Notations

▷ On rappelle que l'on note $\mathbb{N}$ l'ensemble des entiers positifs ou nul, $\mathbb{Z}$ l'anneau des entiers relatifs, $\mathbb{Q}$ le corps des nombres rationnels, $\mathbb{R}$ le corps des nombres réels et $\mathbb{C}$ le corps des nombres complexes.

▷ On se place dans un espace euclidien $(E, \langle . \, , . \rangle)$ de dimension $n \in \mathbb{N}^*$. On note $\|.\|$ la norme euclidienne associée.

▷ Pour tout vecteur x de E et tout réel positif r, on note $B(x,r)$ (resp. $\overline{B}(x,r)$, resp. $S(x,r)$) la boule ouverte (resp. la boule fermée, resp. la sphère) de centre x et de rayon r :

$$B(x,r) = \{y \in E \mid \|y-x\| < r\}\,,\ \overline{B}(x,r) = \{y \in E \mid \|y-x\| \leqslant r\} \quad \text{et} \quad S(x,r) = \{y \in E \mid \|y-x\| = r\}\,.$$

▷ Pour toute partie A de E, on note $\mathring{A}$ l'intérieur de A, c'est-à-dire le plus grand ouvert (au sens de l'inclusion) inclus dans A, $\overline{A}$ l'adhérence de A, c'est-à-dire le plus petit fermé contenant A et $\mathrm{Fr}\,(A)$ la frontière de A :

$$\mathrm{Fr}\,(A) = \overline{A} \backslash \mathring{A}.$$

▷ Si a est un élément de E, on note $\mathscr{V}(a)$ l'ensemble des voisinages de a.

▷ Pour toute partie fermée et non vide F de E et tout $x \in E$, on admet sans démonstration que l'ensemble

$$\{\|x-f\|\ ,\ f \in F\}$$

admet une borne inférieure notée $\inf\limits_{f \in F} \|x-f\|$ et on pose

$$d_F(x) = d(x,F) = \inf_{f \in F} \|x-f\|\,.$$

▷ On pose alors $\Gamma(x) = \{f \in F \mid \|x-f\| = d(x,F)\}$. C'est donc l'ensemble (éventuellement vide) des points de F pour lesquels la borne inférieure est atteinte.

▷ **Lorsque $\Gamma(x)$ est un singleton, on note $\pi(x)$ son unique élément.**

▷ Si u et v sont deux vecteurs de E, on appelle segment $[u,v]$ l'ensemble défini par :

$$[u,v] = \{x \in E \mid \exists t \in [0,1],\ x = (1-t)u + tv\}\,.$$

▷ Soient A une partie de E et $u : A \to \mathbb{R}$. On suppose que $0 \in \overline{A}$. On dit que $u(h) = \underset{h \to 0}{\mathrm{o}}(\|h\|)$ lorsqu'il existe une fonction δ définie sur un voisinage V de 0 telle que

$$\forall h \in V \cap A,\ u(h) = \delta(h)\,\|h\| \quad \text{et} \quad \delta(h) \xrightarrow[h \to 0]{} 0.$$

▷ Soient Ω un ouvert de E et $f : \Omega \to \mathbb{R}$. On rappelle que l'on dit que f est différentiable en un élément a de Ω lorsqu'il existe une forme linéaire $\ell : E \to \mathbb{R}$ vérifiant :

$$f(a+h) = f(a) + \ell(h) + \underset{h \to 0}{\mathrm{o}}(\|h\|)\,.$$

Lorsqu'elle existe, ℓ est unique et est notée $df(a)$ et l'image $\ell(h)$ du vecteur h de E par ℓ est notée $df(a) \cdot h$. Le gradient de f en a est alors l'unique vecteur v de E vérifiant :

$$\forall h \in E,\ df(a) \cdot h = \langle v,\, h \rangle\,.$$

On le note $\nabla f(a)$. Ainsi, sous réserve d'existence, on a :

$$f(a+h) = f(a) + \langle \nabla f(a),\, h \rangle + \underset{h \to 0}{\mathrm{o}}(\|h\|)\,.$$

▷ Pour tout réel x, on note $\lfloor x \rfloor$ sa partie entière.

Tournez la page S.V.P.

Le problème a pour objectif d'étudier la différentiabilité de la fonction $d_F : x \mapsto d(x, F)$ en fonction de la partie F.

On fixe donc une partie F de E **non vide** et **fermée**.

Partie I — Résultats préliminaires

1. Montrer que, pour tout vecteur x de E, $d_F(x) = 0$ si et seulement si $x \in F$.

2. **a)** Montrer que, pour tout $(x, y) \in E^2$ et tout $f \in F$, on a :

$$d_F(y) \leqslant \|y - x\| + \|x - f\|\,.$$

b) En déduire que d_F est 1-lipschitzienne.

3. Soient x un vecteur de E et x_0 un vecteur de F. On pose $r = \|x - x_0\|$ et $K = \overline{B}(x, r) \cap F$.

a) Montrer que K est une partie compacte et non vide de E.

b) Montrer que $\Gamma(x)$ est non vide.

4. On suppose, *dans cette question seulement*, que F est en outre une partie convexe de E.

a) Montrer que, quels que soient les vecteurs u et v de E, on a : $\|u+v\|^2 + \|u-v\|^2 = 2\left(\|u\|^2 + \|v\|^2\right)$.

b) Soit x un vecteur de E et soient f et f' deux éléments de $\Gamma(x)$. On suppose que $f \neq f'$.

Montrer que : $\left\|\dfrac{1}{2}(f + f') - x\right\|^2 < d(x, F)^2$.

En déduire que, pour tout vecteur x de E, $\Gamma(x)$ est un singleton.

Ainsi, avec les notations de l'introduction, $\Gamma(x) = \{\pi(x)\}$.

c) On souhaite montrer que : $\forall x \in E, \forall f \in F, \langle f - \pi(x), x - \pi(x)\rangle \leqslant 0$.

Pour cela, on fixe des éléments x de E et f de F. On introduit la fonction

$$\varphi : \begin{cases} [0,1] \longrightarrow \mathbb{R} \\ \quad t \longmapsto \|(1-t)\pi(x) + tf - x\|^2 \end{cases}.$$

i. Montrer que φ est une fonction polynomiale de degré inférieur ou égal à 2.

ii. Justifier que φ admet un minimum en 0. Conclure.

d) On fixe un vecteur x de E. Soit z un vecteur de F. On suppose que :

$$\forall f \in F, \langle f - z, x - z\rangle \leqslant 0\,.$$

Montrer que $z = \pi(x)$.

Partie II — Étude en dimension 1

On suppose, *dans toute cette partie*, que $E = \mathbb{R}$, et que $\mathbb{R}$ est muni de sa structure euclidienne canonique.

5. Expliciter $d_{\{0\}}$, puis déterminer l'ensemble des points où $d_{\{0\}}$ est dérivable et déterminer sa dérivée.

Dans les questions 6 à 10, on suppose que $F = \mathbb{Z}$ et on étudie donc la fonction $d_{\mathbb{Z}}$.

6. Montrer que $\mathbb{Z}$ est fermé dans $\mathbb{R}$.

7. Justifier que $d_{\mathbb{Z}}$ est 1-périodique. Étudier la parité.

8. Pour tout x élément de $[0,1[$, expliciter, en justifiant, $d_{\mathbb{Z}}(x)$ en fonction de x. Tracer le graphe de $d_{\mathbb{Z}}$.

9. Étudier la dérivabilité de $d_{\mathbb{Z}}$ en tout point de $[0,1[$.

10. Développement en série de Fourier de $d_{\mathbb{Z}}$.

a) Calculer les coefficients de Fourier de $d_{\mathbb{Z}}$.

b) La série de Fourier de $d_{\mathbb{Z}}$ converge-t-elle simplement/uniformément/normalement vers $d_{\mathbb{Z}}$?

c) En déduire la valeur de $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n+1)^2}$ puis de $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$, de $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n+1)^4}$ et de $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^4}$.
On commencera par justifier la convergence des séries.

Pour toute la suite de la partie, on fixe une partie fermée F de $\mathbb{R}$. On note Ω le complémentaire de F. C'est donc une partie ouverte de $\mathbb{R}$.

11. On définit, sur Ω, une relation binaire $\sim$ de la manière suivante : étant donnés deux éléments x et y de Ω, on dit que x est en relation avec y lorsqu'il existe un intervalle ouvert $]a,b[$ inclus dans Ω et contenant les éléments x et y :

$$\forall (x,y) \in \Omega^2, \quad x \sim y \iff \left(\exists (a,b) \in \mathbb{R}^2,\ a < b \quad \text{et} \quad (x,y) \in]a,b[^2 \quad \text{et} \quad]a,b[\subset \Omega\right).$$

a) Montrer que $\sim$ est une relation d'équivalence.

b) Montrer que les classes d'équivalences sont des intervalles ouverts deux à deux disjoints.

c) En déduire qu'il existe une famille $(]a_i,b_i[)_{i\in I}$ d'intervalles ouverts deux à deux disjoints, indexée par un ensemble I fini ou dénombrable, telle que

$$\Omega = \bigcup_{i\in I}]a_i,b_i[.$$

12. Soit x un élément de Ω. Il existe donc un unique i_0 élément de I tel que $x \in]a_{i_0}, b_{i_0}[$.

a) Exprimer $d_F(x)$ à l'aide de x, de a_{i_0} et b_{i_0}.

b) Étudier la dérivabilité de d_F en x.

13. On suppose dans cette question que $\mathring{F} \neq \varnothing$. Soit x un élément de $\mathring{F}$. Étudier la dérivabilité de d_F en x.

Tournez la page S.V.P.

14. Étude à la frontière.

a) On suppose, *dans cette question*, que $F = [0, 1]$. Expliciter $\mathrm{Fr}\,(F)$.
d_F est-elle dérivable en un point de $\mathrm{Fr}\,(F)$?

b) *Dans cette question*, on pose : $F = \mathbb{R}\backslash\Omega$ où $\Omega = \bigcup\limits_{n\geqslant 2} \left]\frac{1}{n} - \frac{1}{n^3}, \frac{1}{n}\right[$, la réunion étant prise sur l'ensemble des entiers naturels n tels que $n \geqslant 2$.

i. Justifier rapidement que $\Omega \subset \left]0, \frac{1}{2}\right[$, que F est un fermé de $\mathbb{R}$ et que $0 \in \mathrm{Fr}\,(F)$.

ii. Soit $x \in \Omega$. Montrer qu'il existe un unique entier naturel n tel que $n \geqslant 2$ et $x \in \left]\frac{1}{n} - \frac{1}{n^3}, \frac{1}{n}\right[$.
Montrer que $n = \left\lfloor \frac{1}{x} \right\rfloor$.

iii. En déduire qu'il existe un réel C strictement positif tel que $\forall x \in \left]0, \frac{1}{2}\right[$, $d_F(x) \leqslant Cx^3$.

iv. Montrer que d_F est dérivable à droite en 0 et en calculer $(d_F)'_d(0)$.

v. d_F est-elle dérivable en 0 ?

Partie III — Étude de cas particuliers en dimension n

15. On fixe un vecteur x_0 de E et on suppose, *dans cette question seulement*, que $F = \{x_0\}$.

a) Expliciter d_F. Soit x un élément de E. Expliciter $\Gamma(x)$.

b) Montrer que la fonction $g\colon \begin{cases} E & \longrightarrow \mathbb{R} \\ x & \longmapsto \|x - x_0\|^2 \end{cases}$ est différentiable sur E et calculer son gradient.

c) En déduire que d_F est différentiable sur $E\backslash\{x_0\}$ et montrer que :

$$\forall a \in E\backslash\{x_0\}\,, \nabla d_F(a) = \frac{1}{\|a - x_0\|}\,(a - x_0)\,.$$

d) Étude de la différentiabilité de d_F en x_0. Supposons que d_F soit différentiable en x_0.

i. Montrer que, pour tout vecteur h de E, on a :

$$d_F(x_0 + th) = t\,\langle \nabla d_F(x_0),\, h\rangle + \underset{t\to 0}{\mathrm{o}}\,(t)\,.$$

ii. Conclure.

16. On suppose, *dans cette question seulement*, que F est un sous-espace vectoriel de E, distinct de E.

a) Montrer que pour tout vecteur x de E, $\Gamma(x)$ est un singleton, et que π (défini dans le préambule du sujet) est le projecteur orthogonal sur F.

b) Montrer que, pour tout élément a de E, d_F^2 est différentiable en a et calculer son gradient.

c) En déduire que, pour tout élément a de $E\backslash F$, d_F est différentiable en a et calculer son gradient.

d) On fixe un vecteur a de F. L'objet de cette question est l'étude de la différentiabilité de d_F en a.

i. On suppose que d_F est différentiable en a et on pose : $u = \nabla(d_F)(a)$.
Soit $h \in F^\perp$. Montrer que : $\langle u,\, h\rangle = \|h\|$.
Indication : *on pourra procéder de manière analogue à la question* 15.d.

ii. Conclure.

17. Dans cette question, on suppose que $E = \mathbb{R}^2$, dont les éléments sont notés en colonne, muni de sa structure euclidienne canonique et que : $F = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2 \;\middle|\; y \leqslant 0 \quad \text{ou} \quad y \geqslant x^2 \right\}$.

L'objet de cette question est d'étudier la différentiabilité de d_F en $0_{\mathbb{R}^2}$.

a) Dessiner l'allure de F.

b) Montrer que F est un fermé de $\mathbb{R}^2$.

c) Montrer que $0_{\mathbb{R}^2} \in \mathrm{Fr}\,(F)$.

d) Montrer que, pour tout vecteur u de $\mathbb{R}^2$, $d_F(u) \leqslant \|u\|^2$.
Indication : on pourra séparer les cas où $u \in F$ et où $u \in \mathbb{R}^2 \backslash F$.

e) En déduire que d_F est différentiable en $0_{\mathbb{R}^2}$ et donner son gradient en $0_{\mathbb{R}^2}$.

Partie IV — Distance à la sphère unité

On suppose, *dans cette partie seulement*, que : $F = \{x \in E \mid \|x\| = 1\}$.

F est donc la sphère de centre 0_E et de rayon 1.

18. Soit a un élément de $E \backslash \{0_E\}$. On pose $u = \dfrac{1}{\|a\|} a$ et on fixe un vecteur y de F.

a) Montrer qu'il existe un plan vectoriel $\mathcal{P}$ contenant a, u et y.

b) Montrer que $S = F \cap \mathcal{P}$ est le cercle unité de $\mathcal{P}$, pour la structure euclidienne sur $\mathcal{P}$ induite par celle de E.

c) Montrer que $\Gamma(a) = \{u\}$.

19. Montrer que, pour tout vecteur a de E : $d_F(a) = |\,\|a\| - 1|$.

20. Montrer que, pour tout vecteur a de E tel que $a \neq 0_E$ et $a \notin F$, d_F est différentiable en a et calculer son gradient.

21. Expliciter $\Gamma(0_E)$.

22. Soit a un vecteur de F. Montrer que d_F n'est pas différentiable en a.
Indication : *On pourra calculer $d_F(a + ta)$, pour tout t élément de* $]-1, 1[$.

23. On fixe un vecteur unitaire v.

a) Étudier la dérivabilité en 0 de $\varphi : \begin{cases}]-1, 1[\longrightarrow \mathbb{R} \\ \quad t \quad \longmapsto d_F(tv) \end{cases}$.

b) Conclure quant à la différentiabilité de d_F en 0.

Partie V — Une condition nécessaire de différentiabilité à l'extérieur de F

Dans cette partie, on fixe un vecteur a de $E\backslash F$ et on suppose que d_F est différentiable en a.
On souhaite montrer qu'alors :

$$\Gamma(a) \text{ est un singleton et que } \nabla d_F(a) = \frac{1}{d_F(a)}(a - \pi(a)).$$

On pose $u = \nabla d_F(a)$.

24. **a)** Montrer que, pour tout $t > 0$, $d_F(a + tu) - d_F(a) \leqslant t\,\|u\|$.
b) En déduire que $\|u\| \leqslant 1$.

Dans la suite de cette partie, on se donne **un** élément y de $\Gamma(a)$.

25. **a)** Montrer que pour tout $x \in [a, y]$,

$$\|x - y\| = d_F(a) - \|a - x\|\,.$$

b) En déduire que pour tout $x \in [a, y]$,

$$d_F(x) = \|x - y\|\,.$$

26. On fixe $t \in \,]0, d_F(a)]$ et on pose $v = \dfrac{1}{d_F(a)}(a - y)$.

a) Montrer que

$$d_F(a - tv) = d_F(a) - t.$$

b) Montrer que

$$\langle u,\, v\rangle = 1 = \|u\|\,\|v\|\,.$$

c) En déduire que $u = v$ et conclure.

Partie VI — Étude de la réciproque

Dans cette partie, on fixe $a \in E\backslash F$ et on suppose que $\Gamma\,(a)$ est un singleton. Ainsi, avec les notations du préambule,

$$\Gamma\,(a) = \{\pi(a)\}\,.$$

On souhaite montrer que d_F est différentiable en a et que $\nabla(d_F)(a) = \dfrac{1}{d_F(a)}(a - \pi(a))$.

27. Dans cette question, on se propose de montrer que :

$$\forall V \in \mathscr{V}\,(\pi(a))\,,\, \exists U \in \mathscr{V}\,(a)\,,\, \forall x \in U,\, \Gamma(x) \subset V.$$

On va l'établir à l'aide d'un raisonnement par l'absurde. On suppose donc qu'il existe un voisinage ouvert $V \in \mathscr{V}\,(\pi(a))$ de $\pi(a)$ tel que :

$$\forall U \in \mathscr{V}\,(a)\,,\, \exists x \in U,\, \Gamma(x) \not\subset V\,.$$

On dispose ainsi d'une suite $(x_p)_{p\in\mathbb{N}}$ convergeant vers a et d'une suite $(y_p)_{p\in\mathbb{N}}$ telles que :

$$\forall p \in \mathbb{N},\, y_p \in \Gamma(x_p) \quad \text{et} \quad y_p \notin V.$$

On pose : $M = \sup\limits_{p\in\mathbb{N}} \|x_p - a\|$.

a) Justifier succinctement que M est bien défini, puis montrer que $(y_p)_{p\in\mathbb{N}}$ est bornée.

On note ℓ une valeur d'adhérence de $(y_p)_{p\in\mathbb{N}}$.

b) Justifier succinctement l'existence de ℓ.

c) Montrer que $\ell \in F \cap (E\backslash V)$.

d) Montrer que $\ell \in \Gamma(a)$, puis conclure.

28. On pose : $R = \|a - \pi(a)\|$.

a) Justifier que $R > 0$ et expliciter $\overline{B}(a, R) \cap F$.

b) Soit x un élément de $B(a, R)$. On fixe un élément y de $\Gamma(x)$.

On considère la fonction φ: $\begin{cases} \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R} \\ t \longmapsto \|(1-t)x + ty - a\|^2 - R^2 \end{cases}$.

i. Montrer que φ est un trinôme du second degré. Que dire du signe des racines de ce trinôme ?

ii. Montrer que $[x, y] \cap S(a, R)$ est un singleton. On note $p(x, y)$ le point d'intersection. Il existe donc un unique $t_{x,y} \in [0, 1]$ vérifiant : $p(x, y) = (1 - t_{x,y})x + t_{x,y}\, y$.

iii. Que vaut $\varphi(t_{x,y})$? En déduire une expression de $t_{x,y}$.

c) Montrer que :

$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists \eta > 0,\ \forall x \in B(a, R),\ \|x - a\| < \eta \implies \forall y \in \Gamma(x),\ \|p(x, y) - y\| < \varepsilon.$$

d) En déduire que :

$$\forall V \in \mathscr{V}(\pi(a)),\ \exists U \in \mathscr{V}(a),\ \forall x \in U,\ \forall y \in \Gamma(x),\ p(x, y) \in V.$$

29. Pour tout x élément de $B(a, R)$, on note y_x un élément de $\Gamma(x)$. Montrer que :

a) $\forall x \in B(a, R),\ \|x - p(x, y_x)\|^2 - \|a - p(x, y_x)\|^2 = 2\langle x - a,\ a - p(x, y_x)\rangle + \|x - a\|^2$;

b) $\|x - p(x, y_x)\|^2 - \|a - p(x, y_x)\|^2 = 2\langle x - a,\ a - \pi(a)\rangle + \underset{x\to a}{\mathrm{o}}(\|x - a\|)$.

30. Montrer que : $d_F^2(x) = d_F^2(a) + \langle x - a,\ 2(a - \pi(a))\rangle + \underset{x\to a}{\mathrm{o}}(\|x - a\|)$.

31. En déduire que d_F est différentiable en a et calculer son gradient.

32. Soit Ω un ouvert inclus dans $E\backslash F$. On suppose que, pour tout $x \in \Omega$, $\Gamma(x)$ est un singleton. Montrer que d_F est de classe $\mathscr{C}^1$ sur Ω.

Partie VII — Une condition nécessaire de différentiabilité en un point de F

Dans cette partie, on fixe un élément a de F et on suppose que d_F est différentiable en a. On souhaite montrer que : $\nabla(d_F)(a) = 0$.
On pose encore : $u = \nabla(d_F)(a)$.

33. Montrer le résultat dans le cas où $a \in \mathring{F}$.

34. On se place dans le cas où $a \in \mathrm{Fr}(F)$.

a) Montrer que : $d_F(a - tu) = -t\,\|u\|^2 + \underset{t\to 0}{\mathrm{o}}(t)$.

b) Conclure.

FIN DU SUJET