}\in I}$ *une famille de réels indexée par* I*. On dit que* u *est sommable lorsque la famille de réels positifs ou nuls* $|u| = \left(|u_{\underline{i}}|\right)_{\underline{i}\in I}$ *est sommable.*

Soit $u = \left(u_{\underline{i}}\right)_{\underline{i}\in I}$ *une famille de réels indexée par* I*. Pour tout* $\underline{i} \in I$*, on pose*

$$u_{\underline{i}}^{+} = \max(u_{\underline{i}}, 0) \quad \text{et} \quad u_{\underline{i}}^{-} = \max(-u_{\underline{i}}, 0).$$

Ceci définit deux familles $u^{+} = \left(u_{\underline{i}}^{+}\right)_{\underline{i}\in I}$ *et* $u^{-} = \left(u_{\underline{i}}^{-}\right)_{\underline{i}\in I}$ *de réels positifs ou nuls.*

10. Soit $u = \left(u_{\underline{i}}^{+}\right)_{\underline{i}\in I}$ une famille de réels indexée par I. Montrer que la famille u est sommable si et seulement si les familles u^{+} et u^{-} sont sommables.

Pour $\left(u_{\underline{i}}\right)_{\underline{i}\in I}$ *une famille sommable de réels, on définit alors sa somme par*

$$\sum_{\underline{i}\in I} u_{\underline{i}} = \left(\sum_{\underline{i}\in I} u_{\underline{i}}^{+}\right) - \left(\sum_{\underline{i}\in I} u_{\underline{i}}^{-}\right).$$

11. Soient $u = \left(u_{\underline{i}}\right)_{\underline{i}\in I}$ et $u = \left(v_{\underline{i}}\right)_{\underline{i}\in I}$ deux familles sommables de réels.

    (a) Montrer que la famille $u + v$ définie par

    $$(u+v)_{\underline{i}} = u_{\underline{i}} + v_{\underline{i}}$$

    est sommable et

    $$\sum_{\underline{i}\in I} (u_{\underline{i}} + v_{\underline{i}}) =$$