Agrégation interne 2019 deuxième épreuve.

Durée : 6 heures.
L'usage de tout ouvrage de référence et de tout matériel électronique (y compris la calculatrice) est rigoureusement interdit.

Notations.

▷ On rappelle que l'on note $\mathbb{N}$ l'ensemble des entiers positifs ou nuls, $\mathbb{Z}$ l'anneau des entiers relatifs, $\mathbb{Q}$ le corps des nombres rationnels, $\mathbb{R}$ le corps des nombres réels et $\mathbb{C}$ le corps des nombres complexes.

▷ On se place dans un espace euclidien $(E,\langle .,. \rangle)$ de dimension $n \in \mathbb{N}^*$. On note $\|.\|$ la norme euclidienne associée.

▷ Pour tout vecteur x d E et réel positif r, on note $B(x,r)$ (resp. $\overline{B}(x,r)$, resp. $S(x,r)$) la boule ouverte (resp. la bouel fermée, resp. la sphère) de centre x et de rayon r :

$$B(x,r) = \{y \in E \mid \|y - x\| < r\},$$

$$\overline{B}(x,r) = \{y \in E \mid \|y - x\| \leqslant r\}$$

et

$$S(x,r) = \{y \in E \mid \|y - x\| = r\}.$$

▷ Pour tout partie A de E, on note $\overset{\circ}{A}$ l'intérieur de A, c'est-à-dire le plus grand ouvert (au sens de l'inclusion) inclus dans A, $\overline{A}$ l'adhérence de A, c'est-à-dire le plus petit fermé contenant A et $\mathrm{Fr}(A)$ la frontière de A :

$$\mathrm{Fr}(A) = \overline{A} \setminus \overset{\circ}{A}.$$

▷ Si a est un élément de E, on note $\mathscr{V}(a)$ l'ensemble des voisinages de a.

▷ Pour toute partie fermée et non vide F de E et tout $x \in E$, on admet sans démonstration que l'ensemble

$$\{\|x - f\|\ ,\ f \in F\}$$

admet une borne inférieure notée $\inf_{f \in F} \|x - f\|$ et on pose

$$d_F(x) = d(x,F) = \inf_{f \in F} \|x - f\|.$$

▷ On pose alors $\Gamma(x) = \{f \in F \mid \|x - f\| = d(x,F)\}$. C'est donc l'ensemble (éventuellement vide) des points de F pour lesquels la borne inférieure est atteinte.

- ▷ **Lorsque $\Gamma(x)$ est un singleton, on note $\pi(x)$ son unique élément.**
- ▷ Si u et v sont deux vecteurs de E, on appelle segment $[u,v]$ l'ensemble défini par :
$$[u,v] = \{x \in E \mid \exists t \in [0,1],\ x = (1-t)u + tv\}\,.$$
- ▷ Soient A une partie de E et $u : A \to \mathbb{R}$. On suppose que $0 \in \overline{A}$. On dit que $u(h) = \underset{h\to 0}{\circ}(\|h\|)$ lorsqu'il existe une fonction δ définie sur un voisinage V de 0 telle que
$$\forall h \in V \cap A,\ u(h) = \delta(h)\|h\| \quad \text{et} \quad \delta(h) \underset{h\to 0}{\longrightarrow} 0.$$
- ▷ Soient Ω une ouvert de E et $f : \Omega \to \mathbb{R}$. On rappelle que l'on dit que f est différentiable en un élément a de Ω lorsqu'il existe une forme linéaire $\ell : E \to \mathbb{R}$ vérifiant :
$$f(a+h) = f(a) + \ell(h) + \underset{h\to 0}{\mathrm{o}}(\|h\|)\,.$$
Lorsqu'elle existe, ℓ est unique et est notée $df(a)$ et l'image $\ell(h)$ du vecteur h de E par ℓ est notée $df(a)\cdot h$ le gradient de f en a est alors l'unique vecteur v de E vérifiant :
$$\forall h \in E,\ df(a)\cdot h = \langle v,h\rangle.$$
On le note $\nabla f(a)$. Ainsi, sous réserve d'existence, on a :
$$f(a+h) = f(a) + \langle \nabla f(a),h\rangle + \underset{h\to 0}{\mathrm{o}}(\|h\|)\,.$$
- ▷ Pour tout réel x, on note $\lfloor x \rfloor$ sa partie entière.

Le problème a pour objectif d'étudier la différentiabilité de la fonction $d_F : x \mapsto d(x,F)$ en fonction de la partie F.

On fixe donc une partie F de E **non vide** et **fermée**.

I Résultats préliminaires.

1. Montrer que, pour tout vecteur x de E, $d_F(x) = 0$ si et seulement si $x \in F$.

Montrons : $\forall x \in E,\ d_F(x) = 0 \Leftrightarrow x \in F$.

Soit $x \in E$.
$d_F(x) = 0 \Leftrightarrow x \in \overline{F}$.
Et comme $F = \overline{F}$ puisque F est fermé, finalement

$$\boxed{\forall x \in E,\ d_F(x) = 0 \Leftrightarrow x \in F.}$$

2. (a) Montrer que, pour tout $(x,y) \in E^2$ et tout $f \in F$, on a :

$$d_F(y) \leqslant \|y - x\| + \|x - f\|.$$

Soient $(x,y,f) \in E \times E \times F$.
Inégalité triangulaire :

$$\|y - f\| \leqslant \|y - x\| + \|x - f\| \quad (1)$$

Or :

$$\inf f \in F\|y - f\| \leqslant \|y - f\| \quad (2)$$

donc, par transitivité entre (1) et (2) :

$$\inf f \in F\|y - f\| \leqslant \|y - x\| + \|x - f\|$$

Autrement dit :

$$\boxed{\forall (x,y,f) \in E \times E \times F,\ d_F(y) \leqslant \|y - x\| + \|x - f\|.}$$

(b) En déduire que d_F est 1-lipschitzienne.

Soit $(x,y) \in E^2$.
D'après la question précédente :

$$\forall f \in F,\ d_F(y) \leqslant \|y - x\| + \|x - f\|.$$

Donc, en passant à la borne inférieure :

$$d_F(y) \leqslant \|y - x\| + \inf_{f \in F} \|x - f\|$$

Ce qui équivaut successivement à :

$$d_F(y) \leqslant \|y - x\| + d_F(x)$$
$$d_F(y) - d_F(x) \leqslant \|y - x\| \quad (3)$$

Par symétrie des rôles de x et y nous démontrerions tout aussi bien :

$$d_F(x) - d_F(y) \leqslant \|y - x\| \quad (4)$$

De (3) et (4) nous déduisons :

$$|d_F(y) - d_F(x)| \leqslant \|y - x\|$$

Ainsi :

$$\forall (x,y) \in E^2,\ |d_F(y) - d_F(x)| \leqslant \|y - x\|.$$

Autrement dit :

$$\boxed{d_F \text{ est 1-lipschitzienne sur } E.}$$

3. Soit x un vecteur de E et x_0 un vecteur de F. On pose $r = \|x - x_0\|$ et $K = \overline{B}(x,r) \cap F$.

   (a) Montrer que K est une partie compacte et non vide de E.

   * $x_0 \in F$ et $x_0 \in \overline{B}(x_0,r)$ donc $x_0 \in \overline{B}(x_0,r) \cap F$ et : $\overline{B}(x_0,r) \cap F \neq \emptyset$.
   * E est euclidien don E est isomorphe à $\mathbb{R}^n$. D'après le théorème de Borel-Lebesgue les compacts de E sont donc ses fermés bornés.
     Or $\overline{B}(x_0,r)$ et F sont des fermés donc $\overline{B}(x_0,r) \cap F$ est un fermé et $\overline{B}(x_0,r) \cap F$ est borné puisqu'inclus dans $\overline{B}(x_0,r)$, donc $\overline{B}(x_0,r) \cap F$ est une partie compacte.

   $$\boxed{\overline{B}(x_0,r) \cap F \text{ est un compact non vide.}}$$

   (b) Montrer que $\Gamma(x)$ est non vide.

   Démontrons l'existence et l'unicité d'un minimum pour d_F sur E.

   * Si $f \in F$ mais que $f \notin \overline{B}(x,r)$ alors $\|f - x\| > r = \|x_0 - x\| \geqslant d_F(x)$. Donc si d_F admet un minimum alors celui-ci est forcément atteint pour un élément de K.
   * Considérons $\psi : \left\{ \begin{array}{ccc} K & \to & [0,r] \\ y & \mapsto & \|x - y\| \end{array} \right.$. D'après l'inégalité triangulaire inversée : $|\psi(y) - \psi(z)| = \|x - y\| - \|x - z\|| \leqslant \|y - z\|$ quelque soient y et z dans E. Ainsi ψ est 1-lipschitzienne et donc continue sur K.
     L'image continue d'un compact étant un compact $\psi(K)$ est un segment de $\mathbb{R}$ et ψ atteint ses bornes. Donc il existe $y_0 \in K$ tel que : $\inf_{y \in K} \psi(y) = \psi(y_0)$.

Des deux points précédents nous déduisons : $\exists y_0 \in K$, $\|x - y_0\| = d_F(x)$.

$$\boxed{\Gamma(x) \text{ est non vide.}}$$

4. On suppose, *dans cette question seulement*, que F est en outre une partie convexe de E.

   (a) Montrer que, quelques soient les vecteurs u et v de E, on a : $\|u+v\|^2 + \|u-v\|^2 = 2\left(\|u\|^2 + \|v\|^2\right)$.

   Soit $(u,v) \in E^2$.
   $\|.\|$ étant la norme associée au produit scalaire ($i.e.$ $\|x\|^2 = \langle x|x\rangle$.), par bilinéarité et symétrie de ce dernier :

$$\|u+v\|^2 = \|u\|^2 + 2\langle u,v\rangle + \|v\|^2$$

   et

$$\|u-v\|^2 = \|u\|^2 - 2\langle u,v\rangle + \|v\|^2$$

   En sommant terme à terme les deux précédentes égalités :

$$\|u+v\|^2 + \|u-v\|^2 = \|u\|^2 + 2\langle u,v\rangle + \|v\|^2 + \|u\|^2 - 2\langle u,v\rangle + \|v\|^2$$

   Donc

$$\boxed{\forall (u,v) \in E^2,\ \|u+v\|^2 + \|u-v\|^2 = 2\left(\|u\|^2 + \|v\|^2\right).}$$

   (b) Soit x un vecteur de E et soient f et f' deux éléments de $\Gamma(x)$. On suppose $f \neq f'$.

   Montrer que : $\left\|\frac{1}{2}(f+f') - x\right\|^2 < d(x,F)^2$.

   En déduire que, pour tout vecteur x de E, $\Gamma(x)$ est un singleton.
   Ainsi, avec les notations de l'introduction, $\Gamma(x) = \{\pi(x)\}$.

   En utilisant la formule de la question précédente avec : $u = f - x$ et $v = f' - x$:

$$\|f - x + f' - x\|^2 + \|f - x - f' + x\|^2 = 2\left(\|f - x\|^2 + \|f' - x\|^2\right)$$

Puisque f et f' réalisent la distance minimale à F :

$$\|f+f'-2x\|^2+\|f-f'\|^2=4d_F(x)^2$$

Comme par hypothèse $f \neq f'$ (E étant séparé) $\|f-f'\|>0$.

$$\|f+f'-2x\|^2<4d_F(x)^2$$

ce qui équivaut successivement à

$$\frac{1}{4}\|f+f'-2x\|^2<d_F(x)^2$$

$$\boxed{\left\|\tfrac{1}{2}(f+f')-x\right\|^2<d_F(x)^2.}$$

Cette dernière inégalité est impossible car elle contredit la caractère minimal de f. En effet F étant supposé convexe, $\frac{1}{2}(f+f')$ est un élément de F pour lequel : $d\left(\frac{1}{2}(f+f'),x\right)<d_F(x)$.

> Nous avons donc démontré en raisonnant par l'absurde qu'il ne peut y avoir qu'un élément dans $\Gamma(x)$.

(c) On souhaite montrer que : $\forall x \in E$, $\forall f \in F$, $\langle f-\pi(x),x-\pi(x)\rangle \leqslant 0$. Pour cela on fixe des éléments x de E et f de F. On introduit la fonction

$$\varphi : \left\{\begin{array}{ccc} [0,1] & \to & \mathbb{R} \\ t & \mapsto & \|(1-t)\pi(x)+tf-x\|^2 \end{array}\right.$$

i. Montrer que φ est une fonction polynomiale de degré inférieur ou égal à 2.

Soit $t \in [0,1]$.

$$\begin{aligned}\varphi(t) &= \|t\,(f-\pi(x))+\pi(x)-x\|^2 \\ &= \|t\,(f-\pi(x))\|^2+2\langle t\,(f-\pi(x))\,|\pi(x)-x\rangle+\|\pi(x)-x\|^2 \\ &= \|f-\pi(x)\|^2t^2+2\langle f-\pi(x)|\pi(x)-x\rangle t+\|\pi(x)-x\|^2 \qquad (5)\end{aligned}$$

> φ est une fonction polynomiale de degré au plus 2.

ii. Justifier que φ admet un minimum en 0. Conclure.

Justifions que φ admet un minimum.

Soit $t \in [0,1]$.
F est convexe et $(\pi(x),f) \in F^2$ donc $(1-t)\pi(x) + tf \in F$.
Puisque $\pi(x)$ réalise la distance minimale à F :

$$d\left((1-t)\pi(x) + tf, x\right) \geqslant d\left(\pi(x), x\right).$$

Donc, la fonction carré étant croissante sur $\mathbb{R}_+$:

$$\varphi(t) \geqslant \varphi(0).$$

φ admet un minimum égale à $\|\pi(x) - x\|^2$ qui est atteint en 0.

Démontrons l'inégalité : $\langle f - \pi(x) | x - \pi(x) \rangle \leqslant 0$.

Distinguons deux cas.

* Si $f = \pi(x)$ alors l'inégalité à démontrer est triviale puisque $\langle f - \pi(x) | x - \pi(x) \rangle = 0$.
* Supposons $f \neq \pi(x)$. Dans ce cas φ est polynomiale de degré deux.

  Raisonnons géométriquement. La courbe représentative de $\tilde{\varphi}$ prolongement de φ à $\mathbb{R}$, est une parabole $\mathscr{P}$. $\mathscr{P}$ est orientée vers le haut car le coefficient dominant de $\tilde{\varphi}$ est $\|f - \pi(x)\| > 0$.
  Comme $\tilde{\varphi}$ admet un minimum en 0 sur $[0,1]$, $\tilde{\varphi}$ est nécessairement strictement croissante sur $[0,1]$.
  Donc le minimum absolue de $\tilde{\varphi}$ sur $\mathbb{R}$ est atteint en un nombre $\alpha \leqslant 0$.
  Cette dernière inégalité, compte tenu de l'expression développée réduite et ordonnée obtenue en (5), équivaut à

  $$-\frac{2\langle f - \pi(x) | \pi(x) - x \rangle}{2\|f - \pi(x)\|^2} \leqslant 0.$$

  Donc nécessairement : $\langle f - \pi(x) | \pi(x) - x \rangle \geqslant 0$.

Nous avons démontré :
$\forall (x,f) \in E \times F$, $\langle f - \pi(x) | x - \pi(x) \rangle \leqslant 0$.

(d) On fixe un vecteur x de E. Soit z un vecteur de F. On suppose que :

$$\forall f \in F,\ \langle f - z, x - z\rangle \leqslant 0.$$

Montrer que $z = \pi(x)$.

Soit $z \in F$.

Notons $\varphi_z : \left\{ \begin{array}{ccc} [0,1] & \to & \mathbb{R} \\ t & \mapsto & \|(1-t)z + tf - x\|^2 \end{array} \right.$

En raisonnant comme précédemment, puisque $\langle f - z, x - z\rangle \leqslant 0$, φ_z est croissante sur $[0,1]$, donc

$$\varphi_z(0) \leqslant \varphi_z(1)$$

i.e.

$$\|z - x\|^2 \leqslant \|f - x\|^2$$

Ainsi : $\forall f \in F,\ \|z - x\| \leqslant \|f - x\|$.

Autrement dit z est un élément de F qui réalise le minimum de la distance de x à F. $\Gamma(x)$ étant un singleton, nécessairement :

$$\boxed{z = \pi(x).}$$

II Étude en dimension 1.

On suppose *dans toute cette partie*, que $E = \mathbb{R}$, et que $\mathbb{R}$ est muni de sa structure euclidienne canonique.

5. Expliciter $d_{\{0\}}$, puis déterminer l'ensemble des points où $d_{\{0\}}$ est dérivable et déterminer sa dérivée.

$\forall x \in \mathbb{R},\ d_{\{0\}}(x) = |x - 0|$.

$$\boxed{\forall x \in \mathbb{R},\ d_{\{0\}}(x) = |x|.}$$

On en déduit :

$d_{\{0\}}$ est dérivable sur $\mathbb{R}^*$ et $d'_{\{0\}} = -1$ sur $\mathbb{R}^*_-$ et $d'_{\{0\}} = 1$ sur $\mathbb{R}^*_+$.

$d_{\{0\}}$ n'est pas dérivable en 0.

Dans les question 6 à 10, on suppose que $F = \mathbb{Z}$ et on étudie donc la fonction $d_{\mathbb{Z}}$.

6. Montrer que $\mathbb{Z}$ est fermé dans $\mathbb{R}$.

   Pour tout $n \in \mathbb{Z}$, $]n,n+1[$ est un ouvert.
   Donc : $\cup_{n\in\mathbb{Z}}]n,n+1[$ est un ouvert.
   D'où : $\complement_{\mathbb{R}} \cup_{n\in\mathbb{Z}}]n,n+1[$ est un fermé. Autrement dit :

   $\boxed{\mathbb{Z} \text{ est un fermé.}}$

7. Justifier que $d_{\mathbb{Z}}$ est 1-périodique. Étudier la parité.

   Clairement : $\forall x \in \mathbb{R}$, $d_{\mathbb{Z}}(x) = \min\left(x - \lfloor x \rfloor, \lfloor x \rfloor + 1 - x\right)$.
   Soit $x \in \mathbb{R}$.
   Puisque $\lfloor x+1 \rfloor = \lfloor x \rfloor + 1$,

   $$d_{\mathbb{Z}}(x+1) = d_{\mathbb{Z}}(x).$$

   $\boxed{d_{\mathbb{Z}} \text{ est 1-périodique.}}$

   Soit $x \in \mathbb{R}$.

   $$d_{\mathbb{Z}}(-x) = \min\left(-x - \lfloor -x \rfloor, \lfloor -x \rfloor + 1 - (-x)\right)$$

   Or $\lfloor -x \rfloor = -\lfloor x \rfloor - 1$ donc

   $$\begin{aligned} d_{\mathbb{Z}}(-x) &= \min\left(-x + \lfloor x \rfloor + 1, -\lfloor x \rfloor - 1 + 1 + x\right) \\ &= \min\left(\lfloor x \rfloor + 1 - x, x - \lfloor x \rfloor\right) \\ &= d_{\mathbb{Z}}(x) \end{aligned}$$

   Autrement dit :

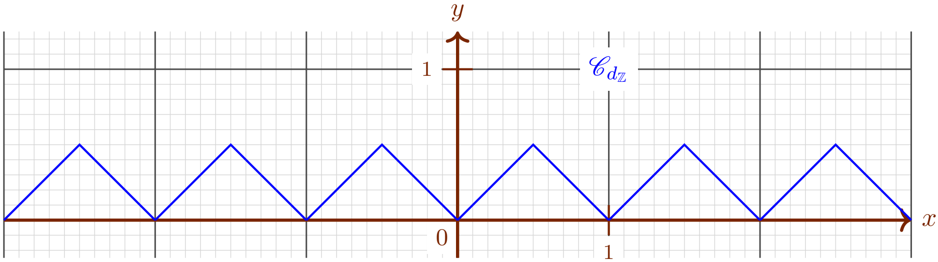
   $\boxed{d_{\mathbb{Z}} \text{ est paire.}}$

8. Pour tout x élément de $[0,1[$, expliciter, en justifiant, $d_{\mathbb{Z}}(x)$ en fonction de x. Tracer le graphe de $d_{\mathbb{Z}}$.

Puisque $d_{\mathbb{Z}}(x) = \min\left(x - \lfloor x \rfloor, \lfloor x \rfloor + 1 - x\right)$:

$$\boxed{d_{\mathbb{Z}}(x) = \begin{cases} x, \text{ si } x \in \left[0, \frac{1}{2}\right] \\ 1 - x, \text{ si } x \in \left]\frac{1}{2}; 1\right[\end{cases}.}$$

Le graphe de $d_{\mathbb{Z}}$ se déduit de celui de sa restriction à $[0;1[$ par translation du faite de la 1-périodicité.



9. Étudier la dérivabilité de $d_{\mathbb{Z}}$ en tout point de $[0,1[$.

   Avec l'expression trouvée à la question précédente il est aisé de déterminer la dérivabilité de $d_{\mathbb{Z}}$.
   Sur $\left]0, \frac{1}{2}\right[$, $d_{\mathbb{Z}}$ est dérivable et sa dérivée est constante égale à 1.
   Sur $\left]\frac{1}{2}, 1\right[$, $d_{\mathbb{Z}}$ est dérivable et sa dérivée est constante égale à -1.
   $d_{\mathbb{Z}}$ est dérivable à droite en 0 et en $\frac{1}{2}$ et

$$\left(d_{\mathbb{Z}}\right)'_d(0) = \left(d_{\mathbb{Z}}\right)'_d\left(\frac{1}{2}\right) = 1.$$

   $d_{\mathbb{Z}}$ est dérivable à gauche en $\frac{1}{2}$ et

$$\left(d_{\mathbb{Z}}\right)'_g = -1.$$

$$\boxed{d_{\mathbb{Z}} \text{ est dérivable sur } [0,1[\setminus \left\{\frac{1}{2}\right\}.}$$

10. Développement en série de Fourier de $d_{\mathbb{Z}}$.

    (a) Calculer les coefficients de Fourier de $d_{\mathbb{Z}}$.

    Soit $n \in \mathbb{Z}$.

$$\begin{aligned}
c_n(f) &= \frac{1}{T}\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f(t)\mathrm{e}^{-i\frac{2n\pi}{T}t}\ \mathrm{d}t \\
c_n\left(d_{\mathbb{Z}}\right) &= \int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} d_{\mathbb{Z}}(t)\mathrm{e}^{-i2n\pi t}\ \mathrm{d}t
\end{aligned}$$

D'après la relation de Chasles :

$$c_n\left(d_{\mathbb{Z}}\right) = \int_{-\frac{1}{2}}^{0} d_{\mathbb{Z}}(t)\mathrm{e}^{-i2n\pi t}\ \mathrm{d}t + \int_{0}^{\frac{1}{2}} d_{\mathbb{Z}}(t)\mathrm{e}^{-i2n\pi t}\ \mathrm{d}t$$

En procédant à un changement de variable d'intégration :

$$c_n\left(d_{\mathbb{Z}}\right) = \int_{0}^{\frac{1}{2}} d_{\mathbb{Z}}(-t)\mathrm{e}^{i2n\pi t}\ \mathrm{d}t + \int_{0}^{\frac{1}{2}} d_{\mathbb{Z}}(t)\mathrm{e}^{-i2n\pi t}\ \mathrm{d}t$$

Par parité de $d_{\mathbb{Z}}$:

$$c_n\left(d_{\mathbb{Z}}\right) = \int_{0}^{\frac{1}{2}} d_{\mathbb{Z}}(t)\mathrm{e}^{i2n\pi t}\ \mathrm{d}t + \int_{0}^{\frac{1}{2}} d_{\mathbb{Z}}(t)\mathrm{e}^{-i2n\pi t}\ \mathrm{d}t$$

Par linéarité de l'intégration :

$$\begin{aligned}
c_n\left(d_{\mathbb{Z}}\right) &= \int_{0}^{\frac{1}{2}} d_{\mathbb{Z}}(t)\left(\mathrm{e}^{i2n\pi t} + \mathrm{e}^{-i2n\pi t}\right)\ \mathrm{d}t \\
&= \int_{0}^{\frac{1}{2}} d_{\mathbb{Z}}(t)2\cos\left(2n\pi t\right)\ \mathrm{d}t \\
&= 2\int_{0}^{\frac{1}{2}} t\cos\left(2n\pi t\right)\ \mathrm{d}t
\end{aligned}$$

Si $n = 0$:

$$\begin{aligned}
c_0\left(d_{\mathbb{Z}}\right) &= 2\left[\frac{1}{2}t^2\right]_0^{\frac{1}{2}} \\
&= \frac{1}{4}
\end{aligned}$$

Supposons maintenant $n \neq 0$. Les fonctions composant l'intégrande sont de classe C^1, donc, en intégrant par parties :

$$\begin{aligned} c_n\left(d_{\mathbb{Z}}\right) &= 2\left(\left[\frac{1}{2n\pi} t \sin(2n\pi t)\right]_0^{\frac{1}{2}} - \int_0^{\frac{1}{2}} \frac{1}{2n\pi} \sin(2n\pi t)\, \mathrm{d}t\right) \\ &= 2\left(\frac{-1}{2n\pi}\left[-\frac{1}{2n\pi}\cos(2n\pi t)\right]_0^{\frac{1}{2}}\right) \\ &= \frac{2}{(2n\pi)^2}\left((-1)^n - 1\right) \end{aligned}$$

Finalement :

$$\boxed{\begin{gathered} c_0\left(d_{\mathbb{Z}}\right) = \tfrac{1}{4} \\ \text{et} \\ \forall n \in \mathbb{Z} \setminus \{0\},\ c_n\left(d_{\mathbb{Z}}\right) = \tfrac{(-1)^n - 1}{2n^2\pi^2}. \end{gathered}}$$

(b) La série de Fourier de $d_{\mathbb{Z}}$ converge-t-elle simplement / uniformément / normalement vers $d_{\mathbb{Z}}$?

Puisque $d_{\mathbb{Z}}$ est de classe $\mathcal{C}^1$ par morceaux sur $\mathbb{R}$ la série de Fourier converge simplement vers la normalisée de f. Comme de plus f est continue :

$$\boxed{\text{la série de Fourier converge simplement vers } d_{\mathbb{Z}} \text{ sur } \mathbb{R}.}$$

$d_{\mathbb{Z}}$ est continue et de classe $\mathcal{C}^1$ par morceaux sur $\mathbb{R}$ donc

$$\boxed{\text{la série de Fourier converge normalement vers } d_{\mathbb{Z}}.}$$

Et de la convergence normale nous déduisons que

$$\boxed{\text{la série de Fourier converge uniformément sur } \mathbb{R}.}$$

(c) En déduire la valeur de $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n+1)^2}$ puis de $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$, de $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n+1)^4}$ et de $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^4}$.

On commencera par justifier la convergence des séries.

* Puisque la série de Fourier converge simplement vers $d_{\mathbb{Z}}$ sur $\mathbb{R}$, en particulier en zéro :

$$d_{\mathbb{Z}}(0) = c_0\left(d_{\mathbb{Z}}\right) + \sum_{k=1}^{\infty} c_n\left(d_{\mathbb{Z}}\right) \mathrm{e}^{i2n\pi\times 0} + c_{-n}\left(d_{\mathbb{Z}}\right) \mathrm{e}^{-i2n\pi\times 0}$$

Autrement dit :

$$0 = \frac{1}{4} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n - 1}{2n^2\pi^2} + \frac{(-1)^{-n} - 1}{2(-n)^2\pi^2}$$

ce qui équivaut successivement à :

$$-\frac{1}{4} = \frac{1}{2\pi^2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{-2 + (-1)^n + (-1)^{-n}}{n^2}$$

En distinguant suivant la parité de n :

$$-\frac{1}{4} = \frac{1}{2\pi^2} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{-4}{(2k+1)^2}$$

$$\frac{\pi^2}{8} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{(2k+1)^2}$$

$$\boxed{\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n+1)^2} = \frac{\pi^2}{8} - 1.}$$

* La série $\sum_{n\geqslant 1} \frac{1}{n^\alpha}$ est convergente si et seulement si $\alpha > 1$ car cette série est de la même nature que l'intégrale généralisée de l'exemple de Riemann.

Soit $n \in \mathbb{N}$ avec $n \geqslant 3$.
En rassemblant les termes d'indices pairs et impairs successifs :

$$\sum_{k=1}^{2n+1} \frac{1}{k^2} = 1 + \sum_{h=1}^{n} \frac{1}{4h^2} + \frac{1}{(2h+1)^2}$$

$$\sum_{k=1}^{2n+1} \frac{1}{k^2} = 1 + \frac{1}{4} \sum_{h=1}^{n} \frac{1}{h^2} + \sum_{h=1}^{n} \frac{1}{(2h+1)^2}$$

Toutes les sommes intervenant dans cette égalité correspondent à des séries convergeantes donc :

$$\sum_{n\geqslant 1}\frac{1}{n^2}=1+\frac{1}{4}\sum n\geqslant 1\frac{1}{n^2}+\frac{\pi^2}{8}-1$$

Enfin :

$$\boxed{\sum_{n\geqslant 1}\frac{1}{n^2}=\frac{\pi^2}{6}.}$$

* Puisque $d_{\mathbb{Z}}$ est continue, nous pouvons utiliser l'égalité de Parseval-Bessel :

$$\|d_{\mathbb{Z}}\|_2^2=|c_0\left(d_{\mathbb{Z}}\right)|^2+\sum_{n\geqslant 1}|c_n\left(d_{\mathbb{Z}}\right)|^2+|c_{-n}\left(d_{\mathbb{Z}}\right)|^2$$

$$\int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}}|d_{\mathbb{Z}}(t)|^2\ \mathrm{d}t=\left(\frac{1}{4}\right)^2+\sum_{n\geqslant 1}\left|\frac{(-1)^n-1}{2n^2\pi^2}\right|^2+\left|\frac{(-1)^{-n}-1}{2(-n)^2\pi^2}\right|^2$$

$$2\int_0^{\frac{1}{2}}t^2\ \mathrm{d}t=\frac{1}{16}+\sum_{k\geqslant 0}\left|\frac{2}{2(2k+1)^2\pi^2}\right|^2+\left|\frac{2}{2(2k+1)^2\pi^2}\right|^2$$

$$2\left[\frac{1}{3}t^3\right]_0^{\frac{1}{2}}=\frac{1}{16}+\frac{2}{\pi^4}\sum_{k\geqslant 0}\frac{1}{(2k+1)^4}$$

$$\frac{1}{12}-\frac{1}{16}=\frac{2}{\pi^4}\sum_{k\geqslant 0}\frac{1}{(2k+1)^4}$$

$$\frac{1}{48}\cdot\frac{\pi^4}{2}=\sum_{k\geqslant 0}\frac{1}{(2k+1)^4}$$

$$\frac{\pi^4}{96}=\sum_{k\geqslant 0}\frac{1}{(2k+1)^4}$$

Enfin

$$\boxed{\sum_{n\geqslant 1}\frac{1}{(2n+1)^2}=\frac{\pi^4}{96}-1.}$$

* La série $\sum_{n\geqslant 1}\frac{1}{n^\alpha}$ est convergente si et seulement si $\alpha>1$ car cette série est de la même nature que l'intégrale généralisée de l'exemple de Riemann.

Soit $n \in \mathbb{N}$.
En rassemblant les termes d'indices pairs et impairs successifs :

$$\sum_{k=1}^{2n+1} \frac{1}{k^4} = 1 + \sum_{h=1}^{n} \frac{1}{16h^4} + \frac{1}{(2h+1)^4}$$
$$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^4} = \frac{1}{16} \sum_{h=1}^{n} \frac{1}{h^4} + \sum_{h=0}^{n} \frac{1}{(2k+1)^4}$$

Toutes les sommes intervenant dans cette égalité correspondent à des séries convergentes donc :

$$\sum_{n\geqslant 1} \frac{1}{n^4} = \frac{1}{16} \sum_{n\geqslant 1} \frac{1}{n^4} + \sum_{n\geqslant 0} \frac{1}{(2k+1)^4}$$
$$\frac{15}{16} \sum_{n\geqslant 1} \frac{1}{n^4} = \frac{\pi^4}{96}$$

$$\boxed{\sum_{n\geqslant 1} \frac{1}{n^4} = \frac{\pi^4}{96}.}$$

Pour toute la suite de la partie, on fixe une partie fermée F de $\mathbb{R}$. On note Ω le complémentaire de F. C'est donc une partie ouverte de $\mathbb{R}$.

11. On définie sur Ω une relation binaire $\sim$ de la manière suivante : étant donnés deux éléments x et y de Ω, on dit que x est en relation avec y lorsqu'il existe un intervalle ouvert $]a,b[$ inclus dans Ω et contenant les éléments x et y :

$$\forall (x,y) \in \Omega^2,\ x \sim y \Leftrightarrow \left(\exists (a,b) \in \mathbb{R}^2,\ a < b \text{ et } (x,y) \in]a,b[^2 \text{ et }]a,b[\subset \Omega\right).$$

   (a) Montrer que $\sim$ est une relation d'équivalence.

   $\sim$ est clairement réflexive et symétrique.

   Soient $(x,y,z) \in \Omega^3$ avec $x \sim y$ et $y \sim z$.
   Notons a, b, c et d des éléments de Ω tels que $(x,y) \in]a,b[$ et $(y,z) \in]c,d[$.
   Puisque $y \in]a,b[\cap]c,d[$, $]a,b[\cap]c,d[\neq \emptyset$. Donc $]a,b[\cup]c,d[$ est un intervalle ouvert. Comme $]a,b[\subset \Omega$ et $]c,d[\subset \Omega$, $]a,b[\cap]c,d[$ est un intervalle de Ω qui contient x et y.

Autrement dit : $x \sim z$.

Par conséquent $\sim$ est transitive.

$\sim$ est une relation d'équivalence.

(b) Montrer que les classes d'équivalences sont des intervalles ouverts deux à deux disjoints.

* Par construction tout élément d'une classe d'équivalence admet un voisinage ouvert (l'intervalle $]a,b[$) donc toute classe d'équivalence est un ouvert de $\mathbb{R}$.
* En raisonnant comme pour établir la transitivité il est aisé de s'assurer qu'une classe d'équivalence est connexe par arcs donc connexe. Les parties connexes de $\mathbb{R}$ sont les intervalles.
* Les classes d'équivalences formant une partition sont nécessairement disjointes deux à deux.

Les classes d'équivalences sont des intervalles deux à deux disjoints.

(c) En déduire qu'il existe une famille $(]a_i,b_i[)_{i\in I}$ d'intervalles ouverts deux à deux disjoints, indexée par un ensemble I fini ou dénombrable telle que

$$\Omega = \bigcup_{i\in I}]a_i,b_i[.$$

Les classes d'équivalences sont disjointes donc non vides. Soit $]a,b[$ une telle classe d'équivalence. Par densité de $\mathbb{Q}$ dans $\mathbb{R}$, il existe $q \in \mathbb{Q}\cap]a,b[$. Notons I l'ensemble des éléments q ainsi obtenus pour chaque classe $]a,b[$ et notons alors $a_q = a$ et $b_q = b$.

Par construction :

$(]a_q,b_q[)_{q\in I\subset\mathbb{Q}}$ est une partition de Ω.

12. Soit x un élément de Ω. Il existe donc un unique i_0 élément de I tel que $x \in]a_{i_0},b_{i_0}[$.

(a) Exprimer $d_F(x)$ à l'aide de x, de a_{i_0} et b_{i_0}.

Comme à la question 7 :$d_F(x) = \min\left(x - a_{i_0}, b_{i_0} - x\right)$, ou comme à la question 8 :

$$\boxed{d_F(x) = \begin{cases} x - a_{i_0} & \text{si} \quad x \in \left]a_{i_0}, \frac{a_{i_0}+b_{i_0}}{2}\right] \\ b_{i_0} - x & \text{si} \quad x \in \left]\frac{a_{i_0}+b_{i_0}}{2}, b_{i_0}\right[\end{cases}.}$$

(b) Étudier la dérivabilité de d_F en x.

D'après la question précédente $d_{\mathbb{Z}}$ est une application affine par morceaux sur $]a_{i_0}, b_{i_0}[$.
Notons $m_0 = \frac{a_{i_0}+b_{i_0}}{2}$.

* d_F est dérivable sur $]a_{i_0}, m_0[$ et pour tout $x \in]a_{i_0}, m_0[$: $d'_F(x) = 1$.
* d_F est dérivable sur $]m_0, b_{i_0}[$ et pour tout $x \in]m_0, b_{i_0}[$: $d'_F(x) = -1$.
* $\lim_{\substack{x \to m_0 \\ x < m_0}} \frac{d_F(x) - d_F(m_0)}{x - m_0} = 1$
* $\lim_{\substack{x \to m_0 \\ x > m_0}} \frac{d_F(x) - d_F(m_0)}{x - m_0} = -1$

$$\boxed{\begin{array}{c} d_F \text{ est dérivable sur }]a_{i_0}, m_0[\text{ et }]m_0, b_{i_0}[\text{ et :} \\ \forall x \in]a_{i_0}, m_0[,\ d'_F(x) = 1, \\ \forall x \in]m_0, b_{i_0}[,\ d'_F(x) = -1. \end{array}}$$

13. On suppose dans cette question que $\overset{\circ}{F} \neq \varnothing$. Soit x un élément de $\overset{\circ}{F}$. Étudier la dérivabilité de d_F en x.

Puisque $\overset{\circ}{F} \neq \emptyset$ et $x \in \overset{\circ}{F}$ sur l'ouvert $\overset{\circ}{F}$, d_F est identiquement nulle.

$$\boxed{d_F \text{ est dérivable sur } \overset{\circ}{F} \text{ est sa dérivée est la fonction nulle.}}$$

14. Étude à la frontière.

(a) On suppose, *dans cette question*, que $F = [0,1]$. Expliciter $\mathrm{Fr}(F)$.
d_F est-elle dérivable en tout point de $\mathrm{Fr}(F)$?

$\overset{\circ}{F} =]0{,}1[$, donc $\mathrm{Fr}(F) = \{0{,}1\}$.
D'après la question 12, $(d_F)'_g(0) = (d_F)'_g(0) - 1$ et d'après la question 13, $(d_F)'_d(0) = 0$ donc d_F n'est pas dérivable en 0.
De même : $(d_F)'_g(1) = 0$ et $(d_F)'_d(1) = 1$ donc d_F n'est pas dérivable en 1.

$$\boxed{d_F \text{ n'est dérivable en aucun point de } \mathrm{Fr}(F).}$$

(b) *Dans cette question*, on pose : $F = \mathbb{R} \setminus \Omega$ où $\Omega = \bigcup_{n \geqslant 2} \left] \frac{1}{n} - \frac{1}{n^3}, \frac{1}{n} \right[$, la réunion étant prise sur l'ensemble des entiers naturels n tels que $n \geqslant 2$.

i. Justifier rapidement que $\Omega \subset \left] 0, \frac{1}{2} \right[$, que F est un fermé de $\mathbb{R}$ et que $0 \in \mathrm{Fr}(F)$.

Ω est une réunion d'ouverts donc est un ouvert. Donc son complémentaire dans $\mathbb{R}$,

$$\boxed{F, \text{ est un fermé.}}$$

Soit $n \geqslant 2$.

$$0 < \frac{1}{n} \leqslant \frac{1}{2}.$$

et

$$0 < \frac{1}{n} - \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n^3} \right) = \frac{1}{n^3} \leqslant \frac{1}{8} < \frac{1}{2}.$$

Donc : $\Omega \subset \left[0, \frac{1}{2}\right]$ et comme une réunion d'ouvert est un ouvert : $\Omega \subset \left(\left[0, \frac{1}{2}\right]\right)^\circ$. Donc :

$$\boxed{\Omega \subset \left]0, \tfrac{1}{2}\right[.}$$

Nous déduisons de ce qui précède que $0 \in F$.
De plus $0 \in \overline{\Omega}$ car 0 est limite de la suite $\left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n^3}\right)_{n \geqslant 2}$. Donc $0 \notin \complement_{\mathbb{R}} \overline{\Omega} = \left(\complement_{\mathbb{R}} \Omega\right)^\circ = \overset{\circ}{F}$.

$$\boxed{0 \in \mathrm{Fr}(F).}$$

ii. Soit $x \in \Omega$. Montrer qu'il existe un unique entier naturel n tel que $n \geqslant 2$ et $x \in \left]\frac{1}{n} - \frac{1}{n^3}, \frac{1}{n}\right[$.

Montrer que $n = \left\lfloor \frac{1}{x} \right\rfloor$.

Montrons que les $\left]\frac{1}{n} - \frac{1}{n^3}, \frac{1}{n}\right[$ sont deux à deux disjoints pour $n \geqslant 2$.

Soit $n \geqslant 2$.

$$\begin{aligned}
\frac{1}{n} - \frac{1}{n^3} - \frac{1}{n+1} &= \frac{n^2(n+1) - (n+1) - n^3}{n^3(n+1)} \\
&= \frac{n^2 - n - 1}{n^3(n+1)}
\end{aligned}$$

$X^2 - X - 1 = \left(X - \frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)\left(X - \frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)$. Comme $2 > \frac{1+\sqrt{5}}{2}$ donc $n^2 - n - 1 > 0$ si $n \geqslant 2$.
Ainsi : $\frac{1}{n+1} < \frac{1}{n} - \frac{1}{n^3}$ et donc

$$\boxed{\text{les } \left]\tfrac{1}{n} - \tfrac{1}{n^3}, \tfrac{1}{n}\right[\text{ sont disjoints deux à deux.}}$$

Donc il existe un unique $n \geqslant 2$ tel que $x \in \left]\frac{1}{n} - \frac{1}{n^3}, \frac{1}{n}\right[$.

De plus, d'après ce qui précède,

$$\frac{1}{n+1} < \frac{1}{n} - \frac{1}{n^3} < x < \frac{1}{n}.$$

Donc

$$n + 1 > x > n.$$

Par conséquent

$$\boxed{n = \left\lfloor \tfrac{1}{x} \right\rfloor.}$$

iii. En déduire qu'il existe un réel C strictement positif tel que $\forall x \in \left]0,\dfrac{1}{2}\right[$, $d_F(x) \leqslant Cx^3$.

Soit $x \in \left]0,\frac{1}{2}\right[$.

* Premier cas : $x \in \left]0,\frac{1}{2}\right[\cap F$.
  Alors $d_F(x) = 0$ et l'inégalité proposée est vraie quelque soit C.
* Seconde cas : $x \in \left]0,\frac{1}{2}\right[\cap F$.
  D'après les questions précédentes, il existe $n \geqslant 2$ tel que $x \in \left]\frac{1}{n} - \frac{1}{n^3},\frac{1}{n}\right[$.
  Donc :

$$\begin{aligned} d_F(x) &\leqslant \frac{1}{2}\left[\frac{1}{n} - \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n^3}\right)\right] \\ &\leqslant \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{n^3} \end{aligned}$$

Puisque $n = \left\lfloor \frac{1}{x} \right\rfloor$:

$$d_F(x) \leqslant \frac{1}{2}x^3$$

$$\boxed{\forall x \in \left]0,\tfrac{1}{2}\right[,\ d_F(x) \leqslant \tfrac{1}{2}x^3.}$$

iv. Montrer que d_F est dérivable à droite en 0 et en calculer $(d_F)'_d(0)$.

D'après la question 14.(b)i, $0 \in F$ donc $d_F(0) = 0$:

$$\begin{aligned} \frac{d_F(x) - d_F(0)}{x - 0} &= \frac{d_F(x)}{x} \\ &\leqslant \frac{1}{2}x^2 \end{aligned}$$

D'où $\frac{d_F(x)-d_F(0)}{x-0} \underset{\substack{x\to 0\\ x>0}}{\longrightarrow} 0$.

$$\boxed{d_F \text{ est dérivable à droite en } 0 \text{ et } (d_F)'_d(0) = 0.}$$

v. d_F est-elle dérivable en 0 ?

Puisque $d_F(x) = 0$ pour tout $x \in F$, d_F est dérivable à gauche en 0 et $(d_F)'_g(0) = 0$.
En tenant compte du résultat de la question précédente :

$$\boxed{d_F \text{ est dérivable en } 0.}$$

III Étude de cas particuliers en dimension n.

15. On fixe un vecteur x_0 de E et on suppose, *dans cette question seulement*, que $F = \{x_0\}$.

(a) Expliciter d_F. Soit x un élément de E. Expliciter $\Gamma(x)$.

$$\boxed{d_F(x) = \|x - x_0\|.}$$

Si $\|x - x_0\| = 0$ alors $x = x_0$. la réciproque étant immédiate :

$$\boxed{\Gamma(x) = \{x\}.}$$

(b) Montrer que la fonction $g : \left\{ \begin{array}{ccc} E & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \|x - x_0\|^2 \end{array} \right.$ est différentiable sur E et calculer son gradient.

Soient $(x,h) \in E^2$.

$$\begin{aligned} g(x+h) &= \|x + h - x_0\|^2 \\ &= \|x - x_0 + h\|^2 \end{aligned}$$

Par bilinéarité et symétrie du produit scalaire :

$$g(x+h) = \|x - x_0\|^2 + 2\langle x - x_0 | h\rangle + \|h\|^2$$
$$g(x+h) = g(x) + \langle 2(x - x_0) | h\rangle + \underset{h \to 0}{\mathrm{o}}(\|h\|)$$

Donc

$$\boxed{g \text{ est dérivable en tout } x \text{ de } E \text{ et } \nabla f(x) = 2(x - x_0).}$$

(c) En déduire que d_F est différentiable sur $E \setminus \{x_0\}$ et montrer que :

$$\forall a \in E \setminus \{x_0\},\ \nabla d_F(a) = \frac{1}{\|a - x_0\|}(a - x_0).$$

De façon générale pour f et g différentiables, $f \circ g$ est différentiable et :

$$\mathrm{d}(f \circ g)_a = \mathrm{d}f_{g(a)} \circ \mathrm{d}g_a$$

Donc $d_F = \sqrt{g}$ est différentiable sur $E \setminus \{x_0\}$:

$$\begin{aligned}
\mathrm{d}\left(d_F(a)\right) &= \mathrm{d}(\sqrt{g})_a(h) \\
&= \frac{1}{2\sqrt{g(a)}} \times \langle 2(a - x_0)|h\rangle \\
&= \frac{1}{2\sqrt{\|a - x_0\|^2}} \times \langle 2(a - x_0)|h\rangle \\
&= \left\langle \frac{1}{\|a - x_0\|}(a - x_0)|h \right\rangle
\end{aligned}$$

Ainsi :

$$\boxed{\begin{array}{c} d_F \text{ est différentiable sur } E \setminus \{x_0\} \text{ et} \\ \forall a \in E \setminus \{x_0\},\ \nabla d_F(a) = \frac{1}{\|a - x_0\|}(a - x_0). \end{array}}$$

(d) Étude de la différentiabilité de d_F en x_0. Supposons que d_F soit différentiable en x_0.

i. Montrer que, pour tout vecteur h de E, on a :

$$d_F(x_0 + th) = t\langle \nabla d_F(x_0), h\rangle + \underset{t \to 0}{\mathrm{o}}(t).$$

Puisque d_F est supposée différentiable en x_0 quelque soit $h \in E$:

$$d_F(x_0 + h) = d_F(x_0) + \langle \nabla d_F(x_0), h\rangle + \underset{h \to 0}{\mathrm{o}}(\|h\|)$$

Puisque $x_0 \in F$:

$$d_F(x_0 + h) = \langle \nabla d_F(x_0), h\rangle + \underset{h \to 0}{\mathrm{o}}(\|h\|)$$

Soit $h \in E$. Comme $th \underset{t\to 0}{\longrightarrow} 0$:

$$d_F(x_0 + th) = \langle \nabla d_F(x_0), th\rangle + \underset{t\to 0}{\mathrm{o}}(\|th\|)$$

Finalement, par bilinéarité du produit scalaire :

$$\boxed{\forall h \in E,\ d_F(x_0 + th) = t\langle \nabla d_F(x_0), h\rangle + \underset{t\to 0}{\mathrm{o}}(t).}$$

ii. Conclure.

Soit $h \in E$.
De la question précédente nous déduisons :

$$\begin{aligned} \|x_0 + th - x_0\| &= t\langle \nabla d_F(x_0)|h\rangle + \underset{t\to 0}{\mathrm{o}}(t) \\ |t| \cdot \|h\| &= t\langle \nabla d_F(x_0)|h\rangle + \underset{t\to 0}{\mathrm{o}}(t) \\ \|h\| &= \mathrm{sgn}(t)\langle \nabla d_F(x_0)|h\rangle + \underset{t\to 0}{\mathrm{o}}(1) \end{aligned}$$

Puisque $\|h\| \geqslant 0$, nécessairement, $\langle \nabla d_F(x_0)|h\rangle = 0$.
Ainsi : $\forall h \in E$, $\langle \nabla d_F(x_0)|h\rangle = 0$, donc $\nabla d_F(x_0) = 0$.

D'après la question 15.(c) $\|\nabla d_F(a)\| = 1$ pour tout $a \in E \setminus \{x_0\}$. Nous en déduisons (la norme étant continue) : $\|\nabla d_F(a)\| \underset{a\to x_0}{\longrightarrow} 1$ ce qui contredit la nullité du gradient en x_0.

Supposer que d_F est différentiable en x_0 conduit à une contradiction.

$$\boxed{\text{Nous avons démontré en raisonnant par l'absurde que } d_F \text{ n'est pas différentiable en } x_0.}$$

16. On suppose, *dans cette question seulement*, que F est un sous-espace vectoriel de E, distinct de E.

    (a) Montrer que pour tout vecteur x de E, $\Gamma(x)$ est un singleton, et que π (défini dans le préambule du sujet) est le projecteur orthogonal sur F.

    Soit $x \in E$.

* Notons p la projection orthogonale sur F.
Soit $f \in F$.
Montrons que $p(f) \in \Gamma(x)$.

Puisque par construction $(x - p(x)) \perp (p(x) - f)$, d'après le théorème de Pythagore :

$$\|x - f\|^2 = \|x - p(x)\|^2 + \|p(x) - f\|^2 \quad (6)$$

D'où successivement :

$$\|x - f\|^2 \geqslant \|x - p(x)\|^2$$
$$\|x - f\| \geqslant \|x - p(x)\|$$

Donc :

$$d_F(x) \geqslant \|x - p(x)\|$$

Par conséquent $p(x) \in \Gamma(x)$.

* Montrons que $\Gamma(x)$ est un singleton.

Si $f \in \Gamma(x) \subset F$, alors $\|x - f\| = \|x - p(x)\|$ donc, d'après (6), $\|p(x) - f\| = 0$ et donc $p(x) = f$.

$$\boxed{\forall x \in E,\ \Gamma(x) = \{\pi(x)\}.}$$

(b) Montrer que pour tout a de E, d_F^2 est différentiable en a et calculer son gradient.

Soient $(a,h) \in E^2$.
D'après la question précédente

$$\begin{aligned}
d_F^2(a+h) &= \|a + h - \pi(a+h)\|^2 \\
&= \|a - \pi(a) + h - \pi(h)\|^2 \\
&= \|a - \pi(a)\|^2 + 2\langle a - \pi(a) | h - \pi(h)\rangle + \|h - \pi(h)\|^2 \\
&= d_F^2(a) + 2\langle a - \pi(a) | h\rangle - 2\langle a - \pi(a) | \pi(h)\rangle + \|h - \pi(h)\|^2
\end{aligned}$$

Puisque $a - \pi(a) \in F^{\perp}$ et $\pi(h) \in F$:

$$d_F^2(a+h) = d_F^2(a) + \langle 2(a-\pi(a))|h\rangle + \|h-\pi(h)\|^2$$

De plus :

$$\begin{aligned}\|h-\pi(h)\|^2 &\leqslant \|h\|^2 + \|\pi(h)\|^2\\ &\leqslant 2\|h\|^2\\ &\leqslant \|h\|\delta(h)\end{aligned}$$

avec $\delta(h) \underset{h\to 0}{\longrightarrow} 0$.

Donc :

$$d_F^2(a+h) = d_F^2(a) + \langle 2(a-\pi(a))|h\rangle + \underset{h\to 0}{\mathrm{o}}(\|h\|)\,.$$

$$\boxed{\text{pour tout } a \in E,\ d_F^2 \text{ est différentiable en } a \text{ et } \nabla d_F(a) = 2(a-\pi(a)).}$$

(c) En déduire, que pour tout élément de a de $E \setminus F$, d_F est différentiable en a et calculer son gradient.

Procédons comme à la question 15.(c).
Soit $a \in E \setminus F$.

$d_F = \sqrt{d_F^2}$ est différentiable sur $E \setminus F$:

$$\begin{aligned}\mathrm{d}\left(d_F\right)(a) &= \mathrm{d}\left(\sqrt{d_F^2}\right)_a(h)\\ &= \frac{1}{2\sqrt{d_F^2(a)}} \times \langle 2(a-\pi(a)) \mid h\rangle\\ &= \frac{1}{2\sqrt{\|a-\pi(a)\|^2}} \times \langle 2(a-\pi(a)) \mid h\rangle\\ &= \left\langle \frac{1}{\|a-\pi(a)\|}(a-\pi(a)) \,\middle|\, h\right\rangle\end{aligned}$$

Ainsi :

$$d_F \text{ est différentiable sur } E \setminus F \text{ et}$$
$$\forall a \in E \setminus F,\ \nabla d_F(a) = \frac{1}{\|a-\pi(a)\|}(a-\pi(a)).$$

(d) On fixe un vecteur a de F. L'objet de cette question est l'étude de la différentiabilité de d_F en a.

i. On suppose que d_F est différentiable en a et on pose : $u = \nabla\left(d_F\right)(a)$. Soit $h \in F^{\perp}$. Montrer que : $\langle u,h\rangle = \|h\|$.
Indication : *on pourra procéder de manière analogue à la question 15.d.*

Soit $t \in \mathbb{R}$.
Puisque d_F est supposé différentiable en a :

$$d_F(a+th) = d_F(a) + \langle u|th\rangle + \underset{t\to 0}{\mathrm{o}}(t)$$

$a \in F$ donc $d_F(a) = 0$ et :

$$d_F(a+th) = \langle u|th\rangle + \underset{t\to 0}{\mathrm{o}}(t) \qquad (7)$$

D'après la question 16.(a) :

$$d_F(a+th) = \|a+th-\pi\left(a+th\right)\|$$

et puisque $a \in F$ et $th \in F^{\perp}$:

$$d_F(a+th) = \|th\|$$

En substituant dans (7) :

$$\|th\| = \langle u|th\rangle + \underset{t\to 0}{\mathrm{o}}(t)$$
$$|t|\cdot\|h\| = t\langle u|h\rangle + \underset{t\to 0}{\mathrm{o}}(t)$$
$$\|h\| = \mathrm{sgn}(t)\langle u|h\rangle + \underset{t\to 0}{\mathrm{o}}(1)$$

En particulier en passant à la limite quand t tend vers 0 par valeurs strictement positives :

$$\boxed{\|h\| = \langle u|h\rangle.}$$

ii. Conclure.

17. Dans cette question, on suppose que $E = \mathbb{R}^2$, dont les éléments sont notés en colonne, muni de sa structure euclidienne canonique et que :

$$F = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2 \;\middle|\; y \leqslant 0 \quad \text{ou} \quad y \geqslant x^2 \right\}.$$

L'objet de cette question est d'étudier la différentiabilité de d_F en $0_{\mathbb{R}^2}$.

(a) Dessiner l'allure de F.

(b)