Concours : AGRÉGATION INTERNE et CAERPA

Section : Mathématiques

Session 2019

Rapport de jury présenté par : Erick ROSER

Président du jury

Table des matières

Chapitre 1

Généralités et statistiques

1.1 Déroulement de la session 2019

Les épreuves écrites ont eu lieu les 24 et 25 janvier 2019, la liste d'admissibilité a été signée le 19 mars 2019 avec :
- agrégation interne : 343 admissibles ;
- CAERPA : 53 admissibles.

Les épreuves orales se sont déroulées du 20 au 29 avril 2019, à l'université Paris Diderot-Paris 7, bâtiment Sophie Germain, à Paris 13ème.

La liste d'admission a été signée le 30 avril 2019 avec l'inscription de :
- agrégation interne : 160 admis ;
- CAERPA : 18 admis.

Tous les postes mis au concours de l'agrégation interne et du CAERPA ont été pourvus.

1.2 Préparation des candidats

La plupart des candidats admissibles aussi bien à l'agrégation interne qu'au CAERPA ont montré un niveau de préparation satisfaisant.

Nombreux sont ceux qui se préparent sur plusieurs années, ce qui est tout à fait raisonnable compte tenu du niveau d'exigence du concours et de la charge de travail que cela suppose. On observe ainsi que :

- 59 % des présents à la session 2019 avaient déjà participé aux épreuves écrites de la session 2018, soit 860 candidats ;
- 67% des admissibles de la présente session étaient déjà candidats l'an dernier (présents à l'écrit), soit 265 candidats parmi lesquels 120 ont été admis ;
- sur les 393 admissibles de la session 2019, 127 avaient été admissibles à la session 2018 (parmi lesquels 68 ont été admis).

1.3 Historique des concours (nombre de postes, d'admissibles ...)

Agrégation interne

Année	Postes	Inscrits	Présents Écrit	Admissibles	Admis
2000	130	1868	1257	327	130
2001	129	1944	1419	289	125
2002	129	1845	1400	288	129
2003	130	1842	1479	288	130
2004	130	1813	1382	287	130
2005	138	1897	1401	311	138
2006	110	2172	1599	273	110
2007	107	2198	1627	267	107
2008	107	2195	1682	257	107
2009	107	2124	1559	258	107
2010	114	2229	1426	267	114
2011	116	2442	1359	263	116
2012	125	2324	1589	281	125
2013	135	2266	1510	303	135
2014	130	2290	1495	302	130
2015	145	2317	1501	332	145
2016	148	2299	1510	333	148
2017	155	2248	1349	329	155
2018	155	2090	1280	330	155
2019	160	2071	1251	340	160

CAERPA

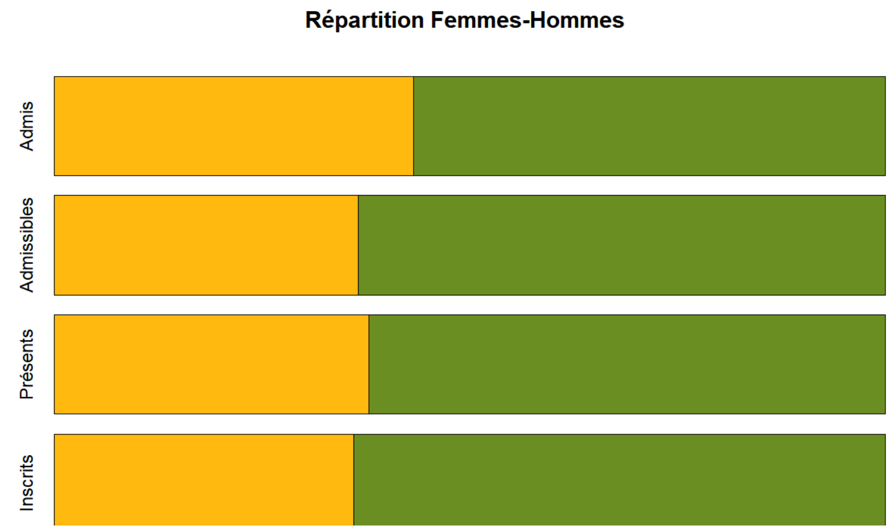
Année	Contrats	Inscrits	Présents Écrit	Admissibles	Admis
2000	27	359	246	46	24
2001	25	383	268	35	18
2002	23	326	229	22	10
2003	20	325	258	27	15
2004	24	311	241	21	9
2005	19	297	211	27	12
2006	19	329	240	18	13
2007	20	319	221	11	5
2008	15	356	258	22	11
2009	14	305	212	26	12
2010	12	346	207	17	8
2011	11	427	213	19	11
2012	13	350	228	29	13
2013	18	320	201	35	18
2014	19	317	217	32	14
2015	20	322	203	34	12
2016	13	335	214	35	13
2017	16	338	200	47	16
2018	17	353	205	55	17
2019	18	354	211	53	18

1.4 Statistiques

1.4.1 Répartition femmes-hommes

Pour l'ensemble des deux concours, le pourcentage de femmes parmi les candidats présents à l'écrit est resté relativement stable (37,9%). On note une augmentation significative du pourcentage de femmes parmi les admissibles (36,6% contre 31,9% en 2018). La proportion de femmes parmi les admis se stabilise avec 43,3% de reçues contre 44,8% en 2018, 39,8% en 2017 et 30,4% en 2016.

	Agrégation interne			CAERPA		
	Femmes	Hommes	Total	Femmes	Hommes	Total
Inscrits	727	1344	2071	148	206	354
Présents	462	789	1251	92	119	211
Admissibles	124	216	340	20	33	53
Admis	67	93	160	10	8	18



1.4.2 Répartition par âge

Pour l'ensemble des deux concours, l'âge moyen des candidats présents est de 41,9 ans (40 ans pour les femmes et 43 ans pour les hommes). Les admissibles ont en moyenne 41,3 ans (40,4 ans pour les femmes et 41,8 ans pour les hommes) et les admis ont respectivement 41 ans, 40,9 ans et 41 ans. Ainsi, conformément à leur vocation, les concours internes de l'agrégation s'adressent principalement à des professeurs confirmés dans leur carrière, comme l'attestent les diagrammes en boîte et les tableaux suivants.

Ensemble des deux concours

Âge	moyen	minimum	1er quartile	médian	3e quartile	maximum
Candidats	41.9	23.2	35.4	41.6	47.4	65.4
Femmes	40	23.2	33.7	39.5	45.3	65.2
Hommes	43	24	36.5	42.8	48.9	65.4
Présents	41.9	23.2	35.4	41.6	47.4	65.4
Femmes	40	23.2	33.7	39.5	45.3	65.2
Hommes	43	24	36.5	42.8	48.9	65.4
Admissibles	41.3	27.2	36.1	41.4	45.9	61.1
Femmes	40.4	27.2	35.4	41	45.1	53.8
Hommes	41.8	28.5	36.4	41.9	46.9	61.1
Admis	41	28.2	35.8	41.1	45.6	60.3
Femmes	40.9	28.2	35.7	41.7	45.1	52.8
Hommes	41	28.5	35.8	41	45.7	60.3

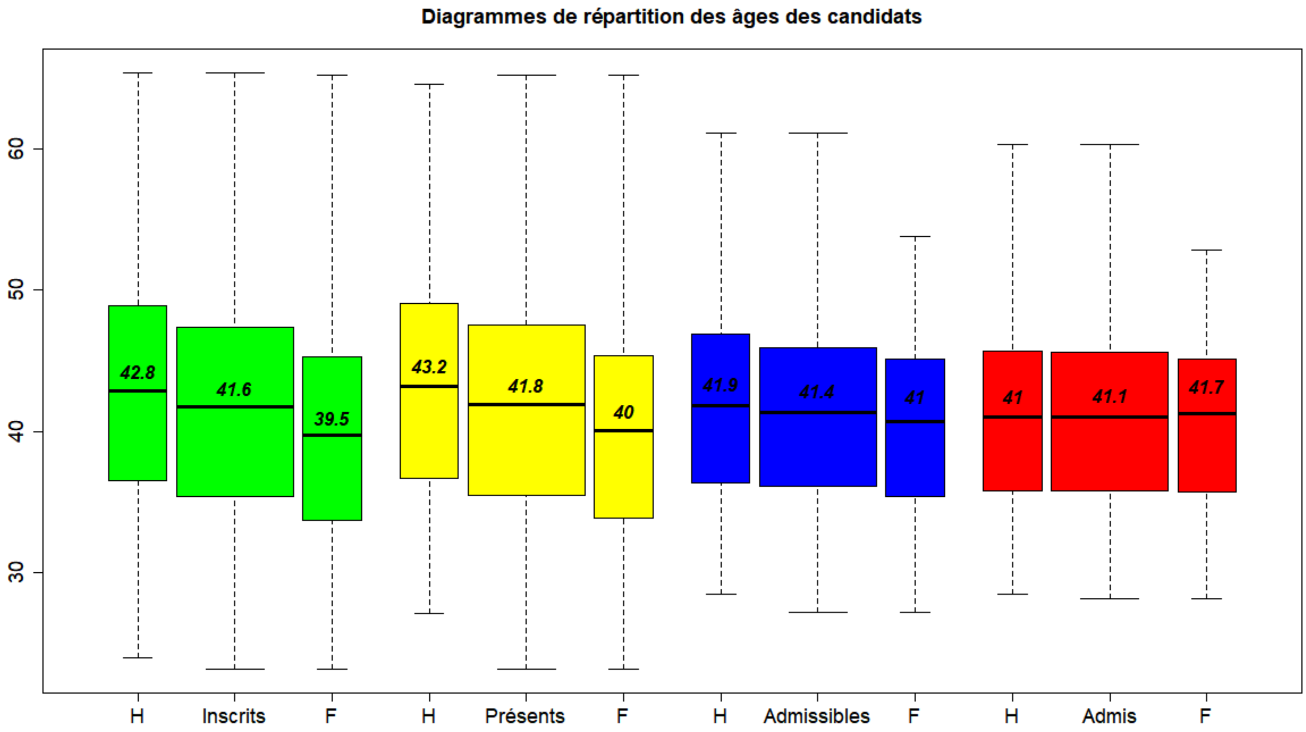


FIGURE 1.1 – Lecture graphique : L'âge minimum des femmes présentes au concours est de 23,2 ans ; 25% ont un âge inférieur ou égal à 33,7 ans, 50% ont 39,5 ans ou moins (médiane), 75 % ont 45,3 ans ou moins.

CAERPA

Tranches d'âge	Inscrits	Présents	Admissibles	Admis
Moins de 30 ans	21	13	1	0
Entre 30 et 35 ans	40	23	5	1
Entre 35 et 40 ans	64	36	8	1
Entre 40 et 45 ans	70	46	14	3
Entre 45 et 50 ans	73	41	9	3
Entre 50 et 55 ans	70	42	13	7
Supérieur à 55 ans	16	10	3	3
Total	354	211	53	18

Agrégation interne

Tranches d'âge	Inscrits	Présents	Admissibles	Admis
Moins de 30 ans	132	80	7	2
Entre 30 et 35 ans	222	142	29	16
Entre 35 et 40 ans	380	244	74	30
Entre 40 et 45 ans	446	258	98	53
Entre 45 et 50 ans	408	242	70	32
Entre 50 et 55 ans	375	226	49	20
Supérieur à 55 ans	108	59	13	7
Total	2071	1251	340	160

1.4.3 Répartition par profession

Ce sont essentiellement les professeurs certifiés qui sont reçus à l'agrégation interne (93% des admis, 92% des admissibles).

CAERPA

Professions	I	P	a	A
CONT ET AGREE REM INSTITUTEUR	16	5	1	1
MAITRE CONTR.ET AGREE REM MA	22	8	1	
MAITRE CONTR.ET AGREE REM TIT	316	198	51	17
Total	354	211	53	18

Agrégation interne

Professions	Inscrits	Présents	Admissibles	Admis
AUTRES	39	13	4	2
AUTRES ENS. TIT.	146	66	16	7
CERTIFIE	1788	1124	312	149
PLP	98	48	8	2
Total	2071	1251	340	160

1.4.4 Répartition par académie

CAERPA

Académies	Inscrits	Présents	Admissibles	Admis
AIX-MARSEILLE	14	6	2	1
AMIENS	7	3		
BESANÇON	1	1		
BORDEAUX	11	4	3	2
CAEN	5	5	1	
CLERMONT-FERRAND	11	8	4	1
CRÉTEIL-PARIS-VERSAIL.	70	39	8	1
DIJON	9	3		
GRENOBLE	11	8	3	1
GUADELOUPE	2	1		
GUYANE	1			
LA RÉUNION	3	1	1	
LILLE	33	24	6	2
LIMOGES	2	2		
LYON	24	15	7	3
MARTINIQUE	2	1		
MONTPELLIER	15	8	1	
NANCY-METZ	7	5	1	1
NANTES	24	14	2	1
NICE	10	5	1	
NOUVELLE CALÉDONIE	1	1		
ORLÉANS-TOURS	3	1		
POITIERS	10	7	2	1
POLYNÉSIE FRANÇAISE	7	5		
REIMS	2	2	1	
RENNES	29	18	2	
ROUEN	8	6	3	
STRASBOURG	15	8	1	
TOULOUSE	17	10	4	4
Total	354	211	53	18

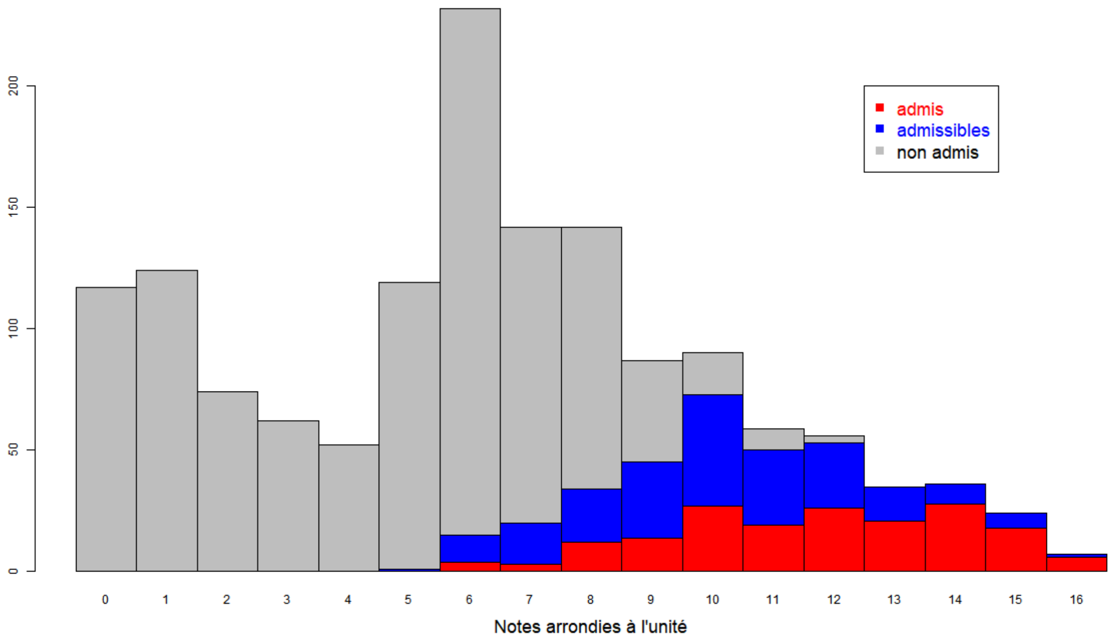
Agrégation interne

Académies	Inscrits	Présents	Admissibles	Admis
AIX-MARSEILLE	104	66	21	11
AMIENS	52	31	12	3
BESANÇON	34	19	4	3
BORDEAUX	81	51	17	5
CAEN	33	18	6	2
CLERMONT-FERRAND	31	24	8	2
CORSE	13	10	2	2
CRÉTEIL-PARIS-VERSAIL.	441	273	78	42
DIJON	40	25	7	3
GRENOBLE	90	62	16	7
GUADELOUPE	42	20	2	1
GUYANE	12	4		
LA RÉUNION	62	23	5	2
LILLE	110	75	17	8
LIMOGES	19	13	4	1
LYON	93	60	21	13
MARTINIQUE	28	14	2	1
MAYOTTE	15	8		
MONTPELLIER	93	53	15	6
NANCY-METZ	66	48	8	4
NANTES	65	40	7	6
NICE	90	44	9	2
NOUVELLE CALÉDONIE	11	3		
ORLÉANS-TOURS	78	48	12	6
POITIERS	59	31	10	4
POLYNÉSIE FRANÇAISE	9	7	2	
REIMS	33	21	5	2
RENNES	69	40	10	4
ROUEN	60	36	11	4
STRASBOURG	65	36	8	3
TOULOUSE	73	48	21	13
Total	2071	1251	340	160

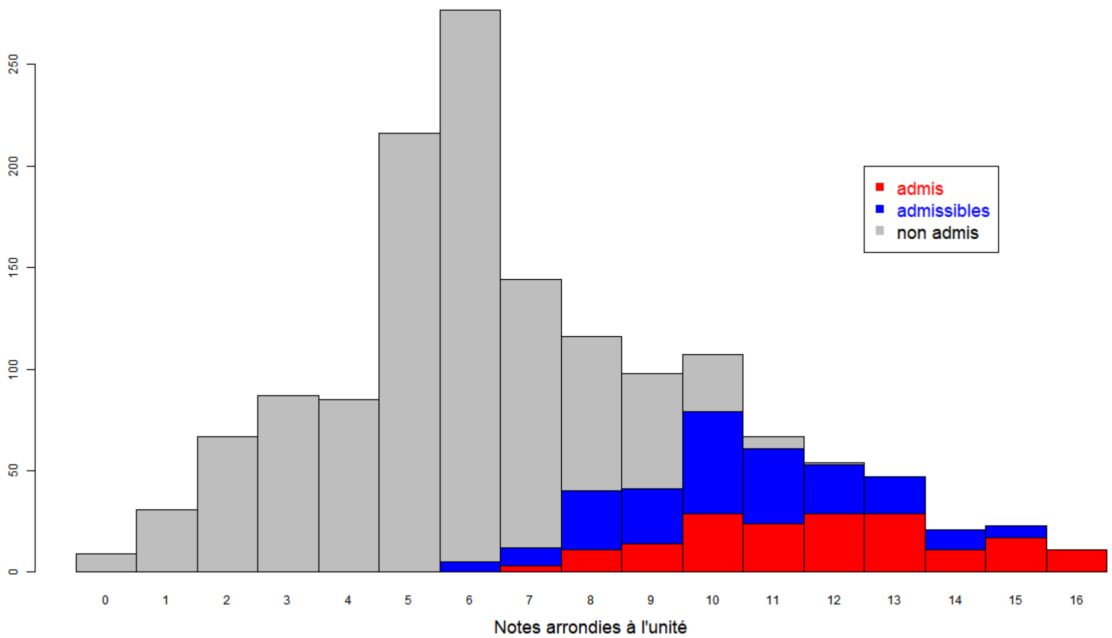
1.4.5 Répartition des notes d'écrit

La barre d'admissibilité a été fixée à 88 points sur 200 (identique pour les deux concours). Le nombre d'admissibles au CAERPA a été proportionnellement plus élevé.

Histogramme des notes attribuées à l'épreuve 1

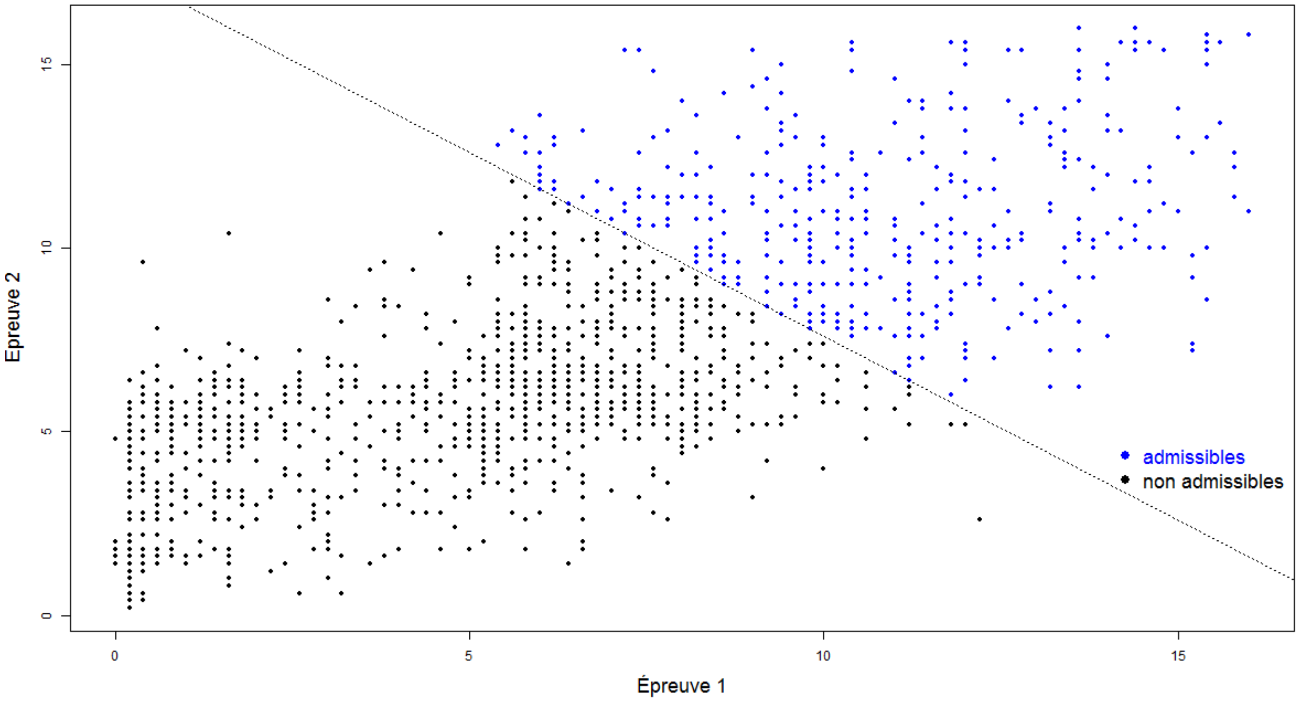


Histogrammes des notes attribuées à l'épreuve 2



Nuage des notes d'écrit

Chaque candidat présent à l'écrit est repéré par le couple des notes qu'il a obtenues respectivement aux épreuves 1 et 2.

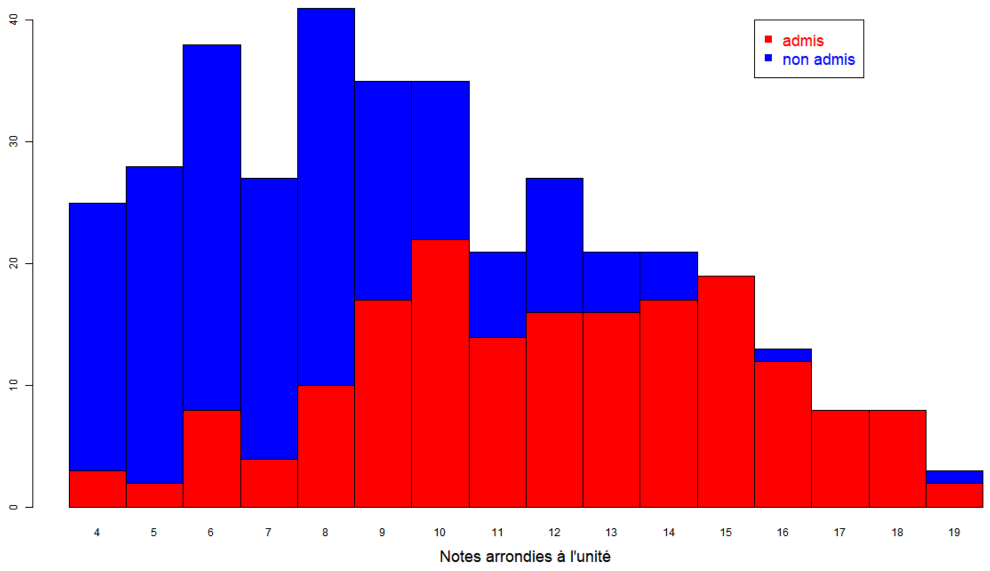


1.4.6 Répartition des notes d'oral

La barre d'admission (c'est-à-dire le total des points du dernier admis) a été cette année de 202 points pour le concours de l'agrégation interne et de 222 points pour le CAERPA.

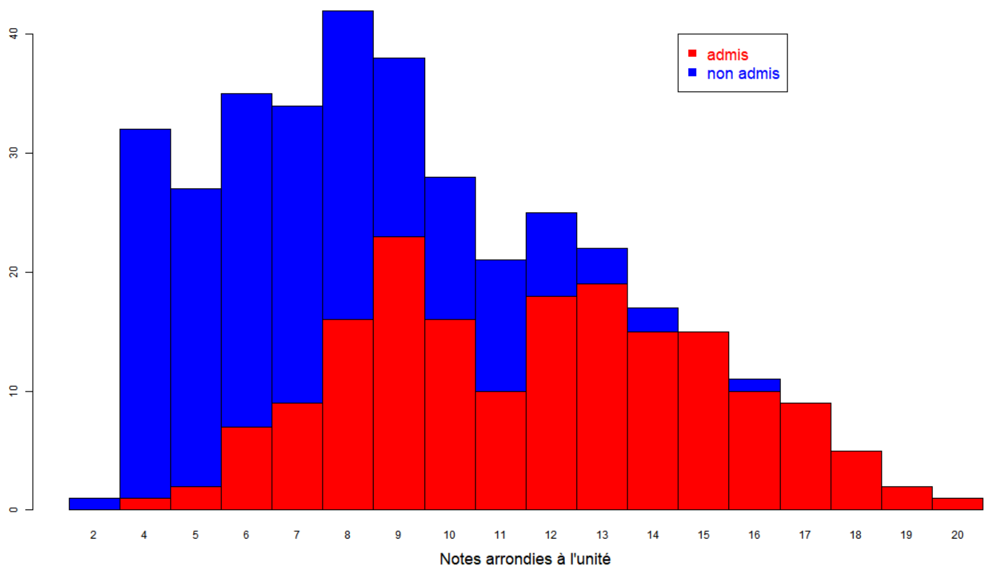
Histogramme des notes attribuées à l'épreuve d'exposé

La moyenne des notes vaut 9,7 et la médiane est égale à 9,2.



Histogrammes des notes attribuées à l'épreuve d'exemples et exercices

La moyenne des notes vaut 9,4 et la médiane est égale à 8,8.



Nuage des notes d'écrit et d'oral

Le graphique ci-dessous, dans lequel chaque candidat présent à l'oral est repéré par le couple des totaux obtenus respectivement à l'écrit et à l'oral (sommes respectives des notes sur 100 obtenues aux deux épreuves écrites et aux deux épreuves orales), souligne toute l'importance qui s'attache à une solide préparation de l'oral. On observe ainsi que certains candidats avec un bon niveau à l'écrit ne sont pas admis et qu'*a contrario* des candidats proches de la barre d'admissibilité à l'écrit sont reçus, parfois dans un bon rang, grâce à de très bonnes prestations orales.

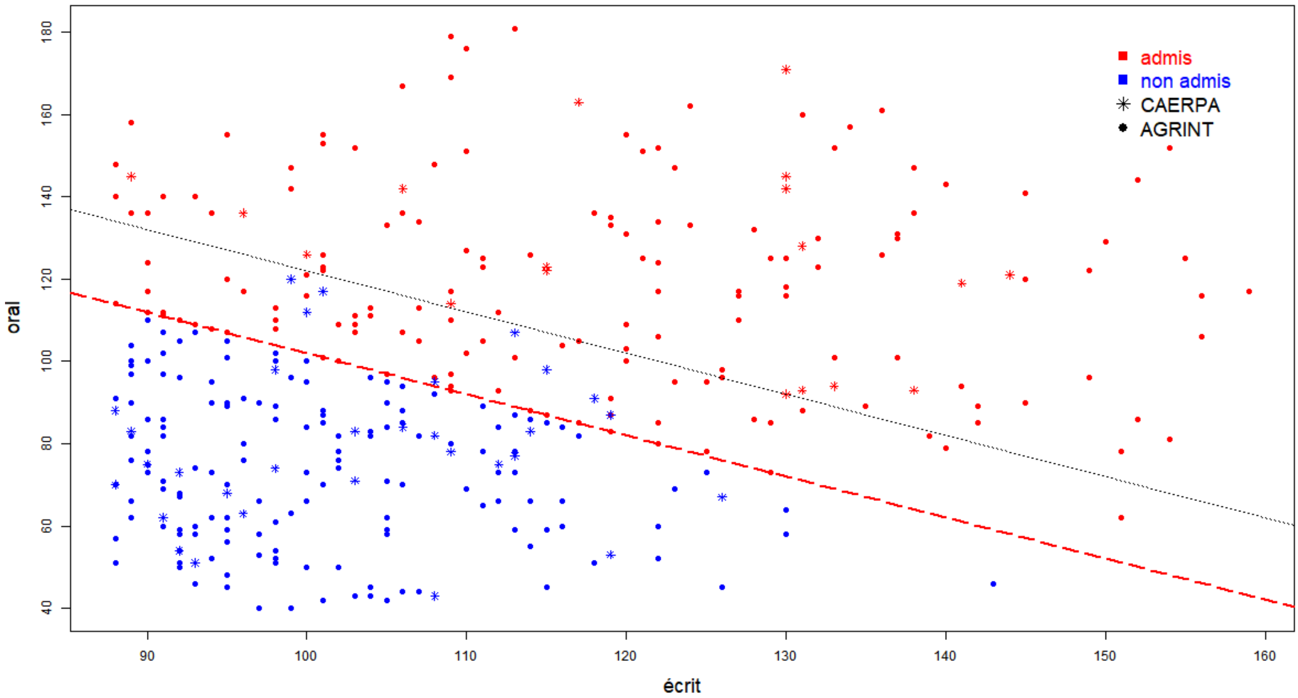


FIGURE 1.2 – Les droites en pointillés représentent les barres respectives de 202 (en rouge) et de 222 (en noir) correspondant aux deux concours.

Chapitre 2

Programme du concours pour la session 2020

Le programme du concours pour la session **2020** est publié sur le site du ministère de l'Éducation nationale à l'adresse suivante :

http://www.devenirenseignant.gouv.fr/cid98492/programmes-concours-enseignants-session-2020.html

Chapitre 3

Rapport sur les épreuves écrites

L'arrêté définissant le concours dispose que les épreuves écrites « ont pour objectif d'évaluer la maîtrise des connaissances mathématiques et la capacité de les mobiliser pour étudier des situations, ainsi que la solidité, sur le plan scientifique, des acquis professionnels ».

Aussi, une bonne connaissance d'un minimum d'outils théoriques est-elle indispensable à la réussite de ces épreuves, ce qui suppose un travail de préparation visant la maîtrise des théorèmes fondamentaux et un entraînement à la résolution de problèmes afin d'acquérir de bons réflexes intellectuels.

Les correcteurs sont particulièrement attentifs à la clarté des raisonnements, à la précision des justifications et à l'exactitude des définitions ou des théorèmes employés. En particulier, lorsqu'un résultat est utilisé (théorème, propriété, etc.), il est important d'énoncer clairement les hypothèses à vérifier et la conclusion désirée. C'est d'autant plus important lorsque le candidat n'arrive pas à vérifier lesdites hypothèses car le correcteur peut alors valoriser ses connaissances et sa capacité à reconnaître une situation.

Il est attendu dans les copies les qualités exigibles d'un professeur de mathématiques, à savoir :

- la rigueur de la rédaction : choisir de façon pertinente les articles utilisés (singulier ou pluriel, défini ou indéfini) ; utiliser les quantificateurs appropriés ; citer clairement les théorèmes ou résultats invoqués, en vérifier les hypothèses et s'abstenir de citer des hypothèses sans rapport avec le théorème (comme indiquer que la matrice est symétrique pour appliquer le théorème du rang) ; éviter des arguments vagues comme « d'après le cours » ou « vu ce qui précède » ainsi que les locutions « il est évident que », « on voit que » ou « on a forcément » qui masquent fréquemment une absence d'argument ou de preuve ;
- la maîtrise des techniques usuelles de démonstration : raisonnement par équivalence, raisonnement par analyse-synthèse, démonstration par récurrence, par l'absurde, par contraposée etc. ;
- la clarté de l'expression, la lisibilité de la présentation ainsi qu'une certaine attention à l'orthographe. Il convient notamment de rappeler que les symboles $\Rightarrow$ et $\Leftrightarrow$ sont des connecteurs logiques tels « et » ou « ou » et qu'il est incorrect de les utiliser comme des abréviations.

Il est aussi apprécié que les candidats expliquent leur démarche, concluent les questions et accompagnent, si c'est pertinent, leurs démonstrations de figures, schémas ou autres illustrations géométriques.

Le jury regrette unanimement un manque de rigueur et de logique dans les raisonnements qui prend des proportions inquiétantes : confusions entre implication et équivalence, condition nécessaire et condition suffisante (confusion entre « il faut » et « il suffit »), quantificateurs erronés ou absents, connaissance très approximative des définitions (limites, continuité, sup, inf etc.) et des théorèmes. Toutes ces insuffisances sont sévèrement sanctionnées tant il est essentiel qu'un professeur de mathématiques maîtrise ces fondamentaux pour dispenser un enseignement de qualité. Le jury tient à appeler l'attention des candidats sur la nécessité de fournir un travail important dans ce sens.

3.1 Première épreuve écrite

Le sujet est téléchargeable à l'adresse suivante :
`http://media.devenirenseignant.gouv.fr/file/agregation_externe/73/2/s2019_agreg_interne_math_1_1067732.pdf`

3.1.1 Statistiques de réussite

Les candidats ont concentré leurs efforts sur les deux premières parties du problème. La partie III, consacrée à la théorie des groupes, a été peu abordée et généralement mal réussie. La partie IV a permis à plusieurs candidats de tirer leur épingle du jeu. Le graphique suivant indique les réussites aux différentes questions des candidats déclarés admissibles.

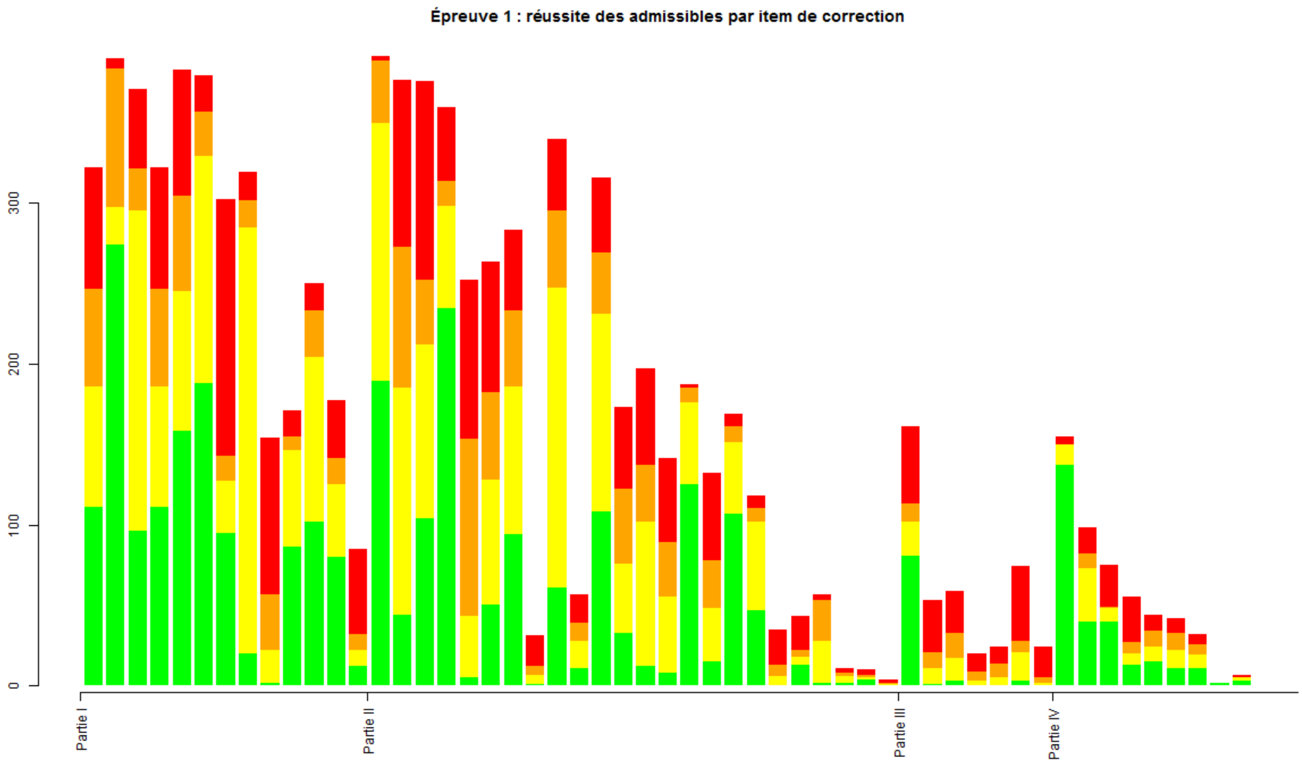


FIGURE 3.1 – Lecture : pour chaque question (ou item de correction lorsque plusieurs composantes sont évaluées dans une même question), la zone verte indique le nombre de candidats admissibles ayant fourni une bonne réponse, la zone jaune représente ceux ayant proposé une réponse partiellement juste, la zone orange ceux dont la réponse est entachée d'erreurs, la zone rouge les réponses fausses

3.1.2 Présentation du sujet

L'épreuve a pour ambition d'amener les candidats à voir comment des méthodes algébriques du niveau de la licence, typiquement enseignées dans les cours d'algèbre linéaire, peuvent être employées pour obtenir des informations concrètes sur les graphes. Aucune connaissance de théorie des graphes n'est requise et la plupart des questions sont formulées dans un langage purement matriciel afin de ne pas dérouter les candidats. Le sujet est divisé en quatre parties, rendues aussi indépendantes que possible afin que les candidats ne se trouvent pas bloqués.

La partie I s'intéresse aux coloriages admissibles d'un graphe (les sommets sont coloriés de sorte que deux sommets reliés par une arête soient toujours de couleurs différentes) ; on y prouve une minoration du nombre de couleurs à employer due à A. J. Hoffman (*On eigenvalues and colorings of graphs*, publié en 1970).
Dans la partie II, on cherche à compter les arbres couvrant un graphe connexe donné Γ ; autrement dit, à déterminer le nombre de façons d'enlever des arêtes à Γ de manière à obtenir un arbre (graphe connexe ne contenant pas de cycle). Le résultat établi dans les questions 17 et 18 fut découvert plusieurs fois par différents auteurs ; voir le chapitre 5 de l'ouvrage *Counting labelled trees* de J. W. Moon, Canadian Mathematical Monographs n° 1, 1970.
La partie III propose une étude très modeste des groupes d'automorphismes des graphes ; considérablement amplifiée, cette étude peut mener à la construction de groupes finis simples.
Enfin, la partie IV établit une majoration du diamètre d'un graphe connexe régulier en fonction du spectre de la matrice d'adjacence du graphe ; ce résultat est tiré de l'article *Diameters and eigenvalues* de F. R. K. Chung, Journal of the American Mathematical Society, vol. 2 (1989), pp. 187–196.

3.1.3 Remarques générales

Bien que le problème ait pour thématique la théorie des graphes, les candidats ont été évalués essentiellement sur des questions classiques d'algèbre linéaire, ce qui supposait une bonne maîtrise des outils algébriques usuels : valeurs propres et vecteurs propres, théorème spectral pour les matrices symétriques réelles, inégalité de Cauchy-Schwarz, rang d'une matrice, déterminant, comatrice, polynôme caractéristique, actions de groupes.

Le sujet permettait également (et surtout) de vérifier que les candidats savent mettre en place des raisonnements rigoureux, rédigés de façon claire et précise, ne négligeant pas les vérifications mineures lorsqu'elles sont nécessaires.

3.1.4 Commentaires par question

Les commentaires ci-dessous détaillent les erreurs les plus fréquemment rencontrées dans les copies. Les questions peu traitées ne font pas l'objet de commentaire.

1 a) Plusieurs candidats emploient un vocabulaire inapproprié, laissant penser qu'ils confondent famille de vecteurs deux à deux colinéaires et famille liée de vecteurs. Cela rend moins convaincante leur argumentation concernant le rang de $G_{K_{a,b}}$. Autre détail permettant de juger de la précision du langage adopté par les candidats : il faut bien expliquer que l'on a affaire à deux vecteurs linéairement indépendants, et non pas deux vecteurs distincts.

Petit point de vocabulaire : on ne dit pas que deux vecteurs sont libres, mais qu'ils forment une famille libre, ou qu'ils sont linéairement indépendants.

Le calcul de la trace du carré de $G_{K_{a,b}}$ est incorrect dans plus d'un tiers des copies.

b) Nombre de candidats expliquent que, puisque la matrice $G_{K_{a,b}}$ est de rang 2, la multiplicité de 0 comme valeur propre de cette matrice est $a + b - 2$. Le résultat est juste, mais le raisonnement est insuffisant, car la multiplicité d'une valeur propre d'une matrice n'est a priori que minorée par la dimension de l'espace propre correspondant. Un argument supplémentaire (par exemple mentionner que la matrice est diagonalisable) est ici nécessaire pour justifier l'égalité. Par ailleurs, l'utilisation du théorème du rang doit être clairement annoncée.

La trace de $(G_{K_{a,b}})^2$ est la somme des carrés des valeurs propres de $G_{K_{a,b}}$ répétées selon leurs multiplicités ; une brève justification de ce fait est attendue.

2 a) De la factorisation $M = P^{-1}DP = {}^tPDP$, où D est une matrice diagonale et P une matrice orthogonale, nombre de candidats déduisent l'égalité $(\mathbf{x} \mid M\mathbf{x}) = (\mathbf{x} \mid D\mathbf{x})$ pour tout vecteur $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$, au prétexte que P préserve le produit scalaire. D'autres candidats affirment que comme M est diagonalisable, il existe une base B dans laquelle elle est égale à une matrice diagonale D ; ils se placent alors dans cette base et écrivent que $M\mathbf{x} = D\mathbf{x}$ pour tout $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$. Ces raisonnements sont incorrects et révèlent d'importantes confusions : changement de base ou pas, si M n'est pas diagonale, elle ne pourra jamais être égale à D.

Certains candidats évitent ces écueils en décomposant correctement un vecteur $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$ sur une base $(\mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_n)$ formée de vecteurs propres de M, comme indiqué dans les éléments de correction. Malheureusement, la suite du raisonnement est parfois insatisfaisante : partant des égalités

$$\mathbf{x} = a_1\mathbf{e}_1 + \cdots + a_n\mathbf{e}_n, \quad M\mathbf{e}_1 = \lambda_1\mathbf{e}_1, \quad ..., \quad M\mathbf{e}_n = \lambda_n\mathbf{e}_n,$$

la majoration

$$\begin{aligned}(\mathbf{x} \mid M\mathbf{x}) &= \lambda_1\, a_1(\mathbf{x} \mid \mathbf{e}_1) + \cdots + \lambda_n\, a_n(\mathbf{x} \mid \mathbf{e}_n)\\ &\leqslant \lambda_{\max}(M)\, a_1(\mathbf{x} \mid \mathbf{e}_1) + \cdots + \lambda_{\max}(M)\, a_n(\mathbf{x} \mid \mathbf{e}_n) = \lambda_{\max}(M)\,(\mathbf{x} \mid \mathbf{x})\end{aligned}$$

n'est valablement justifiée que si l'on indique que chaque coefficient $a_i(\mathbf{x} \mid \mathbf{e}_i)$ est positif.

Dans plusieurs copies, l'inégalité de l'énoncé n'est démontrée que dans le cas où $\mathbf{x}$ est un vecteur propre de M ; croyant à tort que l'union des sous-espaces propres de M est l'espace $\mathbb{R}^n$ tout entier, certains candidats pensent cependant alors avoir établi le résultat demandé.

b) Peu de candidats pensent à justifier leurs manipulations : pour passer de l'inégalité de la question a) à l'inégalité

$$\lambda_{\min}(M) \leqslant \frac{(\mathbf{x} \mid M\mathbf{x})}{(\mathbf{x} \mid \mathbf{x})} \leqslant \lambda_{\max}(M)$$

quand $\mathbf{x} \neq 0$, il faut non seulement mentionner que $(\mathbf{x} \mid \mathbf{x})$ est non nul, mais aussi que ce produit scalaire est strictement positif.

Parvenus à ce point, de nombreux candidats expliquent que les valeurs $\lambda_{\min}(M)$ et $\lambda_{\max}(M)$ sont atteintes, mais négligent de conclure en employant le vocable de bornes inférieure et supérieure : ils ne répondent pas précisément à la question posée.

Plusieurs candidats manipulent les concepts de bornes inférieure et supérieure de façon imprécise, expliquant par exemple que l'inégalité ci-dessus donne directement l'égalité

$$\lambda_{\max}(M) = \sup_{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}} \frac{(\mathbf{x} \mid M\mathbf{x})}{(\mathbf{x} \mid \mathbf{x})}$$

alors qu'elle ne donne que l'inégalité

$$\lambda_{\max}(M) \geqslant \sup_{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}} \frac{(\mathbf{x} \mid M\mathbf{x})}{(\mathbf{x} \mid \mathbf{x})}.$$

Certains candidats utilisent des arguments d'analyse pour justifier que la fonction

$$\mathbf{x} \mapsto \frac{(\mathbf{x} \mid M\mathbf{x})}{(\mathbf{x} \mid \mathbf{x})}$$

atteint ses bornes sur $\mathbb{R}^n \setminus \{0\}$; c'était se compliquer la vie, d'autant plus que $\mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ n'est pas compact. (Les arguments d'analyse nécessaires sont en fait cachés dans la preuve du théorème spectral.)

Enfin, plusieurs candidats considèrent « le » vecteur propre de M associé à la valeur propre $\lambda_{\max}(M)$, alors qu'il n'y a pas unicité.

3 a) Un très grand nombre de candidats affirment que le spectre de M' est inclus dans celui de M (en invoquant parfois une étrange notion de matrice diagonalisable par blocs) ; l'examen de l'exemple $n' = 1$ les aurait détrompés. À propos, le cas $n' = n - 1$ donne lieu à une intéressante propriété d'entrelacement, que les futurs candidats peuvent regarder à titre d'exercice : si l'on note λ_1, ..., λ_n les valeurs propres de M, répétées selon leurs multiplicités et rangées dans l'ordre croissant, si l'on note de même μ_1, ..., μ_{n-1} les valeurs propres de M', alors

$$\lambda_1 \leqslant \mu_1 \leqslant \lambda_2 \leqslant \mu_2 \leqslant \cdots \leqslant \mu_{n-1} \leqslant \lambda_n.$$

Autre remarque : certains candidats utilisent les inégalités $\inf(B) \leqslant \inf(A)$ et $\sup(A) \leqslant \sup(B)$, valables pour deux parties A et B bornées et non vides de $\mathbb{R}$ telles que $A \subset B$. Une explication rapide justifiant ces inégalités est alors appréciable.

b) Cette question présente deux difficultés. La première est d'observer que l'expression résultant du calcul par blocs de $(\mathbf{x}_t \mid M\mathbf{x}_t)$ peut être simplifiée en utilisant l'égalité $(\mathbf{x}'' \mid {}^tL\mathbf{x}') = (\mathbf{x}' \mid L\mathbf{x}'')$. Quelques candidats se trouvent bloqués à cette étape, pour laquelle une explication est bienvenue. Parmi les justifications incorrectes, signalons les arguments basés sur une écriture aberrante du genre $(\mathbf{x}' \mid L\mathbf{x}'') = L\mathbf{x}'\mathbf{x}''$, ou des dérapages tels $(\mathbf{x}'' \mid {}^tL\mathbf{x}') = (L\mathbf{x}'' \mid L\,{}^tL\mathbf{x}') = (L\mathbf{x}'' \mid \mathbf{x}')$.

Le second écueil est que $(\mathbf{x}_t \mid M\mathbf{x}_t)$ est un polynôme de degré *au plus* 2 en t. Peu de candidats indiquent que leur raisonnement basé sur la notion de discriminant sous-entend que le coefficient $(\mathbf{x}' \mid M'\mathbf{x}')$ de t^2 est non nul et signalent la nécessité d'un argument ad hoc pour traiter le cas exceptionnel.

c) Une minorité de candidats ont su traiter cette question avec succès. Un argument incorrect fréquemment rencontré est d'affirmer que le spectre de M est l'union des spectres de M' et de M'' ; c'est déjà faux pour la matrice $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ et pour le choix $n' = n'' = 1$.

d) Cette question a été résolue par de nombreux candidats, qui observent qu'il suffit d'appliquer le résultat de la question c) à la matrice $M + \mu I_n$, où $\mu = -\lambda_{\min}(M)$. Cependant plusieurs candidats omettent de justifier, en se référant explicitement à la question a), que la matrice $M + \mu I_n$ est bien positive pour ce choix de μ.

4 La plupart des candidats comprennent que cette question se démontre par récurrence. Dans bien des copies, la démarche adoptée pour démontrer l'hérédité amène à appliquer l'hypothèse de récurrence à une autre matrice que M. Dans ces conditions, il est nécessaire d'intégrer explicitement un quantificateur universel sur la matrice à l'énoncé de l'hypothèse de récurrence.

Par ailleurs, le recours à la question 3 a), indispensable pour pouvoir conclure, doit être indiqué sans ambiguïté.

5 a) La rédaction manque souvent de précision. Par exemple, il est important de faire intervenir le caractère diagonalisable de la matrice G_Γ.

b) Certains candidats répondent à la question sans jamais utiliser la notion de coloriage au cours de leur argumentation. Une telle solution ne peut pas être correcte.

6 Sur une question aussi simple, c'est la qualité de la rédaction qui est évaluée. Le jury attend un niveau de précision semblable à celui des définitions données dans l'énoncé. Il convient d'une part de nommer les propriétés démontrées (« réflexivité », « symétrie », « transitivité »), d'autre part de raisonner en partant de la définition explicite de chemin dans un graphe. De nombreux candidats n'ont pas fait cet effort et ont perdu des points.

Il est important de quantifier correctement les variables. Pour démontrer la symétrie par exemple, il convient de commencer par choisir deux sommets x et y tels que $x \sim y$, et non pas partir d'un chemin $(x_0, \dots, x_\ell)$.

De nombreux candidats écrivent que « les chemins ne sont pas orientés », confondant chemin et arête : un chemin étant défini comme une suite finie de sommets, il ne peut à la fois aller de x à y et de y à x (sauf bien sûr si $x = y$).

7 La propriété demandée semble tellement évidente qu'une argumentation précise n'apparaît pas nécessaire aux yeux de nombre de candidats. Dans beaucoup de copies, il est simplement affirmé que s'il n'y a aucune arête reliant un point de S' à un point de S'', alors il y a au moins deux composantes connexes. Une telle réponse n'est qu'une paraphrase de l'énoncé et n'a aucune valeur. Le jury attend au contraire des candidats qu'ils prennent le soin de partir des définitions.

Parmi les erreurs observées, on note des confusions entre les notions d'arête et de chemin, entre raisonnement par l'absurde et raisonnement par contraposition, et des problèmes de quantification des variables utilisées.

Signalons enfin que l'utilisation pertinente de l'hypothèse que S' et S'' sont tous deux non vides est appréciée.

8 La définition d'arbre couvrant est mal comprise dans la moitié des copies.

9 a) Une part importante de candidats proposent la formule $M^{-1} = {}^t\mathrm{com}(M)/\det(M)$; une telle réponse partielle ne peut être recevable que si le candidat explique qu'il suppose que M est inversible. Par ailleurs, la formule $M\,{}^t\mathrm{com}(M) = \det(M)$ est évidemment incorrecte.

b) De nombreux candidats affirment de façon hasardeuse qu'une matrice et sa comatrice ont même rang. L'exemple d'une matrice 3×3 de rang 1 prouve immédiatement la fausseté de cet énoncé.

Par ailleurs, plusieurs candidats essaient d'exploiter la relation fantaisiste $\mathrm{rg}(AB) = \mathrm{rg}(A) + \mathrm{rg}(B)$, qui laisse le jury perplexe.

c) Une matrice et sa transposée ont même déterminant. La réponse la plus simple à la question posée consiste à appliquer ce résultat aux matrices de taille $(n-1)\times(n-1)$ extraites de M et de ${}^tM$. La majorité des candidats semblent vouloir suivre cette voie... mais oublient de mentionner la propriété en question, amputant ainsi le raisonnement de son argument-clé.

Une seconde méthode part de la formule du a). Quelques calculs mènent alors à l'égalité $M\ {}^t\mathrm{com}(M) = M\,\mathrm{com}({}^tM)$. Nombre de candidats concluent ici de façon erronée en simplifiant sans précaution par M. Pour raisonner correctement, il faut commencer par supposer que M est inversible : on peut alors multiplier à gauche par M^{-1} et obtenir l'équation désirée dans ce cas particulier. Le résultat général s'obtient ensuite par prolongement, en utilisant la densité de l'ensemble des matrices inversibles et en justifiant que les coefficients de ${}^t\mathrm{com}(M)$ et $\mathrm{com}({}^tM)$ dépendent continûment de M.

10 a) Plusieurs candidats affirment que le déterminant d'une matrice est « combinaison linéaire » des coefficients de cette matrice : c'est un usage inapproprié de cette terminologie.

Procéder par récurrence requiert du soin dans la formulation de l'hypothèse de récurrence, car les cofacteurs qui apparaissent lorsqu'on développe $\det(I_m + XC)$ selon une ligne ou une colonne ne sont pas de la forme $\det(I_{m-1} + XC')$ avec C' matrice à coefficients réels de taille $(m-1)\times(m-1)$.

Quelques candidats font également des confusions entre l'anneau $\mathbb{R}[X]$ et le corps $\mathbb{R}(X)$, parlant par exemple de « polynôme à coefficients dans $\mathbb{R}(X)$ ».

Signalons enfin une erreur observée plusieurs fois dans la formule explicite exprimant le déterminant d'une matrice C de taille $m \times m$ en fonction de ses coefficients $c_{i,j}$

$$\det C = \sum_{\sigma \in S_m} \operatorname{sgn}(\sigma)\ c_{1,\sigma(1)}\ c_{2,\sigma(2)} \cdots\ c_{m,\sigma(m)}$$

où $\operatorname{sgn}(\sigma)$ est la signature de la permutation σ : le signe est bien $\operatorname{sgn}(\sigma)$ et non pas $(-1)^{\operatorname{sgn}(\sigma)}$, ce dernier valant toujours 1 puisque $\operatorname{sgn}(\sigma) \in \{-1, 1\}$.

11 a) La plupart des candidats calculent

$$\begin{pmatrix} I_m & -XB \\ A & I_n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} I_m & XB \\ 0 & I_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} I_m & 0 \\ A & I_n + XAB \end{pmatrix}$$

et déduisent correctement de cette équation que

$$\det \begin{pmatrix} I_m & -XB \\ A & I_n \end{pmatrix} = \det(I_n + XAB).$$

Certains candidats en concluent directement l'égalité demandée, ignorant que la formule

$$\det \begin{pmatrix} P & Q \\ R & S \end{pmatrix} = \det(PS - QR)$$

pour le déterminant d'une matrice par blocs est généralement incorrecte (même quand $PS-QR$ a un sens).

D'autres candidats poursuivent le raisonnement en démontrant de façon analogue que

$$\det \begin{pmatrix} I_n & A \\ -XB & I_m \end{pmatrix} = \det(I_m + XBA)$$

et concluent en affirmant que les deux matrices

$$\begin{pmatrix} I_m & -XB \\ A & I_n \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad \begin{pmatrix} I_n & A \\ -XB & I_m \end{pmatrix}$$

ont même déterminant. Ce dernier point n'a toutefois rien d'évident, de sorte que la démonstration reste inaboutie. (Certains candidats affirment à tort que ces deux matrices sont transposées l'une de l'autre.)

Nombre de candidats utilisent la règle de calcul $\det(CD) = \det(DC)$ sans justification, alors que cette formule n'est valide que sous l'hypothèse que C et D sont des matrices *carrées* de même taille. Il est préférable d'invoquer des résultats du cours (ici, la multiplicativité du déterminant) plutôt que d'inventer des formules expédientes. De fait, on peut ici craindre une confusion avec l'identité $\operatorname{Tr}(CD) = \operatorname{Tr}(DC)$, valable pour des matrices rectangulaires de dimensions complémentaires.

12 La plupart des candidats comprennent que le rang de N_Γ est strictement inférieur à n, mais bien peu détaillent la preuve de cette affirmation ; il est par exemple utile de rappeler que n est le nombre de colonnes de N_Γ.

Plusieurs candidats argumentent ainsi : la somme des colonnes est nulle, donc le déterminant de N_Γ est nul, donc N_Γ n'est pas inversible, donc N_Γ n'est pas de rang n : ce raisonnement sous-entend que N_Γ est une matrice carrée et n'est donc pas correct.

13 Certains candidats oublient de traiter le cas où une ligne de M ne contient que des 0.

D'autres lisent mal l'indication : il est suggéré de traiter le cas où toutes les lignes de M contiennent un 1 et un -1, pas celui où une ligne de M contient un 1 et un -1. L'analyse de ce dernier cas conduit d'ailleurs généralement à une erreur grossière : en développant selon la ligne en question, on parvient à exprimer $\det(M)$ comme somme de deux termes, chacun égal à -1, 0 ou 1 par hypothèse de récurrence ; il est alors difficile de conclure (mais quelques candidats téméraires semblent y croire) que $\det(M)$ appartient à $\{-1, 0, 1\}$.

14 a) Les réponses à cette question sont souvent bien embrouillées. On attend des candidats qu'ils distinguent clairement entre arête et chemin, et qu'ils produisent un raisonnement clairement structuré, par double implication par exemple.

15 a) Plusieurs candidats écrivent que changer d'orientation transforme N_Γ en son opposée. Cela n'est le cas que si l'on change l'orientation de toutes les arêtes.

c) L'inclusion $\operatorname{im} Q_\Gamma \subset \operatorname{im} {}^tN_\Gamma$ est banale, et la difficulté est de justifier qu'il y a en fait égalité. Une erreur commise ici par plusieurs candidats est d'écrire que pour une matrice M de taille $m \times n$, on a $(\ker M) \oplus (\operatorname{im} M) = \mathbb{R}^m$. Une telle égalité ne peut avoir de sens que si $m = n$, et même dans ce cas ne vaut que sous certaines hypothèses (par exemple si M est diagonalisable).

16 La rédaction est souvent assez confuse dans les quelques copies ayant abordé cette question. Il faut à chaque instant veiller à indiquer clairement quelle implication est étudiée et préciser quelle hypothèse est faite.

Pour l'équivalence ii) $\Leftrightarrow$ iii), il est attendu du candidat qu'il explique que N_B est la matrice d'incidence du graphe (S, B). Pour l'implication iii) $\Rightarrow$ iv), une simple paraphrase de l'indication ne peut pas être acceptée comme réponse correcte.

19 c) Plusieurs candidats, ayant traité correctement la question 19 a) et ayant lu l'énoncé de la question 19 b), comprennent que le résultat demandé est une conséquence de la formule des classes, une fois prouvé que le stabilisateur d'un 3-arc est trivial. Malheureusement la démonstration de ce dernier fait est souvent bâclée et incomplète.

d) Lisant mal la question posée, quelques candidats ayant abordé cette question croient qu'il s'agit de prouver que les permutations (123456), (13), (24), (35), (46), (15) et (26) appartiennent au groupe $\operatorname{Aut}(\Gamma)$.

20 Plusieurs candidats affirment que le groupe des automorphismes du graphe de gauche (le carré) est isomorphe à $(\mathbb{Z}/4\mathbb{Z}) \times (\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})$. Cela n'est pas correct : il s'agit en fait du groupe diédral à 8 éléments, qui est d'ailleurs au programme du concours.

21 a) Cette question est un exercice de cours incontournable. Les candidats y répondant de façon satisfaisante se comptent sur les doigts d'une main.

22 b) Cette question est une variante simple des cercles de Gershgorin, un exercice très classique. L'indication fournie la rend parfaitement abordable ; il s'agit juste d'être précis dans la manipulation des inégalités, notamment de ne pas oublier de préciser à la fin que l'on divise par le réel strictement positif $|x_i|$.

23 b) Prêtant insuffisamment attention aux indices, la plupart des candidats ayant abordé cette question affirment que l'égalité demandée est une conséquence directe de l'hypothèse $\|\mathbf{v}_p\| = 1$, alors qu'en fait

$$\|\mathbf{v}_p\|^2 = \sum_{i=1}^{n} (v_{p,i})^2.$$

3.1.5 Éléments de correction

Les indications exposées dans cette section proposent aux candidats des pistes de solution pour répondre aux questions du problème. Elles sont cependant parfois trop succinctes pour constituer un modèle de rédaction répondant à toutes les attentes du jury.

1 a) Le sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^{a+b}$ engendré par les vecteurs colonnes de $G_{K_{a,b}}$ admet manifestement pour base la première et la dernière colonne de cette matrice (on utilise ici que a et b sont tous deux supérieurs à 1) ; le rang de $G_{K_{a,b}}$ est donc 2. La trace de $G_{K_{a,b}}$ est nulle, puisque tous les coefficients diagonaux de cette matrice sont nuls. Enfin, on calcule

$$(G_{K_{a,b}})^2 = \left(\begin{array}{ccc|ccc} b & \cdots & b & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ b & \cdots & b & 0 & \cdots & 0 \\ \hline 0 & \cdots & 0 & a & \cdots & a \\ \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & a & \cdots & a \end{array}\right)$$

où les blocs diagonaux sont de taille $a \times a$ et $b \times b$; ainsi la trace de $(G_{K_{a,b}})^2$ vaut $2ab$.

b) La multiplicité de 0 comme valeur propre de $G_{K_{a,b}}$ est supérieure ou égale à la dimension de l'espace propre correspondant de $G_{K_{a,b}}$. Cet espace propre est le noyau de $G_{K_{a,b}}$, et est de dimension $a+b-2$ d'après le théorème du rang et la réponse à la question a). La multiplicité de 0 comme valeur propre est donc supérieure ou égale à $a+b-2$.

Notons λ_1, ..., λ_{a+b} les valeurs propres complexes de $G_{K_{a,b}}$, répétées selon leurs multiplicités. En trigonalisant $G_{K_{a,b}}$, on parvient aux équations

$$0 = \mathrm{Tr}(G_{K_{a,b}}) = \lambda_1 + \cdots + \lambda_{a+b} \quad \text{et} \quad 2ab = \mathrm{Tr}((G_{K_{a,b}})^2) = \lambda_1^2 + \cdots + \lambda_{a+b}^2$$

où Tr désigne la trace d'une matrice carrée. Au moins $a+b-2$ des valeurs propres λ_i sont nulles, donc au plus 2 ne le sont pas. Elles ne peuvent pas être toutes nulles à cause de la seconde équation, et elles doivent être de somme nulle à cause de la première équation. Il y a donc exactement deux valeurs propres non nulles, opposées l'une de l'autre. Notons-les λ et $-\lambda$; alors notre seconde équation nous donne $2\lambda^2 = 2ab$, d'où $\lambda = \pm\sqrt{ab}$.

En conclusion, le spectre de $K_{a,b}$ est formé des valeurs $\sqrt{ab}$ et $-\sqrt{ab}$, toutes deux avec multiplicité 1, et (dans le cas où $a+b > 2$) de la valeur 0 avec multiplicité $a+b-2$.

Il est possible d'argumenter de façon légèrement différente : comme $G_{K_{a,b}}$ est symétrique donc diagonalisable, la multiplicité de 0 comme valeur propre est égale à la dimension de l'espace propre associé, donc est $a+b-2$. Il est par ailleurs possible d'exhiber des vecteurs propres pour les valeurs propres $\pm\sqrt{ab}$.

2 a) L'énoncé rappelle que M, matrice symétrique réelle, est diagonalisable avec une matrice de passage orthogonale. Il existe donc une base orthonormée $(\mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_n)$ de $\mathbb{R}^n$ formée de vecteurs propres. Appelons λ_i la valeur propre de $\mathbf{e}_i$. Soit $\mathbf{x} = x_1\mathbf{e}_1 + \cdots + x_n\mathbf{e}_n$ un élément de $\mathbb{R}^n$. On calcule sans peine $M\mathbf{x} = \lambda_1 x_1 \mathbf{e}_1 + \cdots + \lambda_n x_n \mathbf{e}_n$, puis

$$(\mathbf{x} \mid \mathbf{x}) = x_1^2 + \cdots + x_n^2 \ \text{ et } \ (\mathbf{x} \mid M\mathbf{x}) = \lambda_1 x_1^2 + \cdots + \lambda_n x_n^2.$$

Pour tout $i \in [\![1, n]\!]$, on a $x_i^2 \geqslant 0$ et $\lambda_{\min}(M) \leqslant \lambda_i \leqslant \lambda_{\max}(M)$, d'où

$$\lambda_{\min}(M)\, x_i^2 \leqslant \lambda_i\, x_i^2 \leqslant \lambda_{\max}(M)\, x_i^2,$$

et par sommation

$$\lambda_{\min}(M)\, (\mathbf{x} \mid \mathbf{x}) \leqslant (\mathbf{x} \mid M\mathbf{x}) \leqslant \lambda_{\max}(M)\, (\mathbf{x} \mid \mathbf{x}).$$

b) En divisant les deux membres de l'inégalité obtenue au a) par le nombre strictement positif $(\mathbf{x} \mid \mathbf{x})$, on constate que $\lambda_{\max}(M)$ majore

$$\frac{(\mathbf{x} \mid M\mathbf{x})}{(\mathbf{x} \mid \mathbf{x})}$$

pour chaque $x \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$, ce qui prouve l'existence de la borne supérieure indiquée dans l'énoncé et l'inégalité

$$\lambda_{\max}(M) \geqslant \sup_{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}} \frac{(\mathbf{x} \mid M\mathbf{x})}{(\mathbf{x} \mid \mathbf{x})}.$$

D'un autre côté, la valeur $\lambda_{\max}(M)$ est l'un des λ_i, et pour le vecteur $\mathbf{e}_i$ correspondant, on a

$$\frac{(\mathbf{e}_i \mid M\mathbf{e}_i)}{(\mathbf{e}_i \mid \mathbf{e}_i)} = \lambda_i = \lambda_{\max}(M).$$

La borne supérieure vaut donc $\lambda_{\max}(M)$ et est atteinte.
Un raisonnement analogue établit que

$$\lambda_{\min}(M) = \inf_{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}} \frac{(\mathbf{x} \mid M\mathbf{x})}{(\mathbf{x} \mid \mathbf{x})}$$

et que cette borne inférieure est atteinte.

3 a) Soit $\mathbf{x}' \in \mathbb{R}^{n'}$ un vecteur propre (donc non nul) de M' pour la valeur propre $\lambda_{\min}(M')$; alors

$$\lambda_{\min}(M') = \frac{(\mathbf{x}' \mid M'\mathbf{x}')}{(\mathbf{x}' \mid \mathbf{x}')}.$$

Posons $\mathbf{x} = (\mathbf{x}', 0)$ où 0 est le vecteur nul de $\mathbb{R}^{n''}$. Un calcul immédiat par blocs montre que $(\mathbf{x} \mid M\mathbf{x}) = (\mathbf{x}' \mid M'\mathbf{x}')$, d'où

$$\lambda_{\min}(M) = \inf_{\mathbf{y} \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}} \frac{(\mathbf{y} \mid M\mathbf{y})}{(\mathbf{y} \mid \mathbf{y})} \leqslant \frac{(\mathbf{x} \mid M\mathbf{x})}{(\mathbf{x} \mid \mathbf{x})} = \frac{(\mathbf{x}' \mid M'\mathbf{x}')}{(\mathbf{x}' \mid \mathbf{x}')} = \lambda_{\min}(M').$$

On montre de même que $\lambda_{\max}(M) \geqslant \lambda_{\max}(M')$.

b) Considérons le vecteur $\mathbf{x}_t$ indiqué dans l'énoncé, où $t \in \mathbb{R}$. Un calcul par blocs donne

$$(\mathbf{x}_t \mid M\mathbf{x}_t) = t^2(\mathbf{x}' \mid M'\mathbf{x}') + t(\mathbf{x}' \mid L\mathbf{x}'') + t(\mathbf{x}'' \mid {}^tL\mathbf{x}') + (\mathbf{x}'' \mid M''\mathbf{x}'').$$

En regardant $\mathbf{x}'$ et $\mathbf{x}''$ comme des vecteurs colonnes et en identifiant une matrice 1×1 à son unique coefficient, on a de plus

$$(\mathbf{x}'' \mid {}^tL\mathbf{x}') = {}^t\mathbf{x}''\, {}^tL\, \mathbf{x}' = {}^t\big({}^t\mathbf{x}'\, L\mathbf{x}''\big) = {}^t\mathbf{x}'\, L\mathbf{x}'' = (\mathbf{x}' \mid L\mathbf{x}'').$$

(Le produit scalaire du membre de gauche de l'égalité ci-dessus est calculé dans $\mathbb{R}^{n''}$, celui du membre de droite est calculé dans $\mathbb{R}^{n'}$.) Ainsi, pour tout $t \in \mathbb{R}$, on a

$$t^2(\mathbf{x}' \mid M'\mathbf{x}') + 2t(\mathbf{x}' \mid L\mathbf{x}'') + (\mathbf{x}'' \mid M''\mathbf{x}'') \geqslant 0.$$

Si $(\mathbf{x}' \mid M'\mathbf{x}') \neq 0$, il s'agit là d'un polynôme de degré 2 à coefficients réels, qui ne peut pas changer de signe, donc qui est de discriminant négatif :

$$4(\mathbf{x}' \mid L\mathbf{x}'')^2 - 4(\mathbf{x}' \mid M'\mathbf{x}')(\mathbf{x}'' \mid M''\mathbf{x}'') \leqslant 0.$$

Si $(\mathbf{x}' \mid M'\mathbf{x}') = 0$, il s'agit d'une forme linéaire affine en t, qui ne peut pas changer de signe, donc qui est constante :

$$(\mathbf{x}' \mid M'\mathbf{x}') = (\mathbf{x}' \mid L\mathbf{x}'') = 0.$$

L'égalité demandée est donc vraie dans l'un et l'autre cas.

c) Soit $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$ un vecteur propre (donc non nul) de M pour la valeur propre $\lambda_{\max}(M)$. Écrivant $\mathbf{x} = (\mathbf{x}', \mathbf{x}'')$, on calcule par blocs

$$\lambda_{\max}(M)\ (\mathbf{x} \mid \mathbf{x}) = (\mathbf{x} \mid M\mathbf{x}) = (\mathbf{x}' \mid M'\mathbf{x}') + 2(\mathbf{x}' \mid L\mathbf{x}'') + (\mathbf{x}'' \mid M''\mathbf{x}'').$$

En utilisant l'inégalité prouvée dans le b), puis les inégalités

$$0 \leqslant (\mathbf{x}' \mid M'\mathbf{x}') \leqslant \lambda_{\max}(M')\ (\mathbf{x}' \mid \mathbf{x}') \quad \text{et} \quad 0 \leqslant (\mathbf{x}'' \mid M''\mathbf{x}'') \leqslant \lambda_{\max}(M'')\ (\mathbf{x}'' \mid \mathbf{x}'')$$

et enfin l'inégalité de Cauchy-Schwarz, on majore

$$\begin{aligned}
\lambda_{\max}(M)\ (\mathbf{x} \mid \mathbf{x}) &\leqslant (\mathbf{x}' \mid M'\mathbf{x}') + 2\sqrt{(\mathbf{x}' \mid M'\mathbf{x}')(\mathbf{x}'' \mid M''\mathbf{x}'')} + (\mathbf{x}'' \mid M''\mathbf{x}'') \\
&\leqslant \left(\sqrt{(\mathbf{x}' \mid M'\mathbf{x}')} + \sqrt{(\mathbf{x}'' \mid M''\mathbf{x}'')}\right)^2 \\
&\leqslant \left(\sqrt{\lambda_{\max}(M')}\sqrt{(\mathbf{x}' \mid \mathbf{x}')} + \sqrt{\lambda_{\max}(M'')}\sqrt{(\mathbf{x}'' \mid \mathbf{x}'')}\right)^2 \\
&\leqslant \big(\lambda_{\max}(M') + \lambda_{\max}(M'')\big)\ \big((\mathbf{x}' \mid \mathbf{x}') + (\mathbf{x}'' \mid \mathbf{x}'')\big).
\end{aligned}$$

On conclut en utilisant le théorème de Pythagore $(\mathbf{x}' \mid \mathbf{x}') + (\mathbf{x}'' \mid \mathbf{x}'') = (\mathbf{x} \mid \mathbf{x})$ et la stricte positivité de cette quantité.

d) La question 2 a) montre que la matrice $\widetilde{M} = M - \lambda_{\min}(M)I_n$ est positive. On décompose $\widetilde{M}$ de façon similaire à M, faisant notamment apparaître les blocs diagonaux $\widetilde{M}' = M' - \lambda_{\min}(M)I_{n'}$ et $\widetilde{M}'' = M'' - \lambda_{\min}(M)I_{n''}$. D'après la question c), on a

$$\lambda_{\max}(\widetilde{M}) \leqslant \lambda_{\max}(\widetilde{M}') + \lambda_{\max}(\widetilde{M}'').$$

Cela se réécrit

$$\lambda_{\max}(M) - \lambda_{\min}(M) \leqslant \big(\lambda_{\max}(M') - \lambda_{\min}(M)\big) + \big(\lambda_{\max}(M'') - \lambda_{\min}(M)\big),$$

qui se simplifie en l'inégalité demandée.

4 L'entier n et la matrice M étant fixés, on procède par récurrence sur k, l'hypothèse de récurrence (H_k) s'énonçant : « Pour toute partition en k parts $n = n_1 + \cdots + n_k$, appelant M_1, ..., M_k les blocs diagonaux de M correspondant à cette partition, l'inégalité ... vaut. »

La question 3 d) prouve l'énoncé (H_2). Supposons l'hypothèse de récurrence (H_{k-1}) prouvée pour $k-1 \geqslant 2$ et établissons (H_k). Soit $n = n_1 + \cdots + n_k$ comme dans l'énoncé de (H_k). Écrivons la matrice M par blocs selon cette partition de n et notons

$$M'_{k-1} = \begin{pmatrix} M_{k-1} & * \\ * & M_k \end{pmatrix}$$

la matrice formée des quatre blocs dans le coin inférieur droit de M. L'énoncé (H_{k-1}) appliqué à la partition $n = n_1 + \cdots + n_{k-2} + (n_{k-1} + n_k)$ nous donne

$$\lambda_{\max}(M) + (k-2)\lambda_{\min}(M) \leqslant \lambda_{\max}(M_1) + \lambda_{\max}(M_2) + \cdots + \lambda_{\max}(M'_{k-1}).$$

Une variante de la question 3 a) indique que $\lambda_{\min}(M) \leqslant \lambda_{\min}(M'_{k-1})$; en ajoutant membre à membre, nous obtenons

$$\lambda_{\max}(M) + (k-1)\lambda_{\min}(M) \leqslant \lambda_{\max}(M_1) + \lambda_{\max}(M_2) + \cdots + \lambda_{\max}(M'_{k-1}) + \lambda_{\min}(M'_{k-1}).$$

Pour conclure, il suffit d'observer que

$$\lambda_{\max}(M'_{k-1}) + \lambda_{\min}(M'_{k-1}) \leqslant \lambda_{\max}(M_{k-1}) + \lambda_{\max}(M_k)$$

d'après la question 3 d) appliquée à la matrice M'_{k-1}.

D'autres méthodes sont possibles ; la plupart des variantes nécessitent d'inclure dans l'hypothèse de récurrence un quantificateur portant sur la matrice M.

5 a) En choisissant une énumération des sommets de Γ, nous pouvons définir la matrice d'adjacence G_Γ. À l'évidence, $\lambda_{\min} = \lambda_{\min}(G_\Gamma)$. Faisons l'hypothèse que $\lambda_{\min} \geqslant 0$. Alors toutes les valeurs propres de G_Γ sont positives. Comme G_Γ est de trace nulle, cela implique que toutes les valeurs propres de G_Γ sont nulles. Comme G_Γ est diagonalisable, cela entraîne que G_Γ est en fait nulle. Cela est impossible, car par hypothèse Γ contient au moins une arête. Nous avons donc démontré par l'absurde que $\lambda_{\min} < 0$.

b) Supposons qu'il existe un coloriage admissible de Γ en k couleurs, donné par une application $c : S \to [\![1, k]\!]$. Choisissons une énumération des sommets de Γ en commençant par les sommets dans $c^{-1}(\{1\})$, puis en prenant les sommets dans $c^{-1}(\{2\})$, etc. La matrice G_Γ a alors la forme

$$G_\Gamma = \begin{pmatrix} 0 & * & \dots & * \\ * & 0 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & * \\ * & \dots & * & 0 \end{pmatrix}$$

avec k blocs diagonaux nuls. L'inégalité prouvée à la question 4 donne ici $\lambda_{\max}(G_\Gamma) + (k - 1)\lambda_{\min}(G_\Gamma) \leqslant 0$, d'où $k \geqslant 1 - \lambda_{\max}/\lambda_{\min}$.

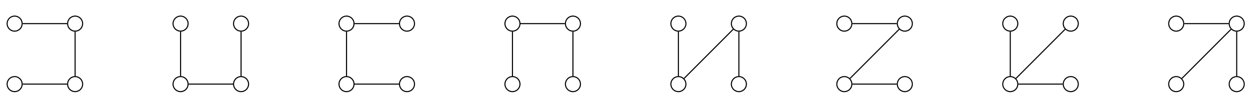
On peut partitionner les vingt-sept sommets du graphe de Schläfli en neuf paquets, chaque paquet de trois étant formé des points sur un même diamètre du disque. Les points d'un même paquet ne sont reliés par aucune arête. De la sorte, on voit que le graphe de Schläfli admet un coloriage admissible avec neuf couleurs.

6 Justifions en détail que $\sim$ est une relation transitive. Soit $(x, y, z) \in S^3$ tels que $x \sim y$ et $y \sim z$. Alors il existe deux chemins $(x_0, \dots, x_\ell)$ et $(y_0, \dots, y_m)$ dans Γ tels que $x_0 = x$, $x_\ell = y_0 = y$ et $y_m = z$. Posons $x_k = y_{k-\ell}$ pour tout $k \in [\![\ell + 1, \ell + m]\!]$. Assurément alors $(x_0, \dots, x_{\ell+m})$ est un chemin reliant $x_0 = x$ à $x_{\ell+m} = y_m = z$. Par suite $x \sim z$.

On vérifie de façon analogue que $\sim$ est réflexive (pour relier x à lui-même, on prend un chemin de longueur 0) et symétrique (supposant $x \sim y$, on prend un chemin reliant x à y, et on le parcourt dans le sens inverse pour relier y à x, établissant ainsi $y \sim x$).

7 Soit Γ, S, A, S', S'' comme dans l'énoncé. Soit $x \in S'$ et $y \in S''$ (ces deux ensembles sont non vides). Puisque Γ est connexe, on a $x \sim y$, donc il existe un chemin $(x_0, \dots, x_\ell)$ reliant x à y. Soit $I = \{k \in [\![0, \ell]\!] \mid x_k \in S''\}$. Alors I est un ensemble non vide de $\mathbb{N}$ (il possède ℓ), donc il contient un plus petit élément, disons k. Certainement $k > 0$ car $0 \notin I$ par construction. Ainsi x_{k-1} existe et n'appartient pas à S'', donc $x_{k-1} \in S'$, et comme $x_k \in S''$, l'arête $\{x_{k-1}, x_k\}$ relie un point de S' à un point de S''.

8 Il y a huit arbres couvrant le graphe dessiné dans l'énoncé :



9 a) Deux réponses sont ici acceptables, à savoir $M\,{}^t\mathrm{com}(M) = \det(M) I_n$ et ${}^t\mathrm{com}(M)\, M = \det(M) I_n$. Ces identités se déduisent de la règle de calcul du déterminant d'une matrice selon une ligne ou une colonne.

b) Si M est de rang n, alors $\det(M)$ est non nul, et donc ${}^t\mathrm{com}(M)$ est inversible d'inverse $M/\det(M)$ d'après la question a) ; par suite $\mathrm{com}(M)$ est de rang n. Si M est de rang inférieur ou égal à $n-2$, alors elle n'admet pas de sous-matrice carrée inversible de taille $(n-1) \times (n-1)$, donc tous les mineurs d'ordre $n - 1$ de M sont nuls, et alors $\mathrm{com}(M)$ est nulle et de rang 0.

Il reste le cas où M est de rang $n-1$. Le noyau de M est alors une droite, et cette droite contient l'image de ${}^t\mathrm{com}(M)$ d'après l'identité $M\,{}^t\mathrm{com}(M) = 0$ énoncée dans la réponse à la question a).

Par conséquent, le rang de ${}^t\mathrm{com}(M)$ est au plus 1. Or une matrice et sa transposée ont même rang : le rang de $\mathrm{com}(M)$ est donc au plus 1. Maintenant, M possède une sous-matrice carrée inversible de taille $(n-1)\times(n-1)$, donc $\mathrm{com}(M)$ n'est pas nulle. En fin de compte, le rang de $\mathrm{com}(M)$ est égal à 1.

Remarque : dans le cas $n=1$, les réponses aux questions a) et b) restent valables si l'on convient que $\mathrm{com}(M)$ est la matrice identité I_1 quelle que soit M.

c) Soit $(i,j)\in[\![1,n]\!]^2$. La matrice extraite de ${}^tM$ obtenue en supprimant la j-ème ligne et la i-ème colonne est la transposée de la matrice extraite de M obtenue en supprimant la i-ème ligne et la j-ème colonne. Ces deux matrices ont donc même déterminant, ce qui implique, après multiplication par le signe $(-1)^{i+j}$, que le coefficient (j,i) de $\mathrm{com}({}^tM)$ est égal au coefficient (i,j) de $\mathrm{com}(M)$. Ainsi $\mathrm{com}({}^tM)={}^t\mathrm{com}(M)$.

Il est aussi possible de traiter d'abord le cas d'une matrice M inversible, en inférant de la question a) la formule $\mathrm{com}(M)=\det(M)\ ({}^tM)^{-1}$. Le cas général s'en déduit en établissant la continuité de l'application $M\mapsto\mathrm{com}(M)$ et en utilisant la densité de $\mathbf{GL}_n(\mathbb{R})$ dans l'ensemble des matrices de taille $n\times n$.

10 a) Soit $(c_{i,j})$ la famille des coefficients de C ; soit $\delta_{i,j}$ le symbole de Kronecker donnant les coefficients de la matrice identité. La formule classique pour le déterminant décrit

$$\det(I_m+XC)=\sum_{\sigma\in\mathfrak{S}_m}\mathrm{sgn}(\sigma)\ (\delta_{1,\sigma(1)}+Xc_{1,\sigma(1)})\cdots(\delta_{m,\sigma(m)}+Xc_{m,\sigma(m)})$$

comme un polynôme en X à coefficients réels. (Ici, $\mathrm{sgn}(\sigma)$ est la signature d'une permutation $\sigma\in\mathfrak{S}_m$.)

b) Chaque produit figurant dans la somme ci-dessus peut être développé de la façon suivante :

$$(\delta_{1,\sigma(1)}+Xc_{1,\sigma(1)})\cdots(\delta_{m,\sigma(m)}+Xc_{m,\sigma(m)})=\sum_{K\subset[\![1,m]\!]}\left(\prod_{j\notin K}\delta_{j,\sigma(j)}\right)\left(\prod_{i\in K}Xc_{i,\sigma(i)}\right).$$

Substituant dans la formule de la question a), on obtient une somme double. Échangeant les signes de sommation, cela donne, en raison de l'annulation des symboles de Kronecker :

$$\begin{aligned}\det(I_m+XC)&=\sum_{K\subset[\![1,m]\!]}\sum_{\sigma\in\mathfrak{S}_m}\mathrm{sgn}(\sigma)\left(\prod_{j\notin K}\delta_{j,\sigma(j)}\right)\left(\prod_{i\in K}Xc_{i,\sigma(i)}\right)\\&=\sum_{K\subset[\![1,m]\!]}X^{|K|}\sum_{\substack{\sigma\in\mathfrak{S}_m\\ \sigma(j)=j\text{ si }j\notin K}}\mathrm{sgn}(\sigma)\left(\prod_{i\in K}c_{i,\sigma(i)}\right).\end{aligned}$$

La seconde somme ci-dessus porte sur les permutations fixant les points de $[\![1,m]\!]\setminus K$. La donnée d'une telle permutation, disons σ, équivaut à celle d'une permutation σ' de l'ensemble K, et alors $\mathrm{sgn}(\sigma)=\mathrm{sgn}(\sigma')$, comme on le voit en écrivant σ' comme un produit de transpositions et en examinant la parité du nombre de facteurs nécessaires. Ainsi la seconde somme est égale au déterminant de la matrice C_K extraite de C obtenue en ne gardant que les coefficients dont les indices de ligne et de colonne appartiennent à K. Nous avons donc prouvé que

$$\det(I_m+XC)=\sum_{K\subset[\![1,m]\!]}X^{|K|}\det(C_K)=\sum_{n=0}^{m}X^n\sum_{K\in\mathscr{P}_n([\![1,m]\!])}\det(C_K).$$

Le résultat demandé est équivalent à cette formule.

11 a) Considérons les deux matrices par blocs $\begin{pmatrix} I_m & -XB \\ A & I_n \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} I_m & XB \\ 0 & I_n \end{pmatrix}$ données dans l'énoncé. Les tailles des blocs s'accordent pour légitimer le calcul des produits

$$\begin{pmatrix} I_m & -XB \\ A & I_n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} I_m & XB \\ 0 & I_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} I_m & 0 \\ A & I_n + XAB \end{pmatrix}$$

et

$$\begin{pmatrix} I_m & XB \\ 0 & I_n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} I_m & -XB \\ A & I_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} I_m + XBA & 0 \\ A & I_n \end{pmatrix}.$$

Les matrices ci-dessus sont carrées et de même taille $(m+n) \times (m+n)$, à coefficients dans le corps $\mathbb{R}(X)$; il est donc légitime de considérer leurs déterminants. En utilisant la multiplicativité du déterminant et la formule bien connue du déterminant d'une matrice triangulaire par blocs, on en déduit la formule demandée

$$\det(I_n + XAB) = \det \begin{pmatrix} I_m & -XB \\ A & I_n \end{pmatrix} = \det(I_m + XBA).$$

b) D'après la question 10 b), le coefficient de X^n dans $\det(I_m + XBA)$ est la somme des mineurs principaux d'ordre n de la matrice BA. Soit $K \in \mathscr{P}_n(\llbracket 1, m \rrbracket)$. La sous-matrice extraite de BA en ne gardant que les coefficients dont les indices de ligne et de colonne appartiennent à K est simplement $B_K A_K$, par définition de A_K et B_K. Le coefficient de X^n dans $\det(I_m + XBA)$ est donc

$$\sum_{K \in \mathscr{P}_n(\llbracket 1, m \rrbracket)} \det(B_K A_K).$$

De plus, A_K et B_K sont des matrices carrées de même taille, donc $\det(B_K A_K) = \det(A_K)\det(B_K)$. En fin de compte, le coefficient de X^n dans $\det(I_m + XBA)$ est le membre de droite de l'égalité donnée dans l'énoncé.

D'autre part, le coefficient de X^n dans $\det(I_n + XAB)$ est la somme des mineurs principaux d'ordre n de la matrice AB. Comme AB est carrée de taille $n \times n$, il n'y a qu'un seul tel mineur, à savoir $\det(AB)$.

Le résultat demandé découle alors de la question a).

12 Chaque ligne de N_Γ correspond à une arête de Γ, donc contient un coefficient -1, sur la colonne indexée par le même numéro que le sommet au début de l'arête, et un coefficient 1, sur la colonne indexée par le même numéro que le sommet à la fin de l'arête. Les autres coefficients sont nuls. Par conséquent, la somme des coefficients sur chaque ligne est nulle. Dit autrement, la somme des colonnes de N_Γ est nulle. Les n vecteurs colonnes de Γ étant ainsi liés, la dimension de l'espace vectoriel qu'ils engendrent est strictement inférieure à n. Le rang de N_Γ est donc strictement inférieur à n.

13 Soit M une sous-matrice carrée extraite de N_Γ. Si chaque ligne de M contient un 1 et un -1, alors la somme des colonnes de M est nulle, donc les colonnes de M sont liées, et alors $\det(M) = 0$. La conclusion $\det(M) = 0$ a également lieu si une ligne de M ne contient que des 0. Le dernier cas est celui où une ligne de M contient un seul coefficient non nul, qui vaut bien sûr ± 1. Lorsqu'on calcule le déterminant de M en développant selon cette ligne, on obtient un seul terme, égal à plus ou moins le déterminant de la sous-matrice carrée M' extraite de M en omettant la ligne et la colonne où se trouve notre coefficient ± 1. Une récurrence sur la taille de M, facilement initialisée, permet alors d'obtenir la propriété annoncée.

14 a) Soit $\mathbf{x} = (x_1, \ldots, x_n)$ un élément de $\mathbb{R}^n$, vu comme vecteur colonne. Considérons les trois énoncés suivants :

(A) $N_\Gamma\,\mathbf{x} = 0$.

(B) $x_j = x_k$ pour tous $j, k \in [\![1, n]\!]$ tels que $\{s_j, s_k\}$ est une arête de Γ.

(C) $x_j = x_k$ pour tous $j, k \in [\![1, n]\!]$ tels que $s_j \sim s_k$.

La question demande d'établir que les énoncés (A) et (C) sont équivalents. Il suffit de prouver que (A) et (B) d'une part, et (B) et (C) d'autre part, sont équivalents.

La i-ème ligne du vecteur colonne $N_\Gamma\mathbf{x}$ est égale à $x_j - x_k$, si $j, k \in [\![1, n]\!]$ sont les indices tels que s_j et s_k sont les sommets à la fin et au début de l'arête a_i. Par conséquent, pour que $\mathbf{x}$ appartienne au noyau de N_Γ, il faut et il suffit que $x_j - x_k$ soit nul chaque fois que $\{s_j, s_k\}$ est une arête de Γ. Ceci justifie l'équivalence des énoncés (A) et (B).

Supposons (B). Soient $j, k \in [\![1, n]\!]$ tels que $s_j \sim s_k$. Alors il existe un chemin dans Γ reliant s_j à s_k. Appelant ℓ la longueur de ce chemin, il existe une application $p : [\![0, \ell]\!] \to [\![1, n]\!]$ permettant d'écrire ce chemin sous la forme $(s_{p(0)}, s_{p(1)}, \ldots, s_{p(\ell)})$; au surplus $p(0) = j$ et $p(\ell) = k$. Pour chaque $i \in [\![1, \ell]\!]$, la paire $\{s_{p(i-1)}, s_{p(i)}\}$ est une arête de Γ, et donc $x_{p(i-1)} = x_{p(i)}$ puisque l'énoncé (B) est supposé vrai. Par conséquent

$$x_j = x_{p(0)} = x_{p(1)} = \cdots = x_{p(\ell)} = x_k.$$

Ceci établit l'énoncé (C).

L'alinéa précédent établit l'implication (B) $\Rightarrow$ (C). L'implication réciproque, plus simple, vient du fait que si $\{s_j, s_k\}$ est une arête de Γ, alors $s_j \sim s_k$.

b) La notation $\mathbb{R}^S$ désigne l'espace vectoriel des fonctions de S dans $\mathbb{R}$. Soit $\mathscr{C}$ le sous-espace de $\mathbb{R}^S$ formé des fonctions $\varphi : S \to \mathbb{R}$ constantes sur chaque composante connexe de Γ. La dimension de $\mathscr{C}$ est égale au nombre de composantes connexes de Γ, puisque l'ensemble des fonctions indicatrices desdites composantes est une base de $\mathscr{C}$.

Soit $\Psi : \mathbb{R}^S \to \mathbb{R}^n$ l'application qui, à une fonction $\varphi : S \to \mathbb{R}$, associe la famille $\mathbf{x} = (\varphi(s_1), \ldots, \varphi(s_n))$. Cette application Ψ est une bijection linéaire entre deux espaces vectoriels de dimension n. La question a) démontre que $\Psi(\varphi)$ appartient au noyau de N_Γ si et seulement si φ appartient à $\mathscr{C}$. La bijection linéaire Ψ préservant les dimensions des sous-espaces vectoriels, le noyau de N_Γ et $\mathscr{C}$ ont même dimension.

En conclusion, la dimension du noyau de N_Γ est égale au nombre de composantes connexes de Γ.

c) Dans le cas particulier où Γ est connexe, l'énoncé de la question a) se réduit à : $\mathbf{x}$ appartient au noyau de N_Γ si et seulement si les coordonnées x_j de $\mathbf{x}$ sont toutes égales.

15 a) La matrice Q_Γ ne dépend pas du choix de l'orientation du graphe. En effet, si l'on renverse l'orientation de l'arête a_i, alors la i-ème ligne de N_Γ et la i-ème colonne de ${}^tN_\Gamma$ sont toutes deux multipliées par -1, et ce changement n'a aucune conséquence lorsqu'on effectue le produit ${}^tN_\Gamma\, N_\Gamma$.

Remarque : on peut en fait facilement vérifier (ce n'était pas demandé) que $Q_\Gamma = V - G_\Gamma$, où V est la matrice diagonale de taille $n \times n$ dont le i-ème coefficient diagonal est égal au nombre d'arêtes de Γ incidentes au sommet s_i.

b) Une conséquence immédiate de la définition $Q_\Gamma = {}^tN_\Gamma\, N_\Gamma$ est que le noyau de N_Γ est inclus dans celui de Q_Γ. Réciproquement, si $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$ appartient au noyau de Q_Γ, alors

$$(N_\Gamma\mathbf{x} \mid N_\Gamma\mathbf{x}) = (\mathbf{x} \mid {}^tN_\Gamma\, N_\Gamma\mathbf{x}) = (\mathbf{x} \mid Q_\Gamma\mathbf{x}) = (\mathbf{x} \mid 0) = 0;$$

le produit scalaire étant défini, il vient $N_\Gamma\mathbf{x} = 0$, et $\mathbf{x}$ appartient au noyau de N_Γ.

c) La définition $Q_\Gamma = {}^tN_\Gamma\, N_\Gamma$ implique que l'image de Q_Γ est incluse dans celle de ${}^tN_\Gamma$. Ensuite, le théorème du rang et la question b) donnent

$$\dim \operatorname{im} Q_\Gamma = n - \dim \ker Q_\Gamma = n - \dim \ker N_\Gamma = \dim \operatorname{im} N_\Gamma.$$

Or une matrice et sa transposée ont même rang. Il vient ainsi

$$\dim \operatorname{im} Q_\Gamma = \dim \operatorname{im} N_\Gamma = \dim \operatorname{im} {}^tN_\Gamma.$$

L'inclusion $\operatorname{im} Q_\Gamma \subset \operatorname{im} {}^tN_\Gamma$ obtenue au début de l'argument est donc une égalité.

d) Si Γ n'est pas connexe, alors $\ker Q_\Gamma = \ker N_\Gamma$ est de dimension au moins 2 (questions 14 b) et 15 b)), donc Q_Γ est de rang au plus $n-2$, donc $\operatorname{com}(Q_\Gamma) = 0$ (question 9 b)).

Si Γ est connexe, alors Q_Γ est de rang $n-1$ et son noyau est engendré par le vecteur $(1, \ldots, 1)$ (questions 14 c) et 15 b)). L'identité $Q_\Gamma\ {}^t\operatorname{com}(Q_\Gamma) = 0$ (question 9 a)) implique que chaque colonne de ${}^t\operatorname{com}(Q_\Gamma)$ est proportionnelle au vecteur $(1, \ldots, 1)$. Les lignes de ${}^t\operatorname{com}(Q_\Gamma)$, c'est-à-dire les colonnes de $\operatorname{com}(Q_\Gamma)$, sont donc toutes égales.

e) La matrice Q_Γ est symétrique, donc sa comatrice $\operatorname{com}(Q_\Gamma)$ l'est aussi (question 9 c)). La question d) affirme que les coefficients sur une même ligne de $\operatorname{com}(Q_\Gamma)$ sont tous égaux ; par symétrie, les coefficients sur une même colonne de $\operatorname{com}(Q_\Gamma)$ sont également tous égaux. En fin de compte, tous les coefficients de la matrice $\operatorname{com}(Q_\Gamma)$ sont égaux, ce qui signifie que $\operatorname{com}(Q_\Gamma)$ est un multiple scalaire de J_n.

16 Un graphe (S, B) tel que $|S| = |B| + 1$ est un arbre si et seulement si c'est un graphe connexe ; cette remarque entraîne l'équivalence entre les énoncés i) et ii).

La matrice N_B est la matrice d'incidence du graphe (S, B). L'équivalence entre les énoncés ii) et iii) est donc une conséquence immédiate de la question 14 b) (et du théorème du rang appliqué à la matrice N_B).

Si iv) est vraie, alors N_B contient une sous-matrice carrée inversible de taille $(n-1) \times (n-1)$, donc est de rang supérieur ou égal à $n-1$. Comme N_B possède $n-1$ lignes, il y a en fait égalité, d'où iii).

Enfin, si iv) n'est pas vraie, alors N'_B n'est pas inversible, donc il existe un vecteur $\mathbf{x}' \in \mathbb{R}^{n-1} \setminus \{0\}$ dans le noyau de N'_B. Alors le vecteur $\mathbf{x} = (\mathbf{x}', 0)$ de $\mathbb{R}^n$ est non nul, appartient au noyau de N_B, et n'est pas proportionnel au vecteur $(1, \ldots, 1)$. Ceci nous donne deux vecteurs linéairement indépendants dans le noyau de N_B. D'après le théorème du rang, N_B est donc de rang au plus $n-2$, et ainsi iii) n'est pas vraie. Ce raisonnement démontre l'implication iii) $\Rightarrow$ iv) par contraposition.

17 a) Soit N'_Γ la matrice de taille $m \times (n-1)$ extraite de N_Γ obtenue en supprimant la dernière colonne. Alors $Q'_\Gamma = {}^tN'_\Gamma\, N'_\Gamma$ est la matrice carrée de taille $(n-1) \times (n-1)$ extraite de Q_Γ obtenue en supprimant la dernière ligne et la dernière colonne. La formule de Binet-Cauchy donne

$$\det(Q'_\Gamma) = \sum_{B \in \mathscr{P}_{n-1}([\![1,m]\!])} \det({}^tN'_B) \det(N'_B) = \sum_{B \in \mathscr{P}_{n-1}([\![1,m]\!])} \det(N'_B)^2.$$

Le graphe (S, B) est un arbre couvrant Γ si et seulement si $\det(N'_B) \neq 0$ (question 16), donc si et seulement si $\det(N'_B) \in \{-1, 1\}$ (question 13). Par conséquent

$$\det(Q'_\Gamma) = \sum_{\substack{B \in \mathscr{P}_{n-1}([\![1,m]\!]) \\ (S,B) \text{ est un arbre couvrant}}} (\pm 1)^2 = \kappa(\Gamma).$$

b) La question 15 e) signifie que les coefficients de la matrice $\operatorname{com}(Q_\Gamma)$ sont tous égaux. Or, d'après la question a), le coefficient en position (n, n) de $\operatorname{com}(Q_\Gamma)$ est égal à $\kappa(\Gamma)$. Donc tous les coefficients de $\operatorname{com}(Q_\Gamma)$ sont égaux à $\kappa(\Gamma)$.

18 Le réel $\chi'(0)$ est le coefficient de X dans le polynôme $\chi(X)$. Comme

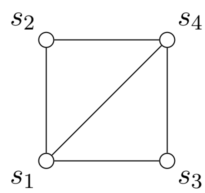
$$\det(I_n - XQ_\Gamma) = \det(XI_n)\det(X^{-1}I_n - Q_\Gamma) = X^n\,\chi(X^{-1}),$$

c'est aussi le coefficient de X^{n-1} dans le polynôme $\det(I_n - XQ_\Gamma)$. D'après la question 10 b), ce réel est la somme des mineurs principaux d'ordre $n-1$ de la matrice $-Q_\Gamma$, autrement dit, $(-1)^{n-1}$ fois la somme des coefficients diagonaux de la comatrice de Q_Γ. La formule $\mathrm{com}(Q_\Gamma) = \kappa(\Gamma)\ J_n$ donne donc

$$\chi'(0) = (-1)^{n-1}\,n\,\kappa(\Gamma),$$

une égalité équivalente au résultat demandé.

En appliquant le résultat de la question 17 b), on peut vérifier le nombre d'arbres couvrants obtenu à la question 8 pour le graphe



La matrice laplacienne et sa comatrice sont ici

$$Q_\Gamma = \begin{pmatrix} 3 & -1 & -1 & -1 \\ -1 & 2 & 0 & -1 \\ -1 & 0 & 2 & -1 \\ -1 & -1 & -1 & 3 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad \mathrm{com}(Q_\Gamma) = \begin{pmatrix} 8 & 8 & 8 & 8 \\ 8 & 8 & 8 & 8 \\ 8 & 8 & 8 & 8 \\ 8 & 8 & 8 & 8 \end{pmatrix},$$

et l'on trouve bien $\kappa(\Gamma) = 8$.

Une conséquence classique du résultat établi dans la question 18 est le calcul du nombre d'arbres étiquetés à n sommets. Ici, on cherche à compter le nombre d'arbres dont l'ensemble des sommets est $[\![1, n]\!]$, autrement dit à déterminer le nombre $\kappa(K_n)$, où K_n est le graphe à n sommets tel que chaque paire de sommets est reliée par une arête. On vérifie sans peine que la matrice laplacienne est $Q_{K_n} = nI_n - J_n$. Les valeurs propres de J_n étant n (avec la multiplicité 1) et 0 (avec la multiplicité $n-1$), on obtient $\chi(X) = X(X-n)^{n-1}$, d'où $\kappa(K_n) = n^{n-2}$. Ce théorème a été découvert par Cayley en 1889 et peut être démontré de diverses manières.

19 a) Essayons de construire un 3-arc (x_0, x_1, x_2, x_3) dans Γ. Il y a six possibilités pour x_0. Ce sommet étant choisi, il y a trois possibilités pour x_1, car de chaque sommet partent trois arêtes. Ces deux sommets x_0 et x_1 étant choisis, il y a alors deux possibilités pour x_2, car nous ne pouvons pas retourner sur nos pas. Enfin, il y a encore deux possibilités pour choisir x_3. Au total, cela nous donne $6 \times 3 \times 2 \times 2 = 72$ choix possibles.

b) Il suffit de montrer que chaque 3-arc (x_0, x_1, x_2, x_3) est conjugué par $\mathrm{Aut}(\Gamma)$ au 3-arc $\gamma = (s_1, s_2, s_3, s_4)$.

On peut trouver une puissance convenable du 6-cycle (123456) qui envoie x_0 sur s_1 ; cet élément de $\mathrm{Aut}(\Gamma)$ envoie alors le 3-arc (x_0, x_1, x_2, x_3) sur un 3-arc de la forme (s_1, y_1, y_2, y_3).

Le sommet y_1 est relié à s_1 par une arête, donc $y_1 \in \{s_2, s_4, s_6\}$. Il existe ainsi un élément de $\{\mathrm{id}, (24), (26)\}$ qui envoie y_1 sur s_2. Cette permutation appartient à $\mathrm{Aut}(\Gamma)$ et envoie (s_1, y_1, y_2, y_3) sur un 3-arc de la forme (s_1, s_2, z_2, z_3).

De la même façon, $z_2 \in \{s_3, s_5\}$, et en faisant éventuellement agir $(35) \in \mathrm{Aut}(\Gamma)$, on envoie (s_1, s_2, z_3, z_4) sur un 3-arc de la forme (s_1, s_2, s_3, w_3). Enfin, $w_3 \in \{s_4, s_6\}$, et quitte à faire agir $(46) \in \mathrm{Aut}(\Gamma)$, on envoie (s_1, s_2, s_3, w_3) sur le 3-arc γ.

En résumé, chaque élément de $\mathscr{A}$ appartient à l'orbite de γ sous le groupe $\mathrm{Aut}(\Gamma)$.

c) Le stabilisateur du 3-arc $\gamma = (s_1, s_2, s_3, s_4)$ dans $\mathrm{Aut}(\Gamma)$ est réduit à l'élément neutre. En effet, si σ appartient à ce stabilisateur, alors $\sigma(1) = 1$, $\sigma(2) = 2$, $\sigma(3) = 3$ et $\sigma(4) = 4$. Ainsi $\sigma(5) \in \{5, 6\}$. Comme s_4 et s_5 sont reliés par une arête, $s_{\sigma(4)}$ et $s_{\sigma(5)}$ doivent aussi être reliés par une arête. Cela force $\sigma(5) = 5$ et par voie de conséquence $\sigma(6) = 6$.

La formule des classes et les questions a) et b) donnent alors immédiatement

$$|\,\mathrm{Aut}(\Gamma)| = |\,\mathrm{Aut}(\Gamma) \cdot \gamma| = |\mathscr{A}| = 72.$$

d) Soit $\sigma \in \mathrm{Aut}(\Gamma)$. Soit $\gamma = (s_1, s_2, s_3, s_4)$, comme ci-dessus. Nous avons vu dans la question b) qu'il existe un automorphisme σ' produit d'éléments dans

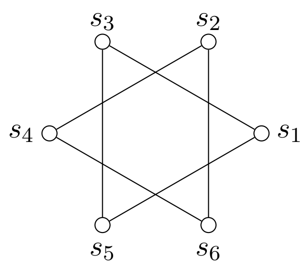
$$\Sigma = \{(123456), (24), (26), (35), (46)\}$$

qui envoie $\sigma \cdot \gamma$ sur γ, autrement dit tel que $\sigma' \cdot (\sigma \cdot \gamma) = \gamma$. Alors $\sigma' \circ \sigma$ appartient au stabilisateur de γ, donc $\sigma' \circ \sigma = \mathrm{id}$. Ceci montre que σ appartient au sous-groupe de $\mathrm{Aut}(\Gamma)$ engendré par Σ. Notons τ le 6-cycle (123456). Nous observons que

$$(24) = \tau \circ (13) \circ \tau^{-1}, \quad (26) = \tau^{-1} \circ (13) \circ \tau, \quad (35) = \tau^2 \circ (13) \circ \tau^{-2}, \quad (46) = \tau^3 \circ (13) \circ \tau^{-3}.$$

Par conséquent, le sous-groupe engendré par $\{\tau, (13)\}$ contient Σ, donc contient le sous-groupe engendré par Σ, donc est $\mathrm{Aut}(\Gamma)$ tout entier.

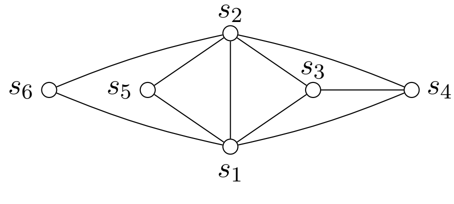
Il est en fait possible d'élucider la structure du groupe des automorphismes du graphe Γ de la question 19. En effet, formons le graphe ayant les mêmes sommets que Γ et ayant comme arêtes les paires de sommets qui ne sont pas des arêtes de Γ. Ce graphe, appelé complément de Γ, est l'union de deux triangles



et admet le même groupe d'automorphismes que Γ. Cette approche révèle que le stabilisateur des parties $\{1, 3, 5\}$ et $\{2, 4, 6\}$ est un sous-groupe de $\mathrm{Aut}(\Gamma)$ isomorphe au produit direct de deux copies du groupe $\mathfrak{S}_3$, que ce sous-groupe est distingué, et que le quotient est un groupe cyclique d'ordre 2. En fin de compte, on obtient une décomposition en produit semi-direct $\mathrm{Aut}(\Gamma) \cong (\mathfrak{S}_3)^2 \rtimes (\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})$.

20 Le groupe des automorphismes du graphe de gauche est clairement le groupe diédral d'ordre 8 ; il n'est pas commutatif et possède un (en fait deux) élément(s) d'ordre 4.

Pour étudier le groupe des automorphismes du graphe de droite, numérotons ses sommets comme suit.



Un automorphisme σ de ce graphe doit laisser stable $\{s_1, s_2\}$, car ce sont les deux sommets d'où partent cinq arêtes ; il doit laisser stable $\{s_3, s_4\}$, car ce sont les deux sommets d'où partent trois arêtes ; et il doit donc laisser stable $\{s_5, s_6\}$. Alors la restriction de σ^2 à chacune des trois parties $\{s_1, s_2\}$, $\{s_3, s_4\}$ et $\{s_5, s_6\}$ coïncide avec l'identité, et donc $\sigma^2 = \mathrm{id}$. Ainsi le groupe des automorphismes de ce graphe ne contient pas d'élément d'ordre 4 et ne peut donc pas être isomorphe au groupe diédral d'ordre 8.

On peut aussi constater que le groupe du graphe ci-dessus est commutatif puisque tous ses éléments (autres que l'identité) sont d'ordre 2. De fait, ce groupe est isomorphe à $(\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})^3$.

21 a) Soit H un sous-groupe d'indice 2 dans un groupe G. Alors $|G| = 2|H|$ et donc le complémentaire $G \setminus H$ de H dans G est de même cardinal que H.

Soit $a \in G$. Si $a \in H$, alors $aH = H = Ha$, et donc $aHa^{-1} = H$. Sinon, la classe à gauche aH ne rencontre pas H, donc est incluse dans le complémentaire $G \setminus H$ de H. La multiplication par a étant une opération bijective, on a $|aH| = |H|$; il vient alors $|aH| = |G \setminus H|$, ce qui entraîne que l'inclusion $aH \subset G \setminus H$ est une égalité. De même, la classe à droite Ha est égale à $G \setminus H$. Ainsi $aH = Ha$ et donc $aHa^{-1} = H$.

Ainsi $aHa^{-1} = H$ pour tout $a \in G$. Le sous-groupe H est donc bel et bien distingué.

b) Soit K un sous-groupe de G d'indice 2, a priori différent de H. Comme H est distingué, on peut considérer l'homomorphisme quotient $p : G \to G/H$; le groupe G/H est ici d'ordre 2.

Si K n'est pas inclus dans H, alors le sous-groupe $p(K)$ ne se réduit pas à l'élément neutre, donc est tout le groupe G/H. La restriction de p à K est donc un homomorphisme surjectif de groupes de noyau $H \cap K$, d'où $K/(H \cap K) \cong G/H$ d'après le théorème de factorisation. Il s'ensuit que $H \cap K$ est d'indice 2 dans K, donc est de cardinal 12 960, donc est différent de H et du sous-groupe réduit à l'élément neutre. Le sous-groupe K de G est distingué car d'indice 2, donc le sous-groupe $H \cap K$ de H est distingué. Comme H est simple, cela n'est pas possible.

Le cas où K n'est pas inclus dans H est donc impossible. Par conséquent K est inclus dans H, et lui est donc égal pour des raisons de cardinalité.

22 a) Avec les notations de la question, et en vertu de l'hypothèse faite sur G, le vecteur $(1, \ldots, 1) \in \mathbb{R}^n$, considéré comme un vecteur colonne, est vecteur propre de G pour la valeur propre k.

b) Adoptons les notations de la question. Soit λ une valeur propre complexe de G et soit $\mathbf{x} = (x_1, \ldots, x_n)$ un vecteur propre de G pour la valeur propre λ. Soit $i \in [\![1, n]\!]$ un indice tel que $|x_i| \geqslant |x_j|$ pour tout $j \in [\![1, n]\!]$. Comme $\mathbf{x}$ est non nul, on a nécessairement $|x_i| > 0$. Notant $(g_{i,j})$ la famille des coefficients de G, la i-ème ligne de l'égalité $G\mathbf{x} = \lambda\mathbf{x}$ s'écrit

$$\sum_{j=1}^{n} g_{i,j} x_j = \lambda x_i.$$

L'hypothèse faite sur G donne alors

$$|\lambda|\,|x_i| = \left|\sum_{j=1}^{n} g_{i,j} x_j\right| \leqslant \sum_{j=1}^{n} |g_{i,j}||x_j| \leqslant \sum_{j=1}^{n} |g_{i,j}||x_i| = \left(\sum_{j=1}^{n} g_{i,j}\right)|x_i| = k|x_i|.$$

Comme $|x_i| > 0$, on en déduit $|\lambda| \leqslant k$.

La matrice laplacienne Q_Γ du graphe Γ a été définie dans la partie II à l'aide d'une orientation de Γ, mais elle ne dépend pas de ce choix, comme nous l'avons démontré dans la question 15 a). Si le graphe Γ est k-régulier et a n sommets, alors $Q_\Gamma = kI_n - G_\Gamma$. Si de plus Γ est connexe, alors $\ker N_\Gamma$ est de dimension 1 (question 14), donc $\ker Q_\Gamma$ est de dimension 1 (question 15 b)). Il s'ensuit que k est valeur propre simple de la matrice G_Γ.

23 a) L'énoncé nous assure que k est valeur propre de G_Γ avec multiplicité 1. L'espace propre de G_Γ associé à cette valeur propre est donc une droite vectorielle, engendrée par le vecteur $(1, \ldots, 1)$ d'après la question 22 a). Le vecteur $\mathbf{v}_1$ est colinéaire à ce vecteur, et est de norme euclidienne 1 puisque membre d'une base orthonormée. Cela nous donne deux possibilités : $\mathbf{v}_1 = \pm(1/\sqrt{n}, \ldots, 1/\sqrt{n})$.

b) Introduisons la matrice P dont les vecteurs colonnes sont les vecteurs $\mathbf{v}_1$, ..., $\mathbf{v}_p$, en coordonnées dans la base standard de $\mathbb{R}^n$. Autrement dit, $v_{p,i}$ est le coefficient en position (i,p) de la matrice P pour tout $(i,p) \in [\![1,n]\!]^2$.

Le fait que $(\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_p)$ soit une base orthonormée se traduit par l'équation ${}^tP\,P = I_n$ (c'est-à-dire, P est une matrice orthogonale). Il s'ensuit que P est inversible, d'inverse ${}^tP$, d'où l'égalité $P\,{}^tP = I_n$. En évaluant le coefficient en position (i,i) de cette égalité, nous trouvons

$$\sum_{p=1}^{n} (v_{p,i})^2 = 1.$$

Alternativement, notons $(\mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_n)$ la base standard de $\mathbb{R}^n$. Cette base étant orthonormée, les coordonnées d'un vecteur $\mathbf{v}$ dans cette base sont données par les produits scalaires $(\mathbf{e}_i \mid \mathbf{v})$. En particulier, $v_{p,i} = (\mathbf{e}_i \mid \mathbf{v}_p)$. D'un autre côté, la base $(\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_n)$ est orthonormée, donc tout vecteur $\mathbf{e}$ de $\mathbb{R}^n$ s'écrit

$$\mathbf{e} = \sum_{p=1}^{n} (\mathbf{v}_p \mid \mathbf{e})\mathbf{v}_p.$$

En prenant le produit scalaire avec $\mathbf{e}$, nous obtenons

$$(\mathbf{e} \mid \mathbf{e}) = \sum_{p=1}^{n} (\mathbf{v}_p \mid \mathbf{e})^2$$

(un cas particulier du théorème de Pythagore ou de l'égalité de Parseval). En remplaçant $\mathbf{e}$ par $\mathbf{e}_i$, nous obtenons le résultat demandé.

c) Soit $(\mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_n)$ la base standard de $\mathbb{R}^n$. Pour tous $(i,j) \in [\![1,n]\!]^2$ et $m \in \mathbb{N}$,

$$(\mathbf{e}_i \mid G^m\,\mathbf{e}_j) = \left(\mathbf{e}_i \,\middle|\, \sum_{k=1}^{n} g_{k,j}^{(m)}\,\mathbf{e}_k\right) = \sum_{k=1}^{n} g_{k,j}^{(m)} (\mathbf{e}_i \mid \mathbf{e}_k) = g_{i,j}^{(m)}.$$

Par ailleurs,

$$\mathbf{e}_j = \sum_{p=1}^{n} (\mathbf{v}_p \mid \mathbf{e}_j)\mathbf{v}_p = \sum_{p=1}^{n} v_{p,j}\,\mathbf{v}_p$$

par la démonstration de la question précédente. Par conséquent,

$$g_{i,j}^{(m)} = \sum_{p=1}^{n} v_{p,j}\,(\mathbf{e}_i \mid G^m \mathbf{v}_p) = \sum_{p=1}^{n} v_{p,j}\,\lambda_p^m\,(\mathbf{e}_i \mid \mathbf{v}_p) = \sum_{p=1}^{n} \lambda_p^m\,v_{p,i}\,v_{p,j}.$$

Alternativement, les vecteurs colonnes de la matrice P définie ci-dessus sont des vecteurs propres de G_Γ et forment une base de $\mathbb{R}^n$, donc P est une matrice de passage permettant de diagonaliser G_Γ. Notant Λ la matrice diagonale de taille $n \times n$ dont le i-ème coefficient diagonal est λ_i, nous avons ainsi $G_\Gamma = P\Lambda P^{-1}$, et alors $G_\Gamma^m = P\Lambda^m P^{-1}$. Dans la question précédente, nous avons établi que P est une matrice orthogonale, et il vient $G_\Gamma^m = P\Lambda^m\,{}^tP$, formule équivalente au résultat demandé.

d) Les questions a) et c) donnent

$$\frac{k^m}{n} = \lambda_1^m \, v_{1,i} \, v_{1,j} = g_{i,j}^{(m)} - \sum_{p=2}^{n} \lambda_p^m \, v_{p,i} \, v_{p,j}.$$

En prenant la valeur absolue, on en déduit

$$\left|\frac{k^m}{n}\right| \leqslant \left|g_{i,j}^{(m)}\right| + \sum_{p=2}^{n} |\lambda_p|^m \, |v_{p,i}| \, |v_{p,j}| \leqslant \left|g_{i,j}^{(m)}\right| + |\lambda_2|^m \sum_{p=2}^{n} |v_{p,i}| \, |v_{p,j}|.$$

On conclut en faisant appel à l'inégalité de Cauchy-Schwarz

$$\sum_{p=2}^{n} |v_{p,i}| \, |v_{p,j}| \leqslant \left(\sum_{p=2}^{n} (v_{p,i})^2\right)^{1/2} \left(\sum_{p=2}^{n} (v_{p,j})^2\right)^{1/2}$$

et en observant que la matrice G^m est à coefficients positifs ou nuls, car puissance positive d'une matrice à coefficients positifs ou nuls.

e) Les questions a) et b) montrent que pour chaque $i \in [\![1, n]\!]$, nous avons

$$\sum_{p=2}^{n} (v_{p,i})^2 = 1 - \frac{1}{n}.$$

Substituant dans le résultat de la question d), cela donne

$$g_{i,j}^{(m)} \geqslant \frac{k^m}{n} - |\lambda_2|^m \left(1 - \frac{1}{n}\right) = \frac{k^m - |\lambda_2|^m (n-1)}{n}.$$

Par conséquent $g_{i,j}^{(m)} > 0$ dès que $k^m > |\lambda_2|^m (n-1)$.

f) Montrons par récurrence sur $m \geqslant 1$ que les coefficients de la matrice G^m comptent le nombre de chemins de longueur m dans Γ d'extrémités données. La propriété est vraie pour $m = 1$, par définition de la matrice d'adjacence. Admettons-la pour m et prouvons-la pour $m + 1$.

Pour $(i, j) \in [\![1, n]\!]$ et $m \geqslant 1$, notons $X_{i,j}^{(m)}$ l'ensemble des chemins de longueur m reliant s_i à s_j. Un chemin de longueur $m + 1$ reliant s_i à s_j s'obtient en concaténant un chemin de longueur m reliant s_i à un sommet de Γ, disons s_k, et une arête $\{s_k, s_j\}$. Il y a ainsi une bijection de l'union disjointe des $X_{i,k}^{(m)}$, pour $k \in [\![1, n]\!]$ tel que $\{s_k, s_j\}$ est une arête, sur $X_{i,j}^{(m+1)}$. Prenant les cardinaux, nous obtenons, en vertu de l'hypothèse de récurrence et de la définition de la matrice d'adjacence

$$\left|X_{i,j}^{(m+1)}\right| = \sum_{\substack{k \in [\![1,n]\!] \\ \{s_k, s_j\} \text{ arête}}} \left|X_{i,k}^{(m)}\right| = \sum_{\substack{k \in [\![1,n]\!] \\ \{s_k, s_j\} \text{ arête}}} g_{i,k}^{(m)} = \sum_{k=1}^{n} g_{i,k}^{(m)} g_{k,j}^{(1)}.$$

Nous reconnaissons dans le membre de droite le coefficient (i, j) de la matrice produit $G^m \cdot G$, et ainsi $g_{i,j}^{(m+1)} = \left|X_{i,j}^{(m+1)}\right|$.
Ceci établit notre propriété pour $m + 1$ et complète notre preuve par récurrence.

g) Adoptons les hypothèses et notations de l'énoncé. Alors

$$m \log\bigl(k/|\lambda_2|\bigr) > \log(n-1),$$

puisque $\log\bigl(k/|\lambda_2|\bigr) > 0$. L'exponentielle réelle étant une fonction strictement croissante, cela entraîne

$$(k/|\lambda_2|)^m > n-1.$$

D'après la question e), nous avons donc $g_{i,j}^{(m)} > 0$ pour tout $(i,j) \in [\![1,n]\!]^2$. La question f) traduit cela en le fait que deux sommets s_i et s_j de Γ sont toujours reliés par un chemin de longueur m, autrement dit que $\delta(s_i,s_j) \leqslant m$. Le diamètre de Γ est donc majoré par m.

Remarque : l'hypothèse $|\lambda_2| > 0$ est en fait ici inutile, car d'après la question 5 a), elle est une conséquence des autres hypothèses.

3.2 Seconde épreuve écrite

Le sujet est téléchargeable à l'adresse suivante :
http://media.devenirenseignant.gouv.fr/file/agregation_externe/73/4/s2019_agreg_interne_math_2_1067734.pdf

3.2.1 Statistiques de réussite

Dans l'ensemble, les candidats admissibles ont traité les deux premières parties, certains ayant trouvé un second souffle sur la partie VI, plus applicative. Le graphique suivant indique les réussites aux différentes questions des candidats déclarés admissibles.

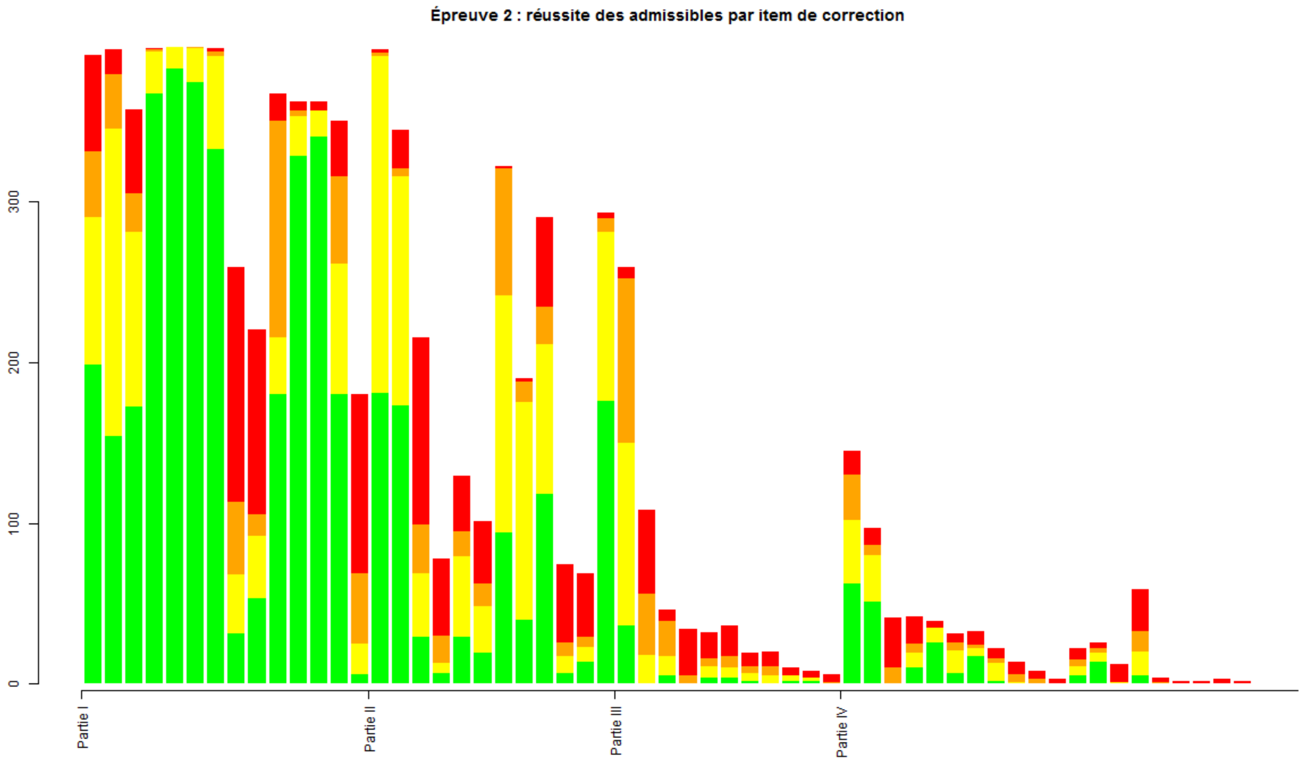


FIGURE 3.2 – Lecture : pour chaque question (ou item de correction lorsque plusieurs composantes sont évaluées dans une même question), la zone verte indique le nombre de candidats admissibles ayant fourni une bonne réponse, la zone jaune représente ceux ayant proposé une réponse partiellement juste, la zone orange ceux dont la réponse est entachée d'erreurs, la zone rouge les réponses fausses

3.2.2 Présentation du sujet

La deuxième épreuve porte sur une extension de la notion de dérivation d'une fonction à un ordre indicé par un réel et non par un entier (la dérivation négative correspondant à une primitivation). Cet outil, improprement appelé *dérivation fractionnaire*, est appliqué à une généralisation de la famille des polynômes orthogonaux d'Hermite.

- La partie I introduit la famille des polynômes orthogonaux d'Hermite $(H_n)_{n\in\mathbb{N}}$. L'étude est menée dans le cadre préhilbertien naturel pour cette famille.
- La généralisation de la notion de dérivation nécessite des résultats sur la fonction Γ, ce qui est l'objet de la partie II.
- La partie III introduit sur certains espaces de fonctions la notion de dérivation indicée sur $\mathbb{R}$.
- Enfin, la partie IV propose de généraliser la famille $(H_n)_{n\in\mathbb{N}}$ en $(H_s)_{s\in\mathbb{R}}$ à l'aide de l'outil mis en place à la partie précédente. On vérifie alors que des propriétés classiques de la famille $(H_n)_{n\in\mathbb{N}}$ établies à la partie I s'étendent naturellement à la famille $(H_s)_{s\in\mathbb{R}}$.

3.2.3 Remarques générales

Le sujet couvre une partie importante du programme d'analyse : espaces préhilbertiens, intégration simple et multiple, séries de fonctions et équations différentielles. Il valorise les candidats qui se sont bien préparés au concours avec une première partie très classique, largement traitée et dont les dernières questions se sont révélées discriminantes pour l'admissibilité. La deuxième partie, également abordée par de nombreux candidats, était essentiellement composée de questions discriminantes. La partie III, plus technique et délicate, n'a été que peu traitée, contrairement à la dernière partie dans laquelle certains candidats se sont engagés avec profit.

Le ressenti général des correcteurs est qu'il y avait peu de copie très faibles et que de nombreux candidats ont résolu avec succès un nombre assez important de questions.

Le sujet supposait une bonne maîtrise des définitions ou théorèmes suivants :

- la définition d'une fonction intégrable sur un intervalle (ne pas oublier l'hypothèse de continuité par morceaux) ;
- les intégrales de référence et théorèmes de comparaison ;
- le procédé d'orthogonalisation de Schmidt ;
- le théorème concernant les fonctions continues positives dont l'intégrale est nulle (la conclusion étant fausse en l'absence de continuité...) ;
- la définition d'un produit scalaire (en particulier le caractère défini positif) ;
- la dimension et la base canonique de $\mathbb{R}_n[X]$;
- le théorème de Rolle ;
- le théorème de convergence dominée et ses déclinaisons : continuité/dérivation d'une intégrale à paramètre...
- le théorème de Fubini-Tonelli pour les intégrales doubles.

3.2.4 Commentaires par question

Partie I : Polynômes orthogonaux d'Hermite

1. (a) Cette question a souvent été mal traitée... Elle avait pourtant comme but de proposer une entrée en matière que devrait maîtriser tout candidat bien préparé au concours...
   Par exemple, on a trop souvent lu que la continuité entraînait l'intégrabilité, ce qui est faux sur un intervalle non borné. A contrario, l'absence de continuité (éventuellement par morceaux) était pénalisante dans le cadre du programme.
   On a relevé des justifications erronées telles que $P(x)Q(x)\mathrm{e}^{x^2} \sim \mathrm{e}^{x^2}$ ou pire, $\mathrm{e}^{-x^2} = (\mathrm{e}^{-x})^2$.
   Chaque année, de nombreux candidats pensent que le produit de deux fonctions intégrables est une fonction intégrable.
   Cette liste est loin d'être exhaustive. Rappelons pour finir que l'intégrabilité se vérifie sur le module d'une fonction, une majoration de la fonction (non positive ici) ne saurait suffire.

   (b) Cette question a révélé qu'une partie importante des candidats ne connaissait pas la définition d'un produit scalaire. Pour certains, c'est juste une forme bilinéaire symétrique.
   À noter que trop de candidats désirant établir le caractère défini positif du produit scalaire omettent la continuité de la fonction, en plus de sa positivité, pour conclure. Il faut être conscient que c'est sur ce type de difficulté que les correcteurs peuvent estimer la rigueur mathématique des candidats.

2. Une minorité de candidat pense à appliquer le procédé de Schmidt à la base canonique de $\mathbb{R}_n[X]$. Celui-ci est au programme, il n'est pas nécessaire de l'établir à nouveau.
   À noter que quelques candidats ne sont pas étonnés de démontrer que la base canonique est othonormale...

3. Ces questions ont été plutôt réussies, les candidats ont bien pensé à exploiter la relation précédente. Un détail toutefois : la démonstration naturelle de **3.(a)** ne reposait pas sur une récurrence, un argument direct suffisait. Les correcteurs sont sensibles à ces "détails".

4. Cette question a été peu abordée. Une erreur parfois relevée a été de conclure après avoir établi l'égalité $< H_{n+1}, H_n >= 0$.
   C'est dommage car une démonstration classique résulte d'un mécanisme assez général, issu de l'étude des polynômes orthogonaux usuels (Legendre, Laguerre, Hermite), que les candidats à l'agrégation ont dû croiser dans leur préparation. Une autre démonstration, plus spécifique aux polynômes d'Hermite, est indiquée dans les éléments de correction à suivre.

5. Cette question a été très peu traitée.
   Pour ce qui a été lu, attention toutefois à maîtriser les arguments. Une implication telle que « $< H_n, Q_n >=< \lambda Q_n, Q_n >$ donc $H_n = \lambda Q_n$ » ne met pas le correcteur dans les meilleures dispositions pour corriger les questions à venir.

6. Cette question un peu technique a été plutôt bien abordée par nombre de candidats. Bien entendu, comparer les coefficients dominants pour en déduire α_n ne constituait pas une démonstration suffisante.

7. Les calculs à mener dans cette question sont en général bien effectués.

8. Même remarque.

9. Trop de réponses décevantes sur cette question pourtant accessible en regardant les premiers termes. Cela dit, bien qu'ayant calculé les quatre premiers polynômes, certains candidats veulent montrer que H_n est pair pour tout n.
   Dans un style faussement logique on a vu démontrer que « H_n pair pour tout n » est absurde, de même pour « H_n impair pour tout n ». Donc H_n n'est ni pair ni impair !
10. Cette question plus délicate, et mise en fin de première partie, n'a été traitée que rarement et bien résolue de manière exceptionnelle.

Partie II : Quelques résultats sur la fonction Γ

11. La question a été plutôt réussie avec un bémol : alors que la borne $+\infty$ a souvent été traitée avec utilisation d'une limite lors de l'intégration par partie, cela n'a été que trop rarement le cas pour la borne 0^+.
12. C'est une question souvent réussie avec parfois un oubli concernant la continuité de Γ pour justifier la limite au point 1.
13. Cette question plus délicate a souvent posé problème. Une erreur assez répandue consiste à dériver l'équivalent de $\Gamma(x)$ en 0 pour obtenir celui de $\Gamma'(x)$...
14. (a) Cette question de compréhension a fait fuir les candidats. C'est dommage car elle était très abordable.
    (b) De même car la résolution s'appuyait sur la question précédente.
    (c) La convexité de la fonction Γ est plutôt bien établie. La suite de la question est trop souvent bâclée.
    En particulier, peu de candidats pensent au théorème de Rolle. Rappelons que le théorème des valeurs intermédiaires est un théorème d'existence et non d'unicité.
    (d) À noter que les représentations graphiques sont parfois bien éloignées de ce qui est proposé sur le tableau de variations.
15. (a) Très peu de candidats remarquent une impropriété si $x < 1$ ou $y < 1$. Pour les candidats qui voient le problème, on retrouve souvent les difficultés de la question **1** concernant l'intégrabilité.
    (b) Cette question assez technique n'a été que très peu abordée.
    (c) Le constat est identique, en dépit d'un niveau de difficulté très raisonnable.
    (d) L'intégrale de Gauss est au programme, il est donc tout à fait légitime de l'utiliser sans la redémontrer. Mieux vaut toutefois éviter « on sait que $\int_{-\infty}^{+\infty} \mathrm{e}^{-x^2} dx = \sqrt{\pi}$ » sans citer Gauss ou le lien avec la loi normale.
    Cette question a été assez souvent réussie en s'appuyant sur les questions précédentes, ce qui est licite.

Partie III : Une généralisation de la notion d'intégration

16. Nous ne reviendrons pas sur les problèmes spécifiques que soulève la notion d'intégrabilité. Plus spécifiquement, les candidats ont trop rarement vu qu'il y avait un problème potentiel en x.
Par ailleurs, on lit trop souvent $f(u) = o(e^{\alpha u})$ entraîne $(x-u)^{-s-1} f(x-u) = o(e^{\alpha u})$ au voisinage de $-\infty$, alors que s est négatif (et x fixé).
17. On attend pour la première fois un théorème fort (continuité d'une intégrale à paramètre). Très peu de candidats se rendent compte de sa nécessité ici.
La décroissance exponentielle, lorsque x tend vers $+\infty$, n'a quasiment jamais été abordée convenablement.
18. Question abordable mais très peu traitée.
19. Cette question bien plus délicate n'a quasiment pas été traitée.

20 à 24 Peut-être découragés par la question précédente, les candidats ont généralement préféré ne pas aborder ces questions, et passer à la suite.

Partie IV : Étude des polynômes d'Hermite généralisés.

25 Parmi les copies traitant cette question, rares sont celles qui font le lien avec les polynômes d'Hermite étudiés à la partie I.
Certains candidats refont même une démonstration par récurrence pour prouver que $\frac{d^n}{dx^n}(\mathrm{e}^{-x^2}) = P_n(x)e^{-x^2}$ avec P_n un polynôme.

26 On constate souvent une confusion entre les notations $D^{(m)}(\mathrm{e}^{-x^2})(x-u)$ et $D^{(m)}(\mathrm{e}^{-(x-u)^2})$.

27 à 38 Malgré la présence de nombreuses questions abordables sur des thèmes classiques (équations différentielles ou séries entières), la fin du problème n'a été que trop rarement abordée pour permettre des commentaires pertinents.
À noter toutefois que la question **37.(a)** a parfois été abordée mais souvent avec un outil mal adapté dans le cas présent. Le critère spécial des séries alternées ne peut s'appliquer facilement puisque la décroissance en module n'est assurée qu'à partir d'un certain rang qui dépend de la variable t. Un reste de Taylor était une piste plus prometteuse.

3.2.5 Éléments de correction

Partie I : Polynômes orthogonaux d'Hermite

1. (a) L'application $x \mapsto P(x)Q(x)\mathrm{e}^{-x^2}$ est continue sur $\mathbb{R}$ et, par limite comparée, est négligeable devant $x \mapsto e^{-|x|}$ au voisinage de $\pm\infty$, ce qui assure le résultat.

   (b) Les propriétés usuelles de l'intégrale permettent de vérifier aisément que $< \, , \, >$ est une forme bilinéaire symétrique positive sur $\mathbb{R}[X]^2$. Elle est définie positive car une fonction positive, continue et d'intégrale nulle est nulle.

2. On applique le procédé de Schmidt à la base canonique de $(\mathbb{R}[X], < \, , \, >)$.

3. (a) On écrit $H_{n+1}(x) = e^{x^2} \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(H_n(x)e^{-x^2}) = -2xH_n(x) + H_n'(x)$.

   (b) Il vient : $H_0 = 1$, $H_1 = -2X$, $H_2 = 4X^2 - 2$, $H_3 = -8X^3 + 12X$.

   (c) Il suffit d'utiliser la formule récurrente de **3.(a)** et l'initialisation en **3.(b)**.

   (d) Toujours par récurrence **3.(a)** et **3.(b)**, le polynôme H_n est de degré n et son coefficient dominant vaut $(-1)^n 2^n$.

4. Pour $m < n$, un mécanisme assez général consiste à écrire : $< H_m, H_n >= \int_{-\infty}^{+\infty} H_m(x) \frac{d^n}{dx^n}(e^{-x^2})dx$ et on intègre par parties $m+1$ fois le terme $\frac{d^n}{dx^n}(e^{-x^2})$ en dérivant $m+1$ fois le polynôme H_m.

   Dans le cas présent, il est possible de procéder autrement avec **3.(a)** :

   $$\forall (n,m) \in \mathbb{N}^* \times \mathbb{N}, \quad < H_n, H_m >=< -2xH_{n-1} + H_{n-1}', H_m >= - < H_{n-1}, H_m' >$$

   car $\int_{-\infty}^{+\infty} 2xH_{n-1}(x)H_m(x)e^{-x^2}dx =< H_{n-1}', H_m > + < H_{n-1}, H_m' >$ en intégrant par parties.

   La propriété "$< H_n, H_m >= 0$ pour $m < n$" est facile à vérifier lorsque $n = 1$ et $n = 2$. On la suppose vraie jusqu'à un ordre $n - 1 \geqslant 1$, l'égalité précédente permet de conclure à l'ordre n puisque $H_{m-1}' \in \mathbb{R}_{n-2}[X]$ est orthogonal à H_{n-1} par hypothèse de récurrence.

5. H_n et Q_n sont dans le supplémentaire orthogonal de $\mathbb{R}_{n-1}[X]$ dans $\mathbb{R}_n[X]$ qui est une droite vectorielle.

6. On connaît l'égalité $H_n'(x) = -2xH_n(x) + H_{n+1}(x) = \displaystyle\sum_{k=0}^{n-1} \beta_k H_k$.

   Par orthogonalité, et puisque $< xP(x), Q(x) >=< P(x), xQ(x) >$, il vient $\beta_k = 0$ si $k \leqslant n-2$. En identifiant les coefficients dominants, on trouve $\beta_{n-1} = \alpha_n = -2n$.

   Une autre démonstration est possible en exploitant l'égalité **3.(a)** différemment :

   $$H_n' = 2xH_n + e^{x^2} \frac{d^n}{dx^n}\left(\frac{d}{dx}e^{-x^2}\right) = 2xH_n + e^{x^2}\frac{d^n}{dx^n}\left(-2xe^{-x^2}\right) = -2nH_{n-1}$$

   grâce à la formule de Leibniz.

7. On a $H_{n+1}'(x) = -(2n+2)H_n(x)$ d'après **6.**, et $H_{n+1}'(x) = -2H_n - 2xH_n' + H_n''$ par **3.(a)**, d'où le résultat.

8. C'est encore une application directe des questions **3.(a)** et **6.**.

9. D'après la question **8.** et l'initialisation **3.(b)**, H_n possède la parité de n.

10. Il s'agit d'une propriété générique des polynômes orthogonaux liée au théorème des moments de Hausdorff.

    Raisonnons par l'absurde. Si $x_1 < \ldots < x_p$ sont les racines réelles de multiplicité impaire de H_n. On a $p < n$ par hypothèse, et on pose $P(x) = \displaystyle\prod_{k=1}^{p}(x - x_k)$.

La fonction $x \mapsto e^{-x^2} H_n(x)P(x)$ garde un signe constant sur $\mathbb{R}$ et son intégrale sur $\mathbb{R}$ est nulle car égale à $< H_n, P >$. Ceci est impossible, par suite $p \geqslant n$ et H_n possède exactement n racines réelles de multiplicités impaires nécessairement égales à 1. Les racines de H_n sont donc réelles, distinctes et au nombre de n.

Dans le cas des polynômes d'Hermite, on peut tenir un raisonnement plus long mais peut-être plus naturel.
Tout d'abord, les racines de H_n sont simples. En effet, pour une racine multiple a, $H_n(a) = H_n'(a) = 0$ entraînerait $H_{n-1}(a) = 0$ par **6.**, puis $H_{n-2}(a) = 0$ d'après **8.** et finalement, en répétant l'argument, $H_0(a) = 0$ ce qui est impossible.
La propriété à établir est vraie pour $n = 1$, on la suppose vraie jusqu'à l'ordre $n-1 \geqslant 1$. Par hypothèse, H_{n-1} dispose de $n-1$ racines réelles distinctes $y_1 < \ldots < y_{n-1}$.
La simplicité des racines entraîne que les termes $(H_{n-1}'(y_k))_{1\leqslant k\leqslant n-1}$ sont alternativement strictement positifs ou négatifs. On applique la relation **3.(a)** (i.e. $H_n = -2xH_{n-1} + H_{n-1}'$) et la suite $(H_n(y_k))_{1\leqslant k\leqslant n-1}$ prend aussi alternativement des valeurs strictement positives ou négatives.
Le théorème des valeurs intermédiaires appliqué à H_n entraîne l'existence de $(x_k)_{1\leqslant k\leqslant n-2}$ telle que $y_1 < x_1 < y_2 < x_2 < \ldots < y_{n-2} < x_{n-2} < y_{n-1}$ avec $H_n(x_k) = 0$ pour $1 \leqslant k \leqslant n-2$.
De $\lim_{x\to-\infty} H_p(x) = +\infty$ pour $p \in \mathbb{N}^*$, on déduit $H_{n-1}'(y_1) < 0$. La relation **3.(a)** indique $H_n(y_1) < 0$, par suite H_n s'annule sur $]-\infty, y_1[$.
Finalement, H_n possède au moins $n-1$ racines réelles distinctes et, par division euclidienne, n racines réelles qui sont nécessairement simples et donc distinctes d'après ce qui précède. Il est aussi possible d'utiliser la parité de H_n pour conclure facilement à une n-ième racine distincte de H_n (en fait $-y_1$).

Partie II : Quelques résultats sur la fonction Γ

11. On fixe $x > 0$, et pour $0 < a < A$, $\int_a^A t^x e^{-t} dt = [-t^x \mathrm{e}^{-t}]_a^A + x\int_a^A t^{x-1}e^{-t}dt$ qui fournit le résultat par passage à la limite lorsque $a \to 0^+$ et $A \to +\infty$.
12. Par calcul direct $\Gamma(1) = 1$ puis, grâce à l'équation fonctionnelle et la continuité de Γ en 1, $\Gamma(x) \sim \frac{1}{x}$ au voisinage de 0^+.
13. On dérive $\Gamma(x) = \frac{1}{x}\Gamma(x+1)$ pour en déduire $\Gamma'(x) \sim -\frac{1}{x^2}$ au voisinage de 0^+ et par suite $\lim\limits_{x\to 0^+} \Gamma'(x) = -\infty$.
Par ailleurs, Γ'' est positive et Γ est donc convexe. On déduit, pour $x \geqslant 2$, $\Gamma'(x) \geqslant \Gamma'(2) \geqslant \Gamma(2) - \Gamma(1) = 1$, puis $\lim_{x\to+\infty} \Gamma(x) = +\infty$.
Enfin, pour $x \geq 2$, $\Gamma'(x+1) \geq \Gamma(x+1) - \Gamma(x) = (x-1)\Gamma(x)$ et le résultat : $\lim_{x\to+\infty} \Gamma'(x) = +\infty$.
On peut aussi, par théorème de convergence dominée, établir $\lim_{x\to+\infty} \int_0^1 \ln(t)\, t^{x-1}\, e^{-t}\, dt = 0$.
Puis, pour $x \geqslant 1$, des inégalités successives $2^{x-1}\ln(2)e^{-3} \leqslant \int_2^3 \ln(t)\, t^{x-1}\, e^{-t}\, dt \leqslant \int_1^{+\infty} \ln(t)\, t^{x-1}\, e^{-t}\, dt$, on déduit $\lim_{x\to+\infty} \int_1^{+\infty} \ln(t)\, t^{x-1}\, e^{-t}\, dt = +\infty$ avant de conclure.
14. (a) La relation fonctionnelle permet de prolonger Γ pour $x \in]-1, 0[$ avec $\Gamma(x) = \frac{1}{x}\Gamma(x+1)$.
Pour $p \in \mathbb{N}$, si on a prolongé Γ sur $[-p, +\infty[- \{0, -1, \ldots, -p\}$, alors l'unique prolongement à $[-p-1, +\infty[- \{0, -1, \ldots, -p-1\}$ compatible avec l'équation fonctionnelle est

$$\forall x \in]-p-1, -p[,\ \Gamma(x) = \frac{1}{x}\Gamma(x+1).$$

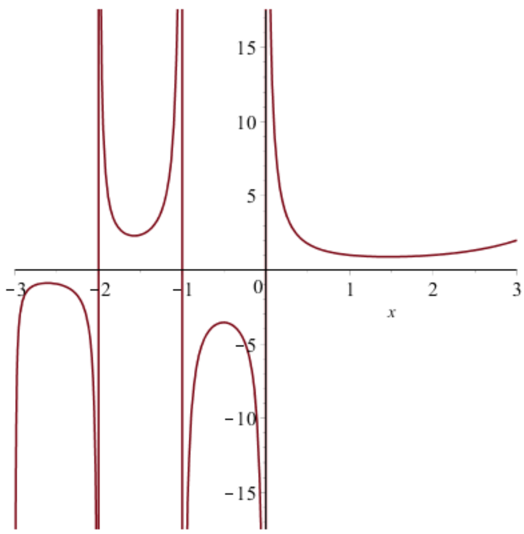
Ceci assure du résultat par récurrence.

(b) Par l'équation fonctionnelle, $\Gamma(x) \sim \frac{(-1)^n}{(-n)!(x+n)}$ lorsque $x \to (-n)^+$ et $x \to (-n)^-$. Attention, le terme $(x+n)$ induit un changement de signe en passant d'un coté à l'autre de l'asymptote $x = -n$.

(c) La convexité est vérifiée car $\Gamma'' > 0$ sur $\mathbb{R}_+^*$. Par les limites, la fonction est strictement décroissante sur $]0, x_0]$ puis strictement croissante sur $[x_0, +\infty[$. De plus $\Gamma(1) = \Gamma(2) = 1$ montre que $x_0 \in [1, 2]$.

x	0		x_0		3
$\Gamma'(x)$		$-$	0	$+$	
$\Gamma(x)$	$+\infty$	$\searrow$	$\Gamma(x_0) > 0$	$\nearrow$	2

(d)



15. (a) La fonction $t \mapsto t^{x-1}(1-t)^{y-1}$ est continue sur $]0, 1[$. Des équivalents simples aux bornes de l'intervalle et la règle de Riemann permettent de conclure.

(b) La fonction $\phi(u, v) = (u, u+v) = (s, t)$ est un C^1-difféomorphisme de $\mathbb{R}^2$ sur $\varphi(\mathbb{R}_+^2) = \{(s, t),\ 0 \leqslant t \text{ et } 0 \leqslant s \leqslant t\}$ de jacobien égal à 1.

Pour $(x, y) \in \mathbb{R}_+^{*2}$, la fonction $g(u, v) = u^{x-1}e^{-u}v^{y-1}$ est intégrable sur $\mathbb{R}_+^2$ d'après le théorème de Fubini. Il est alors licite d'effectuer les changements de variables suivants :

$$\begin{aligned}
\Gamma(x)\Gamma(y) &= \int\int_{(u,v)\in\mathbb{R}_+^2} g(u,v)dudv \\
&= \int_{t=0}^{+\infty}\int_{s=0}^{t} g(s,t-s)|1|dsdt \\
&= \int_{t=0}^{+\infty}\int_{s=0}^{t} s^{x-1}(t-s)^{y-1}e^{-t}dsdt \\
&= \int_{t=0}^{+\infty}\int_{w=0}^{1} (tw)^{x-1}(t(1-s))^{y-1}e^{-t}tdwdt \\
&= \int_{t=0}^{+\infty} t^{x+y+1}\left(\int_{w=0}^{1} s^{x-1}(1-s)^{y-1}dw\right)e^{-t}dt \\
&= B(x,y)\Gamma(x+y)
\end{aligned}$$

(c) On constate que $B(x,y) = 2\int_0^{\pi/2}\cos(\theta)^{2x-1}\sin(\theta)^{2y-1}d\theta$ à l'aide du changement de variable $t = \sin(\theta)^2$. Par suite, pour $x > 0$:

$$\begin{aligned}
B(x,x) &= 2\int_0^{\pi/2}(\cos(\theta)\sin(\theta))^{2x-1}d\theta \\
&= 2^{-2x+2}\int_0^{\pi/2}\sin(2\theta)^{2x-1}d\theta \\
&= 2^{-2x+2}\int_0^{1} t^{x-1/2}\frac{1}{2\sqrt{t}}\frac{1}{\sqrt{1-t}}dt \\
&= 2^{-2x+1}\int_0^{1} t^{x-1}(1-t)^{-1/2}dt \\
&= 2^{-2x+1}B(x,\frac{1}{2})
\end{aligned}$$

On peut aussi poser $u = 2t-1$ pour symétriser l'intégrale, puis $v = u^2$ pour établir l'égalité.

(d) Pour $\Gamma(\frac{1}{2}) = \sqrt{\pi}$, on se ramène à l'intégrale de Gauss qui est au programme. On peut aussi retrouver cette valeur en calculant $B(\frac{1}{2},\frac{1}{2})$.
On applique ensuite les égalités des questions **15.(b)** et **15.(c)** avec $y = x$ pour obtenir la formule de Legendre annoncée.

Partie III : Une généralisation de la notion d'intégration

16. La fonction $f_x : t \mapsto (x-t)^{-s-1}f(t)$ est intégrable sur $]-\infty, x[$ car continue sur cet intervalle, si $|f(t)| \leqslant e^{at}$, avec $a > 0$, au voisinage de $-\infty$, alors $|f_x(t)| \leqslant e^{at/2}$ au voisinage de $-\infty$. Enfin, l'intégrabilité au voisinage de x^- est assurée car $s < 0$ et f bornée. L'égalité finale résulte d'un changement de variable.
17. À l'aide du théorème de continuité d'une intégrale dépendant d'un paramètre, on montre que $x \mapsto D^{(s)}(f)(x)$ est continue sur $]-\infty, x_0]$, pour $x_0 \in \mathbb{R}$, puis sur $\mathbb{R}$.
La continuité de $(u,x) \mapsto u^{-s-1}f(x-u)$ sur $\mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}$ est claire. Quand à la domination, il existe $M \geqslant 0$ et $a > 0$ tels $|f(t)| \leqslant Me^{at}$ sur $]-\infty, x_0]$. Pour $x \leqslant x_0$, et pour $u > 0$, $\left|u^{-s-1}f(x-u)\right| \leqslant Me^{ax_0}u^{-s-1}e^{-au}$ qui est intégrable sur $\mathbb{R}_+^*$ et ne dépend pas de x.
On fixe alors $x_0 = 0$, et pour $x \leqslant 0$, $\forall u > 0$, $\left|u^{-s-1}f(x-u)\right| \leqslant Mu^{-s-1}e^{-au}e^{ax}$, pour un certain $M \geqslant 0$. On intègre sur $\mathbb{R}_+^*$ pour obtenir $\left|D^{(s)}(f)(x)\right| \leqslant Ma^se^{ax}$ et le résultat : $D^{(s)}(f) \in \mathbb{S}_0$.

18. Le résultat est clair pour $p=1$. On le suppose acquis jusqu'à l'ordre $p-1 \geqslant 1$. À l'ordre p, si on note $F(x)=\int_{-\infty}^{x} f(t)dt$, $F=D^{(-1)}(f)$ est donc dans $\mathbb{S}_0$ et

$$D^{(-p)}(f)(x)=\frac{1}{(p-1)!}\int_0^{+\infty} u^{p-1}f(x-u)du=\frac{1}{(p-2)!}\int_0^{+\infty} u^{p-2}F(x-u)du=D^{(-p-1)}(F)(x).$$

Or, par hypothèse,

$$\begin{aligned} D^{(-p+1)}(F)(x) &= \textstyle\int_{u_1=-\infty}^{x}\Big(\int_{u_2=-\infty}^{u_1}\Big(\dots\Big(\int_{u_{p-1}=-\infty}^{u_{p-2}} F(u_{p-1})du_{p-1}\Big)\dots\Big)du_2\Big)du_1 \\ &= \textstyle\int_{u_1=-\infty}^{x}\Big(\int_{u_2=-\infty}^{u_1}\Big(\dots\Big(\int_{u_p=-\infty}^{u_{p-1}} f(u_p)du_p\Big)\dots\Big)du_2\Big)du_1, \end{aligned}$$

d'où le résultat. Cette propriété montre que l'on a défini une généralisation (holomorphe) de l'intégration itérée p fois, pour $p\in\mathbb{N}^*$, à l'intégration itérée $-s$ fois, $s\in\,]-\infty\,,0[$.

19. Soit $f\in\mathbb{S}_0$. Par définition, pour $x\in\mathbb{R}$,

$$\begin{aligned} D^{(s)}\circ D^{(s')}(f)(x) &= \frac{1}{\Gamma(-s)}\int_{u=-\infty}^{x}(x-u)^{-s-1}D^{(s')}(f)(u)du \\ &= \frac{1}{\Gamma(-s)\Gamma(-s')}\int_{u=0}^{+\infty}u^{-s-1}\Big(\int_{v=0}^{+\infty}v^{-s'-1}f(x-u-v)dv\Big)du. \end{aligned}$$

Il existe $M\geqslant 0$ et $a>0$ tels que $|f(t)|\leqslant Me^{at}$ pour $t\in]-\infty,x[$.

Les valeurs de s' et x étant fixées, pour $u\in\mathbb{R}_+^*$, $\displaystyle\int_{v=0}^{+\infty}\Big|v^{-s'-1}f(x-u-v)\Big|dv\leqslant M\Gamma(-s')a^{s'}e^{ax}e^{-au}$.

L'application du théorème de Fubini est alors licite et on peut faire le changement de variable $u+v=t$, $u-v=r$. Le jacobien de $(t,r)\mapsto(u,v)$ est égal à $1/2$ et il vient

$$\begin{aligned} D^{(s)}\circ D^{(s')}(f)(x) &= \frac{1}{\Gamma(-s)\Gamma(-s')}\int_{(u,v)\in\mathbb{R}_+^{*2}}u^{-s-1}v^{-s'-1}f(x-u-v)dudv. \\ &= \frac{1}{2\Gamma(-s)\Gamma(-s')}\int_{t=0}^{+\infty}\int_{r=-t}^{t}\left(\frac{t+r}{2}\right)^{-s-1}\left(\frac{t-r}{2}\right)^{-s'-1}f(x-t)drdt \\ &= \frac{1}{\Gamma(-s)\Gamma(-s')}\int_{t=0}^{+\infty}\int_{w=0}^{t}w^{-s-1}(t-w)^{-s'-1}f(x-t)dwdt \\ &= \frac{1}{\Gamma(-s)\Gamma(-s')}\int_{t=0}^{+\infty}\int_{w=0}^{1}u^{-s-1}(1-u)^{-s'-1}f(x-t)t^{-s-s'-1}dwdt \\ &= \frac{1}{\Gamma(-s)\Gamma(-s')}\int_{w=0}^{1}u^{-s-1}(1-u)^{-s'-1}dw\int_{t=0}^{+\infty}f(x-t)t^{-s-s'-1}dt \\ &= \frac{1}{\Gamma(-s)\Gamma(-s')}B(-s,-s')\int_{t=0}^{+\infty}f(x-t)t^{-s-s'-1}dt \\ &= \frac{1}{\Gamma(-s-s')}\int_{t=0}^{+\infty}f(x-t)t^{-s-s'-1}dt \\ &= D^{(s+s')}(f)(x). \end{aligned}$$

À noter que le changement de variables $t=u+v$ et $w=u/t$ simplifie les calculs, mais c'est moins intuitif.

20. Soit $f\in\mathbb{S}_\infty$ et $s<0$. Pour tout $n\in\mathbb{N}$, $f^{(n)}\in\mathbb{S}_0$, ce qui justifie l'égalité $\dfrac{d^n}{d^nx}D^{(s)}(f)=D^{(s)}(f^{(n)})$ par dérivation sous le signe intégral (la domination a déjà été vérifiée).

On applique alors les questions précédentes qui donnent l'existence, la continuité et l'appartenance à $\mathbb{S}_0$ de $\dfrac{d^n}{d^nx}D^{(s)}(f)$ avec l'égalité

$$\frac{d^n}{d^nx}D^{(s)}(f)(x)=\frac{1}{\Gamma(-s)}\int_0^{+\infty}u^{-s-1}f^{(n)}(x-u)du.$$

21. (a) Il s'agit juste d'appliquer le théorème de dérivation sous l'intégrale sur la définition de $D^{(s)}$ pour conclure. C'est ce qui a été fait à la question **20.**

(b) La première égalité vient de la question précédente. Il suffit ensuite d'intégrer n fois par parties $f^{(n)}(t)$ dans $D^{(s)} \circ d^{(n)}$ pour aboutir au résultat.

(c) Supposons, par exemple, $k = m - n \geqslant 0$. Si $k = 0$ c'est évident, sinon

$$d^{(m)} \circ D^{(s-m)} = d^{(n)} \circ d^{(m-n)} \circ D^{(s-m)} = d^{(n)} \circ \circ D^{(s-n)}$$

d'après la question **21.(b)**.

22. Soit $n \in \mathbb{N}$ tel que $n > Max(s, s')$. Alors

$$\begin{aligned} D^{(s+s')} &= D^{((s-n)+(s'-n))} \circ d^{(2n)} = D^{(s-n)} \circ D^{(s'-n)} \circ d^{(2n)} \\ &= D^{(s-n)} \circ d^{(n)} \circ D^{(s'-n)} \circ d^{(n)} = D^{(s)} \circ D^{(s')}. \end{aligned}$$

Il faut tout de même remarquer que ces égalités n'ont rien de formel. Elles proviennent soit de la question **21.**, soit des propriétés élémentaires de la dérivation d'ordre $k \in \mathbb{N}^*$.

23. Pour $f \in \mathbb{S}_\infty$, $x \in \mathbb{R}$ et $n \in \mathbb{N}$,

$$D^{(n)}(f)(x) = D^{(-1)}(f^{(n+1)})(x) = \int_0^{+\infty} f^{(n+1)}(x-u)du = [-f^{(n)}(x-u)]_0^{+\infty} = f^{(n)}(x).$$

24. Établissons la continuité de $(x, s) \mapsto D^{(s)}(f)(x)$ sur $]-\infty, x_0] \times [s_0, s_1]$, pour $(x_0, s_0, s_1) \in \mathbb{R}^2$, $s_0 < s_1$.
Fixons $n \in \mathbb{N}$ tel que $s_1 < n$. La fonction $f^{(n)}$ étant dans $\mathbb{S}_0$, il existe $M \geqslant 0$ et $a > 0$ tels que pour tout $t \in]-\infty, x_0]$, $\left|f^{(n)}(t)\right| \leqslant Me^{at}$.
La fonction $(x, s) \mapsto \Gamma(-s)^{-1}$ est continue sur $]-\infty, x_0] \times [s_0, s_1]$, d'autre part, on a

$$\forall (x, s) \in]-\infty, x_0] \times [s_0, s_1],\ \forall t > 0,\ \left|t^{n-s-1} f^{(n)}(x-t)\right| \leqslant Me^{ax_0}(t^{n-s_0-1} + t^{n-s_1-1})e^{-at} = \varphi(t).$$

L'intégrabilité de φ sur $]0, +\infty[$ et le théorème de convergence dominée entraînent la continuité de $(x, s) \mapsto \displaystyle\int_0^{+\infty} u^{n-s-1} f^{(n)}(x-u)du$ sur $]-\infty, x_0] \times [s_0, s_1]$, et le résultat sur $\mathbb{R}^2$.

Partie IV : Étude des polynômes d'Hermite généralisés.

25. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\frac{d^n}{d^n x}(e^{-x^2}) = H_n(x)e^{-x^2}$ qui est bien dans $\mathbb{S}_0$.

26. C'est un simple calcul : posons $G(x) = e^{-x^2}$,

$$\begin{aligned} H_s(x) &= \frac{e^{x^2}}{\Gamma(m-s)} \int_0^{+\infty} u^{m-s-1} D^{(m)}(G)(x-u)du \\ &= \frac{e^{x^2}}{\Gamma(m-s)} \int_0^{+\infty} H_m(x-u)e^{-(x-u)^2} u^{m-s-1} du. \\ &= \frac{1}{\Gamma(m-s)} \int_0^{+\infty} H_m(x-u)e^{-u^2+2xu} u^{m-s-1} du. \end{aligned}$$

27. Si $s \in \mathbb{N}$, c'est immédiat. Dans le cas général, pour $n = E(s) + 1$ on fixe $m = n + 2$ et on dérive licitement sous l'intégrale obtenue à la question **26.** :

$$
\begin{aligned}
H_s'(x) &= \frac{2}{\Gamma(m-s)}\int_0^{+\infty} H_m(x-u)e^{-u^2+2xu}u^{m-s}du \\
&\qquad + \frac{1}{\Gamma(m-s)}\int_0^{+\infty} H_m'(x-u)e^{-u^2+2xu}u^{m-s-1}du \\
&= \frac{2}{\Gamma(m-s)}\int_0^{+\infty} H_m(x-u)e^{-u^2+2xu}u^{m-s}du \\
&\qquad - \frac{2m}{\Gamma((m-1)-(s-1))}\int_0^{+\infty} H_{m-1}(x-u)e^{-u^2+2xu}u^{(m-1)-(s-1)-1}du \\
&= \frac{2}{\Gamma(m-s)}\int_0^{+\infty} H_m(x-u)e^{-u^2+2xu}u^{m-s}du - 2mH_{s-1}(x) \\
&= \frac{2(m-s)}{\Gamma(m-(s-1))}\int_0^{+\infty} H_m(x-u)e^{-u^2+2xu}u^{m-(s-1)-1}du - 2mH_{s-1}(x) \\
&= 2(m-s)H_{s-1}(x) - 2mH_{s-1}(x) = -2sH_{s-1}(x).
\end{aligned}
$$

28. On peut dériver une fois $H_{s-1}(x) = e^{x^2}D^{(s-1)}(e^{-x^2})$. Il vient

$$H_{s-1}'(x) = 2xH_{s-1}(x) + H_s(x).$$

De $H_s'(x) = -2sH_{s-1}(x)$ et $H_s''(x) = -2sH_{s-1}'(x)$, on obtient $2sH_s(x) - 2xH_s'(x) + H_s''(x) = 0$. H_s est bien solution de l'équation (E_s) : $y''(x) - 2xy'(x) + 2sy(x) = 0$.

29. En dérivant une fois $H_s(x) = e^{x^2}D^{(s)}(e^{-x^2})$, on retrouve $H_s'(x) = 2xH_s(x) + H_{s+1}(x)$. Mais on a aussi $H_s'(x) = -2sH_{s-1}(x)$, ce qui donne le résultat.

30. Les solutions maximales de cette équation différentielle linéaire du second ordre sont définies sur $\mathbb{R}$ et l'espace des solutions maximales est de dimension 2.

31. (a) On applique le critère de d'Alembert.

    (b) C'est un polynôme ssi $\beta \in \mathbb{R} \setminus (-\mathbb{N})$ et $\alpha \in -\mathbb{N}$.
    En effet, si $\alpha \notin -\mathbb{N}$, la somme admet un DL à tout ordre avec un coefficient dominant non nul pour la partie régulière : ce n'est pas un polynôme. Si $\alpha \in -\mathbb{N}$ c'est un polynôme.

32. La recherche d'une solution DSE de la forme $\displaystyle\sum_{k=0}^{+\infty} a_k x^k$ conduit aux relations

$$\forall k \in \mathbb{N},\ a_{k+2} = \frac{2(k-s)}{(k+2)(k+1)}a_k, \quad \text{puis,} \quad \forall n \in \mathbb{N},\ a_{2n} = \frac{(-\frac{s}{2})_n}{n!(\frac{1}{2})_n}a_0 \quad \text{et} \quad a_{2n+1} = \frac{(\frac{1-s}{2})_n}{n!(\frac{3}{2})_n}a_1.$$

Il vient

$$y_{1s}(x) = K(-\frac{s}{2}, \frac{1}{2}; x^2) \quad \text{et} \quad y_{2s} = xK(\frac{1-s}{2}, \frac{3}{2}; x^2).$$

33. Par unicité de la solution du problème de Cauchy, il vient

$$H_{2n} = (-1)^n\frac{(2n)!}{n!}y_{1,2n} \quad \text{et} \quad H_{2n+1} = (-1)^{n+1}\frac{(2n+1)!}{n!}2y_{2,2n+1}$$

c'est à dire :

$$H_{2n}(x) = (-1)^n\frac{(2n)!}{n!}K(-n, \frac{1}{2}; x^2) \quad \text{et} \quad H_{2n+1}(x) = (-1)^{n+1}\frac{(2n+1)!}{n!}2xK(-n, \frac{3}{2}; x^2)$$

On obtient en effet $H_{2n}(0) = (-1)^n\frac{(2n)!}{n!}$ par récurrence grâce à la relation de la question **8.** puis $H_{2n+1}'(0) = 2(-1)^{n+1}\frac{(2n+1)!}{n!}$ par la relation différentielle établie à la question **6.**

34. On a nécessairement $H_s = H_s(0)y_{1s} + H_s'(0)y_{2s}$.
Pour $s < 0$, et avec la formule de Legendre,

$$H_s(0) = \frac{1}{\Gamma(-s)} \int_0^{+\infty} e^{-u^2} u^{-s-1} du = \frac{\Gamma(-\frac{s}{2})}{2\Gamma(-s)} = \frac{2^s\sqrt{\pi}}{\Gamma(\frac{1-s}{2})}.$$

La relation de récurrence de la question **29.** donne $H_{s+1}(0) = -2sH_{s-1}(0)$, ce qui permet d'écrire

$$\forall s \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{N}, \quad H_s(0) = \frac{2^s\sqrt{\pi}}{\Gamma(\frac{1-s}{2})}.$$

Cela est vrai sur $[0, 2[$ et on finit par récurrence.

De plus,

$$\forall s \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{N}, \quad H_s'(0) = -2sH_{s-1}(0) = -2s\frac{2^{s-1}\sqrt{\pi}}{\Gamma(\frac{-s}{2}+1)} = \frac{2^{s+1}\sqrt{\pi}}{\Gamma(\frac{-s}{2})}.$$

Pour aller plus loin dans la question, dans tous les cas, et en étendant par continuité lorsqu'il y a une indétermination,

$$\forall s \in \mathbb{R}, \ \forall x \in \mathbb{R}, \quad H_s(x) = \frac{\Gamma(-\frac{s}{2})}{2\Gamma(-s)} y_{1s} + \frac{\Gamma(\frac{1-s}{2})}{\Gamma(-s)} y_{2s}.$$

35. On montre facilement que le wronskien w est solution de l'équation $w' = 2xw$ que l'on résout. Si $C(z_1, z_2) = 0$, alors w est la fonction nulle. En particulier $w(0) = 0$, il en résulte que (z_1, z_2) est lié par unicité du problème de Cauchy en 0. La réciproque est évidente.

36. (a) C'est un calcul direct.

(b) Si $n \in \mathbb{N}$, on sait que $H_{2n}(x) = H_{2n}(-x)$ et $H_{2n+1}(x) = -H_{2n+1}(-x)$, la famille est liée.

Si $s \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{N}$, on a calculé précédemment :

$$\forall s \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{N}, \quad H_s(0) = \frac{\Gamma(-\frac{s}{2})}{2\Gamma(-s)} \ \text{ et } \ H_s'(0) = \frac{\Gamma(\frac{1-s}{2})}{\Gamma(-s)}.$$

La question **36.** indique que

$$C(H_s, \tilde{H}_s) = w(H_s, \tilde{H}_s)(0) = 2H_s(0)H_s'(0) = \frac{\Gamma(-\frac{s}{2})\Gamma(\frac{1-s}{2})}{2\Gamma(-s)^2} = \frac{2^s\sqrt{\pi}}{\Gamma(-s)} \neq 0.$$

On a donc un système fondamental de solutions de (E_s).

37. (a) Par Taylor-Lagrange, ou Taylor-RI, pour $u \geqslant 0$ on a $\left| e^{-u} - \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k u^k}{k!} \right| \leqslant \dfrac{u^{k+1}}{(n+1)!}$.

On pose alors $u = t^2$.

(b) Puisque $s < 0$, il vient

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad H_s(x) = \frac{1}{\Gamma(-s)} \int_0^{+\infty} e^{-u^2+2xu} u^{-s-1} du.$$

On injecte $e^{-u^2} = \sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k u^{2k}}{k!} + g_n(u)$ pour conclure avec un changement de variable $2xu = -v$ lorsque $x < 0$.
À noter que la série entière selon $1/x$ est de rayon nul. Il n'y a donc pas de développement en série entière selon $1/x$, juste un developpement asymptotique.

(c) Plusieurs arguments sont possibles. Par exemple, à partir de la relation de récurrence :

$$H_s(x) = 2xH_{s-1}(x) - 2(s-1)H_{s-2}(x).$$

Cette relation assure l'existence d'un développement asymptotique sur $[0,1[$, puis $[1,2[\ldots$
Une récurrence simple permet d'étendre les formules génériques, obtenues pour les coefficients lorsque $s<0$, au cas $s\in\mathbb{R}$. Sur le fond, c'est un argument d'holomorphie qui est à l'origine de cela, mais comme ici s est réel. . .

(d) Il vient donc $H_s(x) \sim (-2x)^s$ lorsque x tend vers $-\infty$. Ce résultat est cohérent avec la question **3.d.**

38. (a) Comme précédemment, on commence par le cas $s<0$, l'équation de récurrence donnant le cas général $s\in\mathbb{R}\setminus\mathbb{N}$. Le cas $s\in\mathbb{N}$ est connu, il correspond au cas polynômial.
Deux méthodes au moins : on peut écrire que $\tilde{H}_s$ est solution de (E_s) et rechercher $\tilde{H}_s$ par la méthode usuelle $y(x)=H_s(x)z(x)$. On trouve $z'(x)=\lambda H_s^{-2}(x)e^{x^2}$ qui permet de conclure.

Procédons autrement : pour $s<0$ et $x\to+\infty$,

$$\begin{aligned}
H_s(x) &= \frac{1}{\Gamma(-s)}\int_0^{+\infty} e^{-u^2+2xu}u^{-s-1}du\\
&= \frac{1}{\Gamma(-s)}e^{x^2}\int_0^{+\infty} e^{-(u-x)^2}u^{-s-1}du\\
&= \frac{1}{\Gamma(-s)}e^{x^2}\int_{-x}^{+\infty} e^{-v^2}(x+v)^{-s-1}dv\\
&= \frac{1}{\Gamma(-s)}e^{x^2}x^{-s-1}\int_{-x}^{+\infty} e^{-v^2}(1+\frac{v}{x})^{-s-1}dv\\
&\sim \frac{1}{\Gamma(-s)}e^{x^2}x^{-s-1}\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-u^2}du \sim \frac{\sqrt{\pi}}{\Gamma(-s)}e^{x^2}x^{-s-1}
\end{aligned}$$

par un argument classique utilisant le théorème de convergence dominée.
Comme indiqué, on étend ensuite à $s\in\mathbb{R}$ par la formule de récurrence.

(b) Oui ! Pour $x>0$,

$$H_s(x) = \frac{1}{\Gamma(-s)}e^{x^2}x^{-s-1}\int_{-x}^{+\infty} e^{-v^2}(1+\frac{v}{x})^{-s-1}dv.$$

On note $E_n(x)=\int_{u_1=+\infty}^{x}\int_{u_2=+\infty}^{u_1}\cdots\int_{u_n=+\infty}^{u_{n-1}} e^{-u_1^2}du_n\ldots du_1 = D^{(-n)}(e^{-x^2})$.
On peut intégrer par parties autant de fois que nécessaire en dérivant $(1+\frac{v}{x})^{-s-1}$ et en intégrant e^{-v^2} grâce à E_n puisque $E_n(x)=o(e^{-x})$ lorsque x tend vers $+\infty$ (en fait, c'est l'appartenance de $x\mapsto e^{-x^2}$ à $\mathbb{S}_\infty$). Chaque intégration par parties fournit un terme supplémentaire dans le développement asymptotique de $H_s(x)$ au voisinage de $+\infty$.

Chapitre 4

Rapport sur les épreuves orales

Les épreuves orales ont pour objectif « d'évaluer la capacité de concevoir, de mettre en œuvre et d'analyser l'enseignement d'une question mathématique donnée », ainsi que l'énonce l'arrêté définissant les épreuves du concours.

Elles supposent une solide préparation car il faut savoir, sur un sujet précis, rassembler et structurer ses connaissances en vue d'exposer les notions mathématiques afférentes, de proposer des applications et des exemples illustratifs, de sélectionner des exercices formateurs et adaptés. Pour cela, les candidats sont notamment encouragés à faire de nombreux exercices d'entraînement afin d'acquérir une familiarité et une aisance suffisantes avec les notions mathématiques qu'ils n'ont pas l'occasion d'enseigner. Il est également important de préparer des plans possibles pour les différents sujets proposés dont la liste est donnée au chapitre 5. À ce propos, il est vivement déconseillé d'utiliser sans recul les ouvrages livrant des leçons « prêtes à l'emploi ». D'une part, parce que le but de l'épreuve orale est précisément de montrer sa propre capacité à structurer l'exposé d'une question donnée, ce qui suppose souvent de comparer plusieurs ouvrages et de faire des choix réfléchis, d'autre part, parce que le jury connaît parfaitement ces ouvrages, ce qui l'amène souvent à s'assurer de la bonne maîtrise par les candidats des passages délicats et bien identifiés par lui. Enfin, la préparation des candidats à l'oral ne doit pas se limiter à la seule étude des sujets proposés car les questions du jury portent sur tout le programme et abordent des notions connexes.

Le déroulement des épreuves orales de la session 2019 sera reconduit en 2020.

Chacune des deux épreuves comporte un temps de préparation de trois heures. Les candidats reçoivent une convocation aux épreuves d'admission mentionnant l'heure du début des opérations (accueil, consignes pratiques, vérification d'identité et tirage du sujet ; il est recommandé par sécurité de se présenter un quart d'heure avant), ainsi que l'heure de passage devant la commission d'oral pour chacune des deux épreuves qui ont lieu sur deux jours, dimanches et jours fériés compris. À leur première épreuve orale (épreuve d'exposé), les candidats tirent un couplage de deux sujets (au choix) qui relève soit du domaine de l'algèbre et géométrie soit du domaine de l'analyse et probabilités. Pour leur seconde épreuve orale (exemples et exercices), ils tirent un couplage de deux sujets (au choix) pris dans le domaine complémentaire (analyse et probabilités si le domaine de l'exposé était en algèbre et géométrie et vice-versa). Outre l'accès libre à la bibliothèque de l'agrégation (cf. liste des ouvrages chapitre 6), les candidats bénéficient de ressources numériques dans la salle de préparation : programmes scolaires et documents ressources, derniers rapports du jury, programme du concours, polycopiés numériques [1]. Ils ont également la **possibilité d'apporter leurs propres**

1. Liste publiée à l'adresse l'adresse suivante : http://interne.agreg.org

ouvrages sous réserve que ces derniers soient commercialisés[2] **avec un numéro ISBN et qu'ils ne comportent aucune annotation, aucun surlignage, aucun marque page etc.**, faute de quoi ils pourraient être suspectés de tentative de fraude. Les candidats sont invités à bien s'en assurer avant de rejoindre le centre d'épreuves.

Dans la salle de préparation, chaque candidat dispose d'un espace numérique de travail avec les ressources et logiciels prévus (*cf. infra* 4.1.2). Pour cela, des identifiants de connexion lui sont communiqués lors du tirage des sujets. Tous les fichiers qu'il crée sont enregistrés sur le réseau et, sous réserve de s'être deconnecté avant de quitter la salle de préparation, le candidat peut les retrouver dans la salle de jury en se reconnectant au réseau.

4.1 Considérations générales

Il appartient aux candidats de bien prendre connaissance des conditions de passation de chacune des épreuves orales (cf. *infra*), et notamment du fait qu'elles sont structurées en trois temps bien distincts et limités en durée : un temps de présentation ou d'exposé (avec notes), un temps de développement (sans notes) et un temps réservé aux questions du jury. Pendant les deux premières parties, le jury n'intervient pas, sinon en comptable du temps. À ce propos, beaucoup trop de candidats gèrent difficilement le temps qui leur est imparti et nombreux sont ceux qui ne parviennent pas au bout du développement par manque de maîtrise ou pour avoir choisi une situation trop calculatoire, ce qui est souvent périlleux.

Les candidats doivent, dans la mesure du possible, faire tenir toutes leurs traces écrites (présentation et développement) sur l'espace du tableau sans rien effacer, quitte à écrire plus petitement. Ils peuvent recourir à quelques abréviations mais sans sacrifier à la rigueur ; en particulier, les énoncés des théorèmes et des définitions doivent être précis et complets, les quantificateurs ou connecteurs logiques doivent être rigoureusement utilisés.

Par ailleurs il convient de lire très attentivement le sujet et de bien en délimiter le périmètre pour éviter aussi bien des oublis que des hors sujets. Plusieurs candidats confondent « exemples » et « applications », et trop souvent les applications proposées ne sont en fait que des illustrations de la notion.

Enfin, certains candidats se découragent pendant le temps de préparation, voire abandonnent. C'est dommage car, comme indiqué précédemment, l'agrégation interne est un concours difficile qui se prépare sur plusieurs années et toute expérience de l'oral est toujours formatrice.

4.1.1 Critères d'évaluation

Le jury fonde son évaluation sur un ensemble de critères variés permettant d'apprécier à leur juste valeur les prestations des candidats. Il est particulièrement attentif :

- à la maîtrise mathématique du sujet :
  - maîtrise des contenus afférents au sujet et cela au niveau attendu par le concours ;
  - exactitude et précision des énoncés des définitions, théorèmes ou propriétés ;
  - rigueur des démonstrations et des raisonnements logiques, mise en évidence de l'utilisation des hypothèses ; maîtrise des quantificateurs, de la logique ;
  - capacité à mobiliser ses connaissances mathématiques en vue de résoudre un problème ou d'expliquer un phénomène ;

2. Les impressions de livres numériques ne sont pas autorisées.

— mise en lien des différentes idées et notions évoquées ;
— etc.

- à la pertinence de la présentation au regard du sujet donné :
  — bonne couverture du thème avec un réel contenu mathématique et sans hors sujets ;
  — niveau auquel le candidat choisit de se placer (un niveau trop élémentaire est sanctionné de même qu'un niveau trop élevé si mal maîtrisé) ;
  — cohérence du plan et des articulations entre les différentes parties et notions présentées ;
  — choix du développement proposé ;
  — diversité, richesse, progressivité des exercices retenus (ces derniers devant se compléter pour couvrir l'ensemble des problématiques du sujet) ;
  — etc.

- aux qualités pédagogiques :
  — clarté de l'expression orale ;
  — clarté et cohérence des notations employées ;
  — capacité à motiver ses choix et ses actions, à expliquer clairement les raisons de sa démarche ;
  — gestion du temps ;
  — capacité à communiquer efficacement en se servant de différents supports (tableau, écran de projection) ;
  — présentation et gestion du tableau, organisation des calculs, etc.
  — capacités d'interaction avec le jury (écoute, réactivité, prise d'initiatives, capacité à mobiliser ses connaissances et à rectifier une erreur etc.) ;
  — utilisation convaincante, le cas échéant, des outils numériques ;
  — etc.

4.1.2 Usage des moyens informatiques

Les mathématiques d'aujourd'hui utilisent largement les outils informatiques, qu'il s'agisse de logiciels prêts à l'emploi ou d'algorithmes résolvant des problèmes de manière effective. Cela modifie très sensiblement les conditions d'exercice du métier d'enseignant : d'une part, certaines tâches techniques (longs calculs, tracés de courbes, résolutions approchées de problèmes, etc.) sont facilitées par des logiciels spécialisés et, d'autre part, certains logiciels interviennent couramment comme outils pédagogiques (représentation dynamique de situations géométriques, simulation d'expériences aléatoires etc.). Enfin, rappelons que les professeurs de mathématiques ont vocation, à tous les niveaux de la scolarité, à participer à l'enseignement d'algorithmique et de programmation proposé au collège et au lycée ainsi qu'à celui d'informatique inscrit dans les maquettes de formation des classes préparatoires.

C'est dans cet esprit que des moyens informatiques sont mis à disposition pour les deux épreuves orales afin que les candidats puissent valoriser leurs compétences dans ce domaine.
La liste des logiciels disponibles peut-être consultée sur le site du jury à l'adresse suivante :
`http://interne.agreg.org`. Les candidats y trouveront, avant le début des épreuves orales, toutes les informations utiles sur l'environnement numérique qu'ils retrouveront dans les salles de préparation. Il est notamment important d'avoir une certaine familiarité avec les logiciels mis à disposition afin d'être libéré des préoccupations techniques pour exploiter leurs apports pédagogiques.

Une fois encore à la session 2019, on a constaté une faible utilisation des outils numériques alors même que plusieurs sujets ont une dimension algorithmique évidente qui gagnerait à être illustrée informatiquement. Trop souvent les animations numériques proposées sont d'un apport limité et, en conséquence, sont peu valorisées, ce qui est dommage eu égard au temps que les candidats ont passé à les préparer. Le jury attend que les illustrations algorithmiques ou logicielles apportent une réelle plus-value au sujet traité.

Par ailleurs, une animation ou un programme, si convaincants soient-ils, ne constituent pas une preuve mathématique et ne peuvent en aucun cas tenir lieu de développement lors de la deuxième partie de l'épreuve. Concernant la présentation des algorithmes, on pourra se contenter d'une rédaction dans un pseudo-langage en français et expliquer comment a été faite l'implantation en machine. À ce propos, il est utile de prévoir des commentaires qui facilitent la lecture du code et permettent de valoriser le travail du candidat, même s'il demeure des erreurs de syntaxe qui empêchent le fonctionnement du programme (la programmation est un art qui peut échouer sur des détails minimes). Le jury n'attend pas une programmation aboutie avec tous les raffinements esthétiques possibles mais seulement de voir fonctionner un algorithme pour en montrer l'efficacité ou les limites en temps de calcul, ou encore de voir, au travers d'une animation, l'effet de certains paramètres qu'on peut faire varier de façon dynamique.

Enfin, les candidats doivent veiller à limiter leur temps de préparation et de présentation sur cet aspect des choses, et à intégrer leurs illustrations informatiques aux deux premiers temps de l'épreuve orale, sans possibilité de déborder sur la partie consacrée aux questions du jury.

4.2 L'épreuve orale d'exposé

4.2.1 Déroulement de l'épreuve

L'épreuve orale d'exposé se déroule en trois temps :

- présentation du plan (durée maximale de **15 minutes**) ;
- développement d'un élément du plan choisi par le candidat (durée maximale de **15 minutes**) ;
- questions du jury (pour la **durée complémentaire de l'épreuve**).

4.2.2 Choix des sujets

Le jury regrette que les leçons de géométrie soient toujours autant évitées par les candidats, comme le confirme la liste ci-dessous des leçons qui ne sont presque jamais retenues quand elles figurent dans un couplage (moins de 15% des occurrences).

Sujets très peu choisis	
137	Droites et cercles dans le plan affine euclidien.
146	Coniques.
170	Méthodes de chiffrement ou de codage. Illustrations.
251	Diverses méthodes de résolution approchée d'une équation numérique ou d'une équation différentielle.
258	Couples de variables aléatoires possédant une densité. Covariance. Exemples d'utilisation.
262	Étude métrique des courbes planes.

À l'opposé, les leçons suivantes sont presque toujours choisies lorsqu'elles sont tirées (dans plus de 80% des cas).

Sujets très fréquemment choisis	
110	Polynômes d'endomorphismes en dimension finie. Applications.
113	Déterminants. Applications.
143	Polynômes à une indéterminée à coefficients réels ou complexes.
168	Racines d'un polynôme à une indéterminée. Relations coefficients-racines.
202	Séries à termes réels positifs. Applications.
203	Séries à termes réels ou complexes : convergence absolue, semi-convergence. (Les résultats relatifs aux séries à termes réels positifs sont supposés connus).
204	Espaces vectoriels normés de dimension finie, normes usuelles, équivalence des normes. Applications.
224	Équations différentielles linéaires d'ordre deux : $x'' + a(t)x' + b(t)x = c(t)$, où a, b, c sont des fonctions continues sur un intervalle de $\mathbf{R}$, à valeurs réelles ou complexes.
263	Suites dans un espace vectoriel normé de dimension finie.

4.2.3 Plan

Il s'agit de présenter les notions et les principaux résultats liés au sujet. C'est un exercice de synthèse qui suppose de savoir mettre en évidence les articulations entre les objets présentés et de bien faire ressortir les enchaînements d'idées. Ce ne doit pas être un catalogue de définitions et de résultats sans véritables liens entre eux. Il convient de bien s'y préparer afin d'être en capacité de bien identifier le périmètre de la leçon et d'éviter à la fois les hors sujets ou les omissions. Ainsi, pour le sujet 143 (Polynômes à une indéterminée à coefficients réels ou complexes) penser que l'irréductibilité a toute sa place. De même, pour le sujet 235 (Exponentielles de matrices : définition, propriétés, applications), il faut bien repérer qu'il ne s'agit pas d'une leçon d'algèbre. Ceci est manifeste dans la définition même de l'exponentielle de matrices qui requiert la notion de convergence ou dans les applications en particulier aux équations différentielles linéaires. La considération de la dérivée de t –> exp(tA) permet d'établir simplement certaines relations algébriques. Enfin les aspects liés au calcul différentiel ne doivent pas être négligés.

Il est inutile de détailler les notations et définitions élémentaires et de trop s'attarder sur les prérequis, afin de disposer d'un temps suffisant pour aborder la partie consistante et centrale du sujet. Les candidats peuvent supposer une certaine familiarité des examinateurs avec les notions abordées et les ouvrages qui les traitent, et éviter ainsi les listes interminables de propriétés évidentes. Il convient d'autant plus d'y être attentif que le sujet est *a priori* long et savoir faire des choix clairs pour que la présentation aborde bien le cœur du sujet. Ainsi, pour le sujet 106 (PGCD dans $\mathbf{Z}$ et $\mathbf{K}[X]$ où $\mathbf{K}$ est un corps commutatif, théorème de Bézout. Applications.) est-il judicieux de synthétiser ce qui est commun à $\mathbf{Z}$ et $\mathbf{K}[X]$ plutôt que d'exposer successivement des résultats et définitions similaires.

Il n'est pas nécessaire de tout écrire en détail. En revanche, les théorèmes importants ou les propriétés centrales du sujet doivent être énoncés avec précision (hypothèses, quantificateurs existentiels ou universels ...).

Insistons aussi sur le fait que le plan doit être cohérent sur l'ordre de présentation des différentes notions ou théorèmes. Il doit être sans cercle vicieux et doit refléter les capacités de synthèse que l'on est en droit d'attendre d'un professeur de mathématiques. Il faut savoir prendre du recul et souligner oralement les liens entre les différents résultats présentés. Aussi, la recopie linéaire d'un chapitre d'un ouvrage n'est pas souhaitable. Par ailleurs, il n'est pas indispensable, sur certaines leçons, d'être exhaustif. Il est en revanche très apprécié de fournir des exemples et contre-exemples des propriétés ou théorèmes cités. En particulier, il convient d'avoir réfléchi aux réciproques des conditions nécessaires ou suffisantes énoncées dans le plan. De même, les candidats sont invités, lorsque c'est pertinent, à proposer des applications, même si cela n'est pas explicitement demandé dans le libellé du sujet.

Par ailleurs, il faut s'employer à répondre précisément à la question posée et à bien adapter le plan aux intitulés des sujets. Ainsi, le jury a regretté que les leçons 151 (Réduction d'un endomorphisme d'un espace vectoriel de dimension finie. Applications.), 156 (Valeurs propres. Recherche et utilisation.), 163 (Endomorphismes diagonalisables. Exemples et applications.) et 110 (Polynômes d'endomorphismes en dimension finie. Applications.) donnent lieu à des plans identiques. Dans le même registre, il convient de bien centrer le traitement du sujet sur ce qu'il a de spécifique. Ainsi, les sujets 167 (Groupe des nombres complexes de module 1. Sous-groupes des racines de l'unité. Applications.) et 213 (Exponentielle complexe ; fonctions trigonométriques et hyperboliques, nombre π.) doivent-ils être bien distingués. Enfin, il n'est pas raisonnable de voir les exposés de probabilités systématiquement dévier vers des développements d'analyse avec des calculs d'intégrales ou de séries.

Une motivation, même orale, des notions fondamentales introduites est bienvenue, tout comme les exemples qui permettent d'illustrer les résultats théoriques. Le jury apprécie toute application dans des domaines variés témoignant d'une solide maîtrise mathématique et d'une bonne culture scientifique du candidat. Attention cependant à éviter le bavardage en citant hors contexte et de façon vague des applications scientifiques mal connues du candidat.

Le candidat consultera avec profit les rapports antérieurs pour d'autres commentaires.

4.2.4 Développement

Le développement consiste à détailler et exposer une situation mathématique significative et importante de la leçon (souvent la démonstration d'un théorème), et **figurant explicitement dans le plan**. À ce titre il est peu judicieux que l'énoncé du développement figure à la fin du plan au risque de ne pas avoir le temps de l'écrire proprement. Le développement se fait **sans notes**, celles-ci pouvant être consultées occasionnellement avec l'accord du jury (par exemple pour vérifier une hypothèse ou une notation). Il permet au jury d'apprécier les compétences mathématiques du candidat et sa capacité à effectuer une présentation vivante, claire et maîtrisée d'une question. Le développement ne doit pas se limiter à la « récitation » d'une démonstration apprise par cœur. Le candidat doit au contraire montrer qu'il domine son sujet en présentant le canevas de la démonstration, en annonçant avec précision les résultats intermédiaires qu'il cherche à établir et le type de raisonnement qu'il met en œuvre (raisonnement par l'absurde, par analyse-synthèse, par récurrence, etc.), en indiquant les moments où interviennent les hypothèses, etc. Il est également attendu une présentation rigoureuse (quantificateurs appropriés, hypothèses de récurrence précises...).

Le choix du développement revient au candidat et non aux examinateurs. Rappelons que ce choix est en soi un élément de l'évaluation. Le point développé doit être substantiel, consistant et au cœur du sujet. Ce n'est pas le cas, par exemple, du théorème/lemme de Bézout quand on a défini le PGCD au moyen des idéaux de $\mathbf{Z}$ ou de $\mathbf{K}[X]$ ou de l'inversion d'une matrice 4x4 dans la leçon 155 (Systèmes d'équations linéaires. Applications.). De même, il n'est pas admissible de démontrer un théorème en admettant l'essentiel du contenu mathématique de sa preuve dans un lemme énoncé dans le plan et en se contentant de faire de simples vérifications. Le jury a également sanctionné dans la notation les candidats qui ont proposé la résolution d'un exercice élémentaire ou la présentation d'un exemple inconsistant. Ce n'est pas ce qui est attendu, outre le fait que cette pratique biaise la nature complémentaire des deux épreuves orales et pourrait s'interpréter comme une stratégie d'optimisation consistant à préparer des développements susceptibles d'être présentés aussi bien en exposé qu'en exercices. Enfin, certains candidats ont visiblement préparé des développements « passe-partout » qu'ils considèrent comme interchangeables entre plusieurs exposés mais qui s'avèrent souvent n'avoir qu'un lien très ténu avec le sujet choisi, ce qui est lourdement sanctionné par le jury.

4.2.5 Niveau de la leçon

Il convient d'éviter deux écueils : celui de se placer à un niveau trop élémentaire et celui de vouloir traiter des questions que l'on ne maîtrise pas ou mal. Il appartient au candidat de proposer un exposé en adéquation avec le niveau du programme de l'agrégation interne, en retenant des notions, théorèmes et exemples qu'il maîtrise.
Par ailleurs, se placer d'emblée dans un cadre plus vaste que celui qui est précisé dans l'intitulé du sujet n'est pas recommandé car c'est prendre le risque de ne pas développer des particularités spécifiques à la question posée ou de traiter des parties « hors sujet », inévitablement sanctionnées par le jury. Il est préférable, si on le souhaite, d'étendre les résultats présentés en fin d'exposé.

4.2.6 Questions du jury

Les questions du jury visent à s'assurer de la bonne compréhension et d'une maîtrise suffisante des notions présentées par le candidat. Elles permettent souvent de corriger les éventuelles imprécisions ou erreurs figurant dans le plan ou dans le développement. Elles peuvent aussi consister à appliquer un résultat de la leçon sur un exemple proposé par le jury. Elles ne sont pas posées dans le but de piéger les candidats et ne nécessitent que très rarement de longs arguments. Si le candidat n'a pas proposé d'exemple ou de contre-exemple, cela pourra lui être demandé à ce moment là de l'épreuve. De même, le candidat doit s'attendre à ce que le jury lui demande des justifications, voire des démonstrations, de points ou notions qu'il aura exposés.

Les capacités de recherche et d'interaction du candidat avec le jury sont particulièrement évaluées lors de ce temps de l'épreuve. Réfléchir à haute voix, reformuler la question posée, se placer dans un cas particulier quand on ne voit pas comment traiter le cas général, s'aider de figures ou de schémas sont autant d'attitudes qui sont valorisées par le jury.

4.3 L'épreuve orale d'exemples et exercices

L'épreuve d'exemples et exercices consiste à présenter une sélection de situations particulières d'enseignement sur un thème donné. Le candidat témoigne ainsi de sa maîtrise mathématique du sujet et de sa réflexion pédagogique relative à son enseignement.

4.3.1 Déroulement de l'épreuve

En réponse au sujet qu'il a retenu, le candidat propose trois à six exercices ou exemples dont il rédige l'énoncé sur des feuilles pré-imprimées qui lui sont remises. À l'issue de la préparation, des photocopies de ce document sont réalisées par les appariteurs et sont remises par le candidat aux examinateurs.

L'épreuve orale se déroule en trois temps :

- présentation motivée de l'ensemble des exercices ou exemples sélectionnés par le candidat (durée maximale de **10 minutes**) ;
- résolution commentée d'un des exercices ou exemples au choix du candidat parmi ceux qu'il vient de présenter (durée maximale de **15 minutes**) ;
- questions du jury (pour la **durée complémentaire de l'épreuve**).

L'épreuve n'est pas censée représenter une séance devant une classe de collège ou de lycée ; des objectifs plus ambitieux et un rythme plus soutenu doivent être adoptés sous réserve d'une bonne maîtrise des notions mathématiques sous-jacentes et d'une certaine qualité d'exposition.

L'attention des candidats est appelée sur les deux points suivants :

- la formulation d'un énoncé est un acte pédagogique et le candidat est invité à modifier ceux des ouvrages qu'il consulte, en fonction de l'objectif pédagogique qu'il se fixe. Ainsi, par exemple, des énoncés segmentés en de trop nombreuses questions ne demandant que des vérifications élémentaires ne sont pas adaptés à cette épreuve ;
- la démonstration d'une propriété du cours nécessite, si le candidat souhaite la proposer dans sa liste d'exercices ou d'exemples, un réel travail de transformation pédagogique pour qu'elle devienne un véritable exercice, au risque sinon de dévoyer le sens de cette épreuve en reprenant à l'identique des énoncés qui ont en fait toute leur place dans l'épreuve d'exposé.

Cette épreuve nécessite un important travail de préparation en amont car elle suppose une réflexion transversale préalable sur les notions figurant au programme afin de pouvoir en présenter des illustrations variées. Ainsi, pour le sujet 301 (Exercices sur les groupes), est-il pertinent de se rappeler que les groupes interviennent en algèbre (groupes symétriques, groupes de matrices), en arithmétique ($\mathbf{Z}/n\mathbf{Z}\ \dots$) ou en géométrie (groupes d'isométries). De même pour le sujet 314 (Exercices illustrant l'utilisation de déterminants), est-il intéressant de s'ouvrir à la géométrie, les déterminants s'interprétant comme des aires ou des volumes. Ou encore, pour le sujet 437 (Exercices faisant intervenir des variables aléatoires), il convient de considérer à la fois des variables aléatoires discrètes et des variables aléatoires à densité.

Cette épreuve demande du recul et il ne faut pas s'étonner de voir le jury demander le schéma général de résolution d'un exercice proposé par le candidat, sans en demander tous les détails : cela suppose de bien maîtriser les mathématiques sous-jacentes et exclut en particulier la recopie d'exercices trouvés à la hâte dans divers recueils.

4.3.2 Choix des sujets

Comme pour l'épreuve orale d'exposé, ce sont souvent les sujets de géométrie qui sont délaissés par les candidats, alors même qu'ils font écho à des notions enseignées par les professeurs du secondaire et qui pourraient être valorisées au concours.

Sujets très peu choisis	
328	Exemples d'utilisation de transformations en géométrie.
340	Exercices faisant intervenir des groupes en géométrie.
354	Exercices sur les cercles et les sphères.
428	Exemples d'étude et de résolution exacte ou approchée d'équations différentielles scalaires.
440	Exercices sur les propriétés métriques des courbes planes (longueur, courbure...).
447	Exemples d'équations fonctionnelles.
448	Exemples d'estimation en statistiques : estimation ponctuelle, estimation par intervalles de confiance.
451	Exemples d'applications des transformées de Fourier et de Laplace.
452	Exemples d'applications du théorème des fonctions implicites.

Le tableau ci-dessous liste les sujets très fréquemment choisis (dans plus de 80% des couplages où ils figurent).

Sujets très fréquemment choisis	
302	Exercices faisant intervenir les notions de congruence et de divisibilité dans $\mathbf{Z}$.
309	Exercices faisant intervenir des polynômes et fractions rationnelles. On pourra se limiter aux corps de base $\mathbf{R}$ ou $\mathbf{C}$.
314	Exercices illustrant l'utilisation de déterminants.
317	Exercices sur les endomorphismes diagonalisables ou trigonalisables.
348	Exercices illustrant l'emploi de puissances ou d'exponentielles de matrices.
403	Exemples d'étude de suites définies par une relation de récurrence.
404	Exemples d'étude de la convergence de séries numériques.
405	Exemples de calcul exact de la somme d'une série numérique.
407	Exemples d'évaluation asymptotique de restes de séries convergentes, de sommes partielles de séries divergentes.
408	Exemples d'étude de séries réelles ou complexes non absolument convergentes.
411	Exemples d'étude de fonctions définies par une série.
412	Exemples de développement d'une fonction en série entière. Applications.
426	Exemples d'utilisation d'intégrales simples et multiples : calculs de longueurs, d'aires, de volumes, ...

4.3.3 Présentation motivée des exercices ou exemples

Il s'agit d'expliquer soigneusement les raisons qui ont conduit au choix des exercices et il est inutile de recopier les énoncés au tableau. Motiver le choix d'une liste d'exercices, c'est en expliquer la pertinence par des raisons d'ordre pédagogique ou mathématique (l'un n'excluant pas l'autre), préciser les prérequis, situer les exercices dans leur contexte, commenter leur apport sur le plan pédagogique, etc.

Voici quelques éléments de motivations possibles :

Objectif : S'il est important d'indiquer à quel public s'adressent les exercices et ce qu'ils supposent connu de ce public, ceci doit être fait brièvement. Il faut également décrire quel est l'objectif de chaque exercice : illustration ou complément d'un résultat de cours, entraînement à une technique de calcul particulière, mise en évidence d'une propriété remarquable, etc. Insistons : cette présentation doit être concise.

Niveau : Les difficultés éventuelles d'un énoncé doivent être mises en évidence. Le souci de graduer ces difficultés ou d'aider à les surmonter par des indications appropriées ou des questions intermédiaires constitue un aspect possible de la présentation des exercices. Il est important d'indiquer l'apport mathématique de chaque exercice choisi.

Cohérence : Les énoncés ne doivent pas constituer une collection hétéroclite, sans que jamais ne se dégage une quelconque méthode un peu générale : leur ensemble doit posséder un certain degré de cohérence, variable selon les sujets. Il serait bon que les candidats puissent dégager les idées, méthodes générales qui entrent en jeu même si elles sont illustrées dans les exercices sur des cas particuliers. Indiquer les connexions pouvant relier certains énoncés est une démarche appréciée, de même que l'indication de la place de ces exercices dans une séquence d'enseignement. Dans tous les cas, il faut s'assurer que les exercices retenus sont en adéquation avec le sujet proposé et « balayent » effectivement l'ensemble du sujet.

Intérêt : Un exercice peut apporter un éclairage particulier sur une notion ou laisser entrevoir un développement de celle-ci ou encore en donner une application pertinente. De tels critères peuvent être mis en avant pour justifier du choix d'un exercice. Il est d'ailleurs bon de citer les concepts ou théorèmes sous-jacents. Lorsqu'il existe diverses méthodes ou outils pour résoudre un problème donné, un exercice peut avoir pour objectif d'en comparer certaines, ne serait-ce que sur des exemples.

Originalité : Le choix d'un exercice ne doit pas se limiter au recyclage de quelques situations rabâchées.

Bien des candidats présentent très honorablement cette première partie de l'épreuve, en mettant en valeur leurs compétences pédagogiques et leurs acquis professionnels, et en motivant la sélection des exercices par la diversité des applications qu'ils mettent en évidence. Ils utilisent le tableau de manière efficace tout en captant l'attention des examinateurs.

Il convient néanmoins d'attirer l'attention sur les défauts observés et de prodiguer quelques conseils. Trop souvent, les candidats se contentent de donner lecture de leurs énoncés en quelques minutes. D'autres pratiquent avec plus ou moins de conviction la stratégie du « remplissage », qui consiste à occuper au mieux le temps alloué en diluant la présentation de leurs exercices à grands traits de banalités. D'autres enfin se contentent d'énoncer quelques théorèmes en rapport avec les exercices : s'il peut être pertinent de situer le contexte mathématique et de mettre en évidence les notions ou théorèmes essentiels dans la résolution, il n'est pas judicieux de commencer la présentation par de longs rappels de cours, et encore moins de transformer la séance en un exposé de leçon. En outre, écrire *in extenso* au tableau les théorèmes ou propriétés à l'œuvre dans les exercices n'est pas nécessaire (à ce moment là de l'épreuve) et même déconseillé, au risque sinon de constituer une « antisèche » pour la résolution des exercices, ce qui est très peu apprécié du jury.

On attend des candidats qu'ils proposent des exercices réellement différents, par leurs domaines spécifiques ou bien par leurs méthodes de traitement, et non pas des habillages différents d'une seule et même idée. Il est bon de privilégier les exercices s'appliquant à des domaines variés. Il convient de présenter des exercices consistants (qui ne se résolvent pas de tête ou en cinq minutes) et d'éviter les exercices relevant d'une astuce qui sont souvent de peu d'intérêt. On préfèrera ceux donnant une méthode de résolution réutilisable et pédagogiquement efficace. Il convient aussi d'être vigilant sur les exercices ayant plusieurs méthodes de résolution, dont certaines peuvent les rendre élémentaires (même si celles-ci sont hors sujet dans le cadre de la séance présentée) : c'est un atout de savoir montrer au jury sa maîtrise de l'ensemble des outils qui pourraient être mobilisés sur un exercice. Enfin, on évitera les exercices très proches du cours, ou consistant à proposer la démonstration d'un théorème du cours, afin de bien différencier les deux épreuves orales (*cf. supra*). Bien évidemment, le candidat doit veiller à ce que les exercices qu'il propose entrent bien dans le cadre délimité par le titre du sujet : le hors sujet est sanctionné !

Revenons enfin, et à nouveau, sur un point évoqué dans les précédents rapports. Certains sujets ont un intitulé commençant par « Exercices faisant intervenir... » ou bien « Exercices illustrant l'utilisation ... » : il ne s'agit pas de proposer des exercices (parfois fort techniques) presque exclusivement centrés sur la notion concernée (nombres premiers, division euclidienne, trigonométrie, déterminants, ...), c'est-à-dire des exercices d'entraînement sur cette notion, mais plutôt de donner des exercices un peu plus variés où la notion évoquée peut jouer un rôle dans un autre domaine. De même, comme indiqué précédemment, il y a une différence entre des « illustrations d'une notion » et des « applications » de cette notion.

4.3.4 Résolution détaillée d'un exercice ou d'un exemple

À l'issue de la présentation des exercices, le candidat désigne un exercice ou exemple qu'il se propose de résoudre en détail. Insistons, comme pour l'épreuve d'exposé, sur le fait que ce choix revient au candidat et non aux examinateurs, et qu'il constitue un élément de l'évaluation. Au cours de cette phase, tout comme de la précédente, les examinateurs n'interviennent pas et le candidat doit faire preuve d'autonomie.

Le jury a eu le plaisir d'assister à un bon nombre de prestations très honorables et parfois excellentes, reflétant une culture mathématique étendue et une bonne familiarité avec une diversité de techniques. Il convient néanmoins de mettre en avant certaines erreurs ou maladresses à éviter.
Il est très maladroit, et pénalisant, de choisir de développer un premier exercice très élémentaire (la résolution est supposée durer quinze minutes), même si on a donné une liste progressive et substantielle. Par exemple, pour le sujet 310 (Exercices d'algèbre linéaire faisant intervenir les polynômes.) il n'est pas raisonnable de proposer en développement le calcul du polynôme caractéristique d'une matrice d'ordre 3. Il n'est pas prudent non plus de s'engager dans la résolution d'un exercice d'une complexité mal mesurée et qui n'aboutira pas dans le temps imparti. Les exercices requérant de lourds calculs donnent souvent lieu à des présentations décevantes car les candidats ont du mal à en gérer la longueur et la technicité. Il convient, en pareil cas, d'exposer la démarche dans un premier temps puis d'approfondir les points les plus marquants ; le jury demandera, le cas échéant, des détails complémentaires.

On rappelle que les candidats doivent être capables de fournir un énoncé correct des théorèmes qu'ils utilisent lors de la résolution de leurs exercices.
Les candidats doivent aussi s'assurer que les énoncés des exercices qu'ils proposent ne comportent pas d'erreurs (cette situation déstabilise régulièrement des candidats trop confiants dans leurs livres).

4.3.5 Questions du jury

Ces questions peuvent être de plusieurs sortes. Elles permettent souvent de corriger d'éventuels lapsus ou de mettre en évidence une faille dans la solution ou encore de s'assurer que le candidat a réellement saisi les divers aspects de la résolution (en examinant par exemple l'impact d'une modification des hypothèses sur le résultat annoncé). Il est bien souvent demandé au candidat de donner des précisions sur la résolution de l'exercice qu'il a proposé.
Le candidat doit s'attendre aussi à être interrogé, au moins partiellement, sur la résolution de **chacun des exercices** qu'il propose. À défaut d'une solution détaillée, il peut lui être demandé les méthodes utilisées ou les différents enchaînements de la résolution.
Par ailleurs, les examinateurs cherchent à déterminer si les notions apparaissant dans tel ou tel énoncé sont effectivement connues du candidat. En ce sens, un choix d'exercices trop ambitieux risque d'élever le niveau des questions posées. Il n'est pas recommandé d'évoquer des questions à propos desquelles on n'a aucun recul. Il est en revanche attendu une maîtrise du calcul : le jury est surpris du temps qu'il faut à certains candidats pour effectuer des calculs élémentaires.

Pour terminer, soulignons que les questions du jury n'ont en aucun cas pour but de déstabiliser le candidat. Elles visent simplement à cerner au mieux l'étendue de ses connaissances et compétences.

Chapitre 5

Liste des sujets d'oral

Pour la prochaine session, quelques sujets verront leur libellé légèrement modifié. Il s'agit notamment des sujets : 205, 235, 244, 254, 260 et 426.

Deux nouveaux sujets d'exposé sont proposés :
171 : Groupe linéaire $GL(E)$ d'un espace vectoriel de dimension finie E. Sous-groupes. Applications.
172 : Endomorphismes trigonalisables et nilpotents. Applications.

Leçons d'algèbre et géométrie

101 Groupes monogènes, groupes cycliques. Exemples.
102 Permutations d'un ensemble fini, groupe symétrique. Applications.
103 Anneau $\mathbf{Z}/n\mathbf{Z}$. Applications.
104 Nombres premiers. Propriétés et applications.
106 PGCD dans $\mathbf{Z}$ et $\mathbf{K}[X]$ où $\mathbf{K}$ est un corps commutatif, théorème de Bézout. Applications.
107 Dimension d'un espace vectoriel admettant une famille génératrice finie. Rang d'une famille de vecteurs.
109 Formes linéaires, hyperplans, dualité. On se limitera à des espaces vectoriels de dimension finie. Exemples.
110 Polynômes d'endomorphismes en dimension finie. Applications.
112 Changements de bases en algèbre linéaire et en algèbre bilinéaire. Applications.
113 Déterminants. Applications.
114 Opérations élémentaires sur les lignes ou les colonnes d'une matrice. Applications. Aspects algorithmiques.
117 Groupe orthogonal d'un espace vectoriel euclidien de dimension 2, de dimension 3.
119 Utilisation des nombres complexes en géométrie.
120 Endomorphismes symétriques d'un espace vectoriel euclidien. Applications.
121 Réduction et classification des formes quadratiques sur un espace vectoriel réel de dimension finie. Cas d'un espace euclidien. Applications géométriques.
123 Isométries du plan affine euclidien, décomposition canonique. Applications.
125 Isométries de l'espace affine euclidien de dimension 3, décomposition canonique. Applications.
128 Barycentres. Applications.

131 Applications affines en dimension finie. Propriétés et exemples.
137 Droites et cercles dans le plan affine euclidien.
142 Utilisation de groupes en géométrie.
143 Polynômes à une indéterminée à coefficients réels ou complexes.
144 Notion de rang en algèbre linéaire et bilinéaire. Applications.
146 Coniques.
150 Diverses factorisations de matrices. Applications.
151 Réduction d'un endomorphisme d'un espace vectoriel de dimension finie. Applications. (On supposera connues les notions de valeurs propres, vecteurs propres et sous-espace propres).
155 Systèmes d'équations linéaires. Applications.
156 Valeurs propres. Recherche et utilisation.
158 Groupe opérant sur un ensemble. Exemples et applications.
159 Algorithme d'Euclide dans $\mathbf{Z}$ et $\mathbf{K}[X]$ où $\mathbf{K}$ est un corps commutatif. Calcul de PGCD et de coefficients de Bézout. Applications.
163 Endomorphismes diagonalisables. Exemples et applications.
165 Idéaux d'un anneau commutatif. Exemples.
166 Corps des fractions rationnelles à une indéterminée sur un corps commutatif. Applications.
167 Groupe des nombres complexes de module 1. Sous-groupes des racines de l'unité. Applications.
168 Racines d'un polynôme à une indéterminée. Relations coefficients-racines.
169 Structures quotients dans divers domaines de l'algèbre. Applications.
170 Méthodes de chiffrement ou de codage. Illustrations.
171 Groupe linéaire $GL(E)$ d'un espace vectoriel de dimension finie E. Sous-groupes. Applications.
172 Endomorphismes trigonalisables et nilpotents. Applications.

Leçons d'analyse et probabilités

201 Étude de suites numériques définies par différents types de récurrence.
202 Séries à termes réels positifs.
203 Séries à termes réels ou complexes : convergence absolue, semi-convergence. (Les résultats relatifs aux séries à termes réels positifs sont supposés connus).
204 Espaces vectoriels normés de dimension finie, normes usuelles, équivalence des normes. Applications.
205 Projection orthogonale sur un sous-espace de dimension finie d'un espaces préhilbertien. Application à l'approximation des fonctions.
206 Parties compactes de $\mathbf{R}^n$. Fonctions continues sur une telle partie. Exemples et applications.
207 Théorème des valeurs intermédiaires. Applications.
208 Théorèmes de points fixes.
209 Séries de fonctions. Propriétés de la somme, exemples.
210 Séries entières d'une variable réelle ou complexe. Rayon de convergence. Propriétés de la somme. Exemples.
212 Série de Fourier d'une fonction périodique ; propriétés de la somme. Exemples.
213 Exponentielle complexe ; fonctions trigonométriques et hyperboliques, nombre π.
215 Comparaison d'une série et d'une intégrale. Applications.
216 Théorèmes des accroissements finis pour une fonction d'une ou plusieurs variables réelles. Applications.

217 Fonctions convexes d'une variable réelle. Applications.
218 Différentes formules de Taylor pour une fonction d'une variable réelle. Applications.
219 Fonction réciproque d'une fonction définie sur un intervalle. Continuité, dérivabilité. Exemples.
220 Méthodes de calcul approché d'une intégrale. Majoration ou estimation de l'erreur.
221 Intégrale impropre d'une fonction continue sur un intervalle de $\mathbf{R}$ (l'intégration sur un segment étant supposée connue). Exemples.
223 Intégrale d'une fonction dépendant d'un paramètre. Propriétés, exemples et applications.
224 Équations différentielles linéaires d'ordre deux : $x'' + a(t)x' + b(t)x = c(t)$, où a, b, c sont des fonctions continues sur un intervalle de $\mathbf{R}$, à valeurs réelles ou complexes.
225 Systèmes différentiels linéaires du premier ordre à coefficients constants. Exemples.
227 Fonctions de plusieurs variables : dérivées partielles, différentiabilité, fonctions de classe $\mathscr{C}^1$. Exemples.
228 Extremums d'une fonction de plusieurs variables réelles.
229 Suites de variables aléatoires indépendantes de même loi de Bernoulli. Variables aléatoires de loi binomiale et approximations de la loi binomiale.
230 Probabilité conditionnelle et indépendance. Variables aléatoires indépendantes. Covariance. Exemples.
231 Espérance, variance ; loi faible des grands nombres. Applications.
232 Variables aléatoires possédant une densité. Exemples.
235 Exponentielles de matrices : définition, propriétés, applications.
237 Construction de l'intégrale et lien avec les primitives.
241 Diverses notions de convergence en analyse et en probabilités. Exemples et applications. (Les définitions des notions de convergence sont supposées connues).
244 Inégalités en analyse et en probabilités. Par exemple : Cauchy-Schwarz, Markov, Jensen...
249 Loi normale en probabilités et statistiques.
251 Diverses méthodes de résolution approchée d'une équation numérique ou d'une équation différentielle.
254 Méthodes d'approximation du nombre π. Aspects algorithmiques.
256 Vitesse de convergence. Méthodes d'accélération de convergence.
257 Écriture décimale d'un nombre réel ; cas des nombres rationnels, ...
258 Couples de variables aléatoires possédant une densité. Covariance. Exemples d'utilisation.
260 Variables aléatoires discrètes, couples de variables aléatoires discrètes. Covariance. Exemples.
262 Étude métrique des courbes planes.
263 Suites dans un espace vectoriel normé de dimension finie.
264 Fonctions développables en série entière. Exemples et applications. (Les résultats relatifs aux séries entières sont supposés connus).
265 Inversion locale, difféomorphismes. Applications.
266 Applications linéaires continues, normes associées. Exemples.
267 La fonction Gamma.

Exemples et exercices d'algèbre et géométrie

301 Exercices sur les groupes.
302 Exercices faisant intervenir les notions de congruence et de divisibilité dans $\mathbf{Z}$.
304 Exercices faisant intervenir le théorème de Bézout.

305 Exercices illustrant l'utilisation des nombres premiers.
306 Exercices faisant intervenir les notions de PGCD et PPCM.
307 Exercices faisant intervenir des dénombrements.
309 Exercices faisant intervenir des polynômes et fractions rationnelles. On pourra se limiter aux corps de base **R** ou **C**.
310 Exercices d'algèbre linéaire faisant intervenir les polynômes.
311 Exercices illustrant l'utilisation de la notion de rang.
312 Exercices illustrant l'utilisation des matrices inversibles.
313 Exercices illustrant l'utilisation de systèmes d'équations linéaires.
314 Exercices illustrant l'utilisation de déterminants.
315 Exercices illustrant l'utilisation de vecteurs propres et valeurs propres dans des domaines variés.
317 Exercices sur les endomorphismes diagonalisables ou trigonalisables.
319 Exercices faisant intervenir des décompositions de matrices.
321 Exercices faisant intervenir la réduction des matrices symétriques réelles dans des domaines variés.
322 Exercices sur les formes quadratiques.
323 Exercices de géométrie résolus à l'aide des nombres complexes.
325 Exercices faisant intervenir des isométries affines en dimensions 2 et 3.
326 Exercices faisant intervenir la notion de barycentre ou d'application affine.
328 Exemples d'utilisation de transformations en géométrie.
330 Exercices faisant intervenir les angles et les distances en dimensions 2 et 3.
334 Exercices sur les coniques.
339 Exemples d'étude des isométries laissant invariante une partie du plan, une partie de l'espace.
340 Exercices faisant intervenir des groupes en géométrie.
345 Exercices sur les polygones.
346 Exemples de problèmes modélisés par des graphes.
348 Exercices illustrant l'emploi de puissances ou d'exponentielles de matrices.
350 Exercices faisant intervenir des opérations élémentaires sur les lignes ou colonnes d'une matrice. Aspects algorithmiques.
351 Exercices faisant intervenir des polynômes irréductibles.
353 Exercices utilisant la notion d'endomorphisme nilpotent.
354 Exercices sur les cercles et les sphères.
355 Exercices faisant intervenir des automorphismes orthogonaux.
356 Exercices utilisant les permutations d'un ensemble fini.
357 Exercices utilisant le corps $\mathbf{Z}/p\mathbf{Z}$.

Exemples et exercices d'analyse et probabilités

402 Exemples d'étude de suites ou de séries divergentes.
403 Exemples d'étude de suites définies par une relation de récurrence.
404 Exemples d'étude de la convergence de séries numériques.
405 Exemples de calcul exact de la somme d'une série numérique.
407 Exemples d'évaluation asymptotique de restes de séries convergentes, de sommes partielles de séries divergentes.

408 Exemples d'étude de séries réelles ou complexes non absolument convergentes.
409 Exemples d'utilisation de polynômes en analyse.
410 Comparaison, sur des exemples, de divers modes de convergence d'une suite ou d'une série de fonctions.
411 Exemples d'étude de fonctions définies par une série.
412 Exemples de développement d'une fonction en série entière. Applications.
413 Exemples d'applications des séries entières.
414 Exemples de séries de Fourier et de leurs applications.
415 Exemples d'applications du théorème des accroissements finis et de l'inégalité des accroissements finis pour une fonction d'une ou plusieurs variables réelles.
417 Exemples illustrant l'approximation de fonctions numériques.
418 Exemples d'utilisation de développements limités de fonctions d'une ou plusieurs variables.
421 Exemples de calcul exact et de calcul approché de l'intégrale d'une fonction continue sur un segment. Aspects algorithmiques.
422 Exemples d'étude d'intégrales impropres.
423 Exemples d'utilisation des théorèmes de convergence dominée et de convergence monotone.
426 Exemples d'utilisation d'intégrales simples et multiples pour des calculs de longueurs, d'aires, de volumes, ...
427 Exemples d'étude de fonctions définies par une intégrale.
428 Exemples d'étude et de résolution exacte ou approchée d'équations différentielles scalaires.
429 Exemples d'étude et de résolution de systèmes différentiels linéaires.
430 Exemples d'étude et de résolution d'équations différentielles issues de domaines variés (sciences expérimentales ou autres sciences).
431 Exemples de recherche d'extremums d'une fonction numérique d'une ou plusieurs variables réelles.
432 Exemples d'approximations d'un nombre réel. Aspects algorithmiques.
434 Exemples d'utilisation de changement de variable(s) en analyse.
435 Exemples de modélisations de situations réelles en probabilités.
436 Exemples d'applications de l'intégration par parties.
437 Exercices faisant intervenir des variables aléatoires.
438 Exemples de problèmes de dénombrement. Utilisation en probabilités.
439 Exemples d'étude d'applications linéaires continues et de leur norme.
440 Exercices sur les propriétés métriques des courbes planes (longueur, courbure...).
443 Exemples de méthodes et d'algorithmes de résolution approchée d'équations $F(X) = 0$, X désignant une variable réelle ou vectorielle.
444 Exemples de calcul approché de la limite d'une suite, de la somme d'une série. Aspects algorithmiques.
447 Exemples d'équations fonctionnelles.
448 Exemples d'estimation en statistiques : estimation ponctuelle, estimation par intervalles de confiance.
449 Exemples d'équations différentielles non linéaires.
451 Exemples d'applications des transformées de Fourier et de Laplace.
452 Exemples d'applications du théorème des fonctions implicites.
453 Exercices illustrant l'utilisation de la loi binomiale en probabilités et en statistiques.

454 Exemples d'applications de la notion de compacité.
455 Exemples d'étude qualitative d'équations différentielles ou de systèmes différentiels.

Chapitre 6

Bibliothèque de l'agrégation de mathématiques

La bibliothèque est commune avec le concours de l'agrégation externe, excepté pour les livres d'informatique théorique qui ne sont pas repris dans la présente liste. Seuls les livres d'algorithmique présentant un intérêt pour le concours interne ont été maintenus.

AABELSON H. **SUSSMAN G. J.** **SUSSMAN J.**	Structure and interpretation of computer programs	MIT Press ISBN : 9780262010771
AEBISCHER B.	Géométrie	Vuibert ISBN : 9782311002768
AEBISCHER B.	Analyse	Vuibert ISBN : 9782311002751
AHUÉS M. **CHATELIN F.**	Exercices de valeurs propres de matrices	Masson ISBN : 9782225817939
ALBERT L. **Collectif**	Cours et exercices d'informatique	Vuibert ISBN : 9782711786213
ALDON G.	Mathématiques dynamiques	Hachette éducation ISBN : 9782011712424
ALESSANDRI M.	Thèmes de géométrie	Dunod ISBN : 9782100045563
ALLOUCHE J. P. **SHALLIT J.**	Automatic sequences theory, applications, generalizations	Cambridge ISBN : 9780521823326
AMAR E. **MATHERON É.**	Analyse complexe	Cassini ISBN : 9782842250522
ANDLER M. **BLOCH J. D.** **MAILLARD B.**	Exercices corrigés de Mathématiques, Tome 1A - Topologie	Ellipses ISBN : 9782729802002
ANDLER M. **BLOCH J. D.** **MAILLARD B.**	Exercices corrigés de Mathématiques, Tome 1B - Fonctions numériques	Ellipses ISBN : 9782729802096
ANDLER M. **BLOCH J. D.** **MAILLARD B.**	Exercices corrigés de Mathématiques, Tome 2 - Suites et séries numériques	Ellipses ISBN : 9782729886168

ANDLER M. **BLOCH J. D.** **MAILLARD B.**	Exercices corrigés de Mathématiques, Tome 3 - Analyse fonctionnelle	Ellipses ISBN : 9782729888470
ANDLER M. **BLOCH J. D.** **MAILLARD B.**	Exercices corrigés de Mathématiques, Tome 5 - Algèbre générale, polynômes	Ellipses ISBN : 9782729802045
ANDLER M. **BLOCH J. D.** **MAILLARD B.**	Exercices corrigés de Mathématiques, Tome 6 - Algèbre linéaire, première partie	Ellipses ISBN : 9782729802053
ANDLER M. **BLOCH J. D.** **MAILLARD B.**	Exercices corrigés de Mathématiques, Tome 7 - Algèbre linéaire, deuxième partie	Ellipses ISBN : 9782729802061
ANDREWS G.	Number Theory	Dover ISBN : 9780486682525
APPEL A.W.	Modern compiler implementation, in C	Cambrigde ISBN : 9780521607650
APPEL A.W.	Modern compiler implementation, in Java	Cambrigde ISBN : 9780521820608
APPEL A.W.	Modern compiler implementation, in ML	Cambrigde ISBN : 9780521607643
ARIBAUD F. **VAUTHIER J.**	Mathématiques. Première année de DEUG	ESKA ISBN : 9782869110103
ARNAUDIES J-M. **BERTIN J.**	Groupes, Algèbres et Géométrie, Tome I	Ellipses ISBN : 9782729843083
ARNAUDIES J-M. **BERTIN J.**	Groupes, Algèbres et Géométrie, Tome II	Ellipses ISBN : 9782729845940
ARNAUDIES J-M. **DELEZOIDE P.** **FRAYSSE H.**	Exercices résolus d'algèbre bilinéaire et géométrie du cours de Mathématiques tome 4	Dunod ISBN : 9782100031023
ARNAUDIES J-M. **DELEZOIDE P.** **FRAYSSE H.**	Exercices résolus d'analyse tome 2	Dunod ISBN : 9782100014712
ARNAUDIES J-M. **FRAYSSE H.**	Cours de Mathématiques, 1. Algèbre	Dunod ISBN : 9782040164508
ARNAUDIES J-M. **FRAYSSE H.**	Cours de Mathématiques, 2. Analyse	Dunod ISBN : 9782040165017
ARNAUDIES J-M. **FRAYSSE H.**	Cours de Mathématiques, 3. Compléments d'analyse	Dunod ISBN : 9782040165253
ARNAUDIES J-M. **FRAYSSE H.**	Cours de Mathématiques, 4. Algèbre bilinéaire et géométrie	Dunod ISBN : 9782040165505
ARNOLD A. **GUESSARIAN I.**	Mathématiques pour l'informatique	Ediscience ISBN : 9782100492305
ARNOLD V.	Chapitre supplémentaire de la théorie des équations différentielles ordinaires	MIR
ARNOLD V.	Équations différentielles ordinaires	MIR
ARNOLD V.	Lectures on partial differential equations	Springer Univsersitext ISBN : 9783540404484
ARTIN E.	Algèbre géométrique	Gauthier-Villars

ARTIN E.	Algèbre géométrique	GABAY ISBN : 9782876470896
ARTIN M.	Algebra	PRENTICE HALL ISBN : 9780130047635
AUBIN J.P.	Analyse fonctionnelle appliquée, Tome 2	PUF ISBN : 9782130392652
AUDIN M.	Géométrie de la licence à l'agrégation	BELIN ISBN : 9782701121307
AUTEBERT J. M.	Calculabilité et décidabilité	MASSON ISBN : 9782225826320
AUTEBERT J. M.	Théorie des langages et des automates	MASSON ISBN : 9782225840012
AVEZ A.	Calcul différentiel	MASSON ISBN : 9782225790799
BAASE S. **VAN GELDER A.**	Computer algorithms, Introduction to design & analysis	ADDISON WESLEY ISBN : 9780201612448
BADOUEL E. **BOUCHERON S.** **DICKY A.** **PETIT A.** **SANTHA M.** **WEIL P.** **ZEITOUN M.**	Problèmes d'informatique fondamentale	SPRINGER ISBN : 9783540423416
BAJARD J.-C.	Exercices d'algorithmique	INTERNATIONAL THOMSON ISBN : 9782841801053
BAKHVALOV N.	Méthodes numériques	MIR
BARANGER J.	Analyse numérique	HERMANN ISBN : 9782705660932
BASILI B. **PESKINE C.**	Algèbre	DIDEROT, ÉDITEUR ARTS ET SCIENCES ISBN : 9782841340002
BASS J.	Cours de Mathématiques, Tome 1	MASSON
BASS J.	Cours de Mathématiques, Tome 2	MASSON
BAUER F. L.	Decrypted secrets. Methods and maxims of cryptology	SPRINGER ISBN : 9783540426745
BENDER C. **ORSZAG S.**	Advanced mathematical methods for scientists and engineers	MC GRAW HILL ISBN : 9780070044524
BENIDIR M. **BARRET M.**	Stabilité des filtres et des systèmes linéaires	DUNOD ISBN : 9782100044320

BENOIST J. **BOUALEM H.** **BROUZET R.** **CABOT A.** **CHABANOL M.L.** **FEJOZ J.** **LAZZARINI L.,MANSUY R.** **MESNAGER L.** **MESNAGER s.** **PENNEQUIN D. YGER A.** **ZARRABI M.**	Mathématiques L2. Cours complet avec 700 tests et exercices corrigés	Pearson Education ISBN : 9782744072253
BERCU B **CHAFAI D.**	Modélisation stochastique et simulation	Dunod ISBN : 9782100513796
BERGER M.	Géométrie tome 2	Nathan ISBN : 9782091917313
BERGER M.	Géométrie vivante	Cassini ISBN : 9782842250355
BERGER M.	Géométrie, 1. Action de groupes, espaces affines et projectifs	Cédic/Nathan ISBN : 9782712407016
BERGER M.	Géométrie, 2. Espaces euclidiens, triangles, cercles et sphères	Cédic/Nathan ISBN : 9782712407014
BERGER M.	Géométrie, 3. Convexes et polytopes, polyèdres réguliers, aires et volumes	Cédic/Nathan ISBN : 9782712407032
BERGER M.	Géométrie, 4. Formes quadratiques, quadriques et coniques	Cédic/Nathan ISBN : 9782712407040
BERGER M.	Géométrie, 5. La sphère pour elle-même, géométrie hyperbolique, l'espace des sphères	Cédic/Nathan ISBN : 9782712407059
BERGER M.	Géométrie, Index	Cédic/Nathan ISBN : 9782712407067
BERGER M. **BERRY J-P.** **PANSU P.** **SAINT RAYMOND X.**	Problèmes de géométrie commentés et rédigés	Cédic/Nathan ISBN : 9782712407202
BERGER M. **GOSTIAUX B.**	Géométrie différentielle	Armand, Colin
BERLINE N. **SABBAH C.**	Groupes finis, Journées mathématiques X-UPS 2000	Editions de l'X ISBN : 9782730207515
BHATIA R.	Matrix analysis	Springer ISBN : 9780387948461
BICKEL P.J. **DOKSUM K.A.**	Mathematical statistics	Prentice Hall ISBN : 9780135641470
BIGGS NORMAN L.	Discrete mathematics	Oxford Science, Publications ISBN : 9780198534273
BLANCHARD A.	Les corps non commutatifs	PUF ISBN : 9782130322535

BOAS R.	A primer of real functions	Mathematical association of America ISBN : 9780883850222
BOISSONNAT J.-D. YVINEC M.	Géométrie algorithmique	Ediscience ISBN : 9782840741121
BON J.L.	Fiabilité des systèmes	Masson ISBN : 9782225849923
BONNANS J.F. GILBERT J.C. LEMARECHAL C. SAGASTIZABAL C.	Optimisation numérique	Springer ISBN : 9783540631835
BOUALEM H. BROUZET R. ELSNER B. KACZMAREK L. PENNEQUIN D.	Mathématiques L1. Cours complet avec 1000 tests et exercices corrigés	Pearson Education ISBN : 9782744072581
BOURBAKI N.	Éléments de Mathématique, Fascicule XIII Intégration, chapitres I à IV	Hermann
BOURBAKI N.	Éléments de Mathématique, Fonctions d'une variable réelle, chapitres I à III	Hermann
BOURBAKI N.	Éléments de Mathématique, Fonctions d'une variable réelle, chapitres I à VII	Hermann
BOURBAKI N.	Éléments de Mathématique, Topologie générale, chapitres V à X	Hermann
BOURGADE P.	Olympiades internationales de mathématiques	Cassini ISBN : 9782842250874
BOUVIER A. RICHARD D.	Groupes	Hermann ISBN : 9782705613838
BREMAUD P.	Introduction aux probabilités et aux chaînes de Markov	Springer ISBN : 9783540314219
BREZIS H.	Analyse fonctionnelle, théorie et applications	Masson ISBN : 9782225771989
BRIANE M. PAGES G.	Théorie de l'intégration, Cours et exercices, 3ème édition	Vuibert ISBN : 9782711771264
BROUSSE P.	Mécanique MP - PC.- Spéciales A. A'. B. B'.	Armand, Colin
BRUCE J.W. GIBLIN P.J. RIPPON P.J.	Microcomputers and Mathematics	Cambridge ISBN : 9780521312387
CABANE R. LEBOEUF C.	Algèbre linéaire, 1. Espaces vectoriels , Polynômes	Ellipses ISBN : 9782729887049
CABANE R. LEBOEUF C.	Algèbre linéaire, 2. Matrices et réduction	Ellipses ISBN : 2729890297
CABANNES H.	Cours de Mécanique générale	Dunod
CALAIS J.	Éléments de théorie des anneaux vol I	PUF ISBN : 9782130523529
CALAIS J.	Éléments de théorie des groupes	PUF ISBN : 9782130384656

CANDELPERGHER B.	Calcul intégral	Cassini ISBN : 9782842250539
CARREGA J.C.	Théorie des corps	Hermann ISBN : 9782705614492
CARTAN H.	Calcul différentiel	Hermann ISBN : 9782705658793
CARTAN H.	Formes différentielles	Hermann ISBN : 9782705667023
CARTAN H.	Théorie élémentaire des fonctions analytiques	Hermann ISBN : 9782705652159
CARTAN H.	Cours de calcul différentiel	0
CARTON O.	Langages formels. Calculabilité et complexité	Vuibert ISBN : 9782711720774
CASTI J.	Reality rules tome I	Wiley ISBN : 9780471570219
CASTI J.	Reality rules tome II	Wiley ISBN : 9780471577980
CASTLEMAN K.R.	Digital image processing	Prentice Hall ISBN : 9780132114677
CHABAT B.	Introduction à l'analyse complexe tome I	MIR ISBN : 9785030016287
CHAFAI D.	Probabilités. Préparation à l'agrégation interne	E-livre ISBN : 9782954171005
CHAMBERT-LOIR A.	Algèbre corporelle	Editions de l'X ISBN : 9782730212175
CHAMBERT-LOIR A. **FERMIGER S.**	Exercices de mathématiques pour l'agrégation, Analyse 2	Masson ISBN : 9782225848858
CHAMBERT-LOIR A. **FERMIGER S.**	Exercices de mathématiques pour l'agrégation, Analyse 3	Masson ISBN : 9782225853852
CHAMBERT-LOIR A. **FERMIGER S.** **MAILLOT V.**	Exercices de mathématiques pour l'agrégation, Analyse 1 (seconde édition revue et corrigée)	Masson ISBN : 9782225855160
CHARPENTIER E. **NILKOLSKI N.**	Leçons de mathématiques d'aujourd'hui	Cassini ISBN : 9782842250072
CHARPENTIER E. **NILKOLSKI N.**	Leçons de mathématiques d'aujourd'hui vol. 1	Cassini ISBN : 9782842250706
CHARPENTIER E. **NILKOLSKI N.**	Leçons de mathématiques d'aujourd'hui vol. 2	Cassini ISBN : 9782842250583
CHARPENTIER E. **NILKOLSKI N.**	Leçons de mathématiques d'aujourd'hui vol. 3	Cassini ISBN : 9782842250829
CHARPENTIER E. **NILKOLSKI N.**	Leçons de mathématiques d'aujourd'hui vol. 3	Cassini ISBN : 9782842250829
CHARPENTIER E. **NILKOLSKI N.**	Leçons de mathématiques d'aujourd'hui vol. 4	Cassini ISBN : 9782842251147
CHATELIN F.	Valeurs propres de matrices	Masson ISBN : 9782225809682
CHILDS L.	A concrete introduction to Higher Algebra	Springer Verlag

CHOIMET D. **QUEFFELEC H.**	Analyse mathématique	Calvage et Mounet ISBN : 9782916352107
CHOQUET G.	Cours d'analyse Tome II : Topologie	Masson ISBN : 9782225599726
CHOQUET G.	L'enseignement de la géométrie	Hermann
CHRISTOL G. **PILIBOSSIAN P.** **YAMMINE S.**	Algèbre 1	Ellipses ISBN : 9782729845087
CHRISTOL G. **PILIBOSSIAN P.** **YAMMINE S.**	Algèbre 2	Ellipses ISBN : 9782729896898
CLAESSENS **L.**	Mes notes de mathématiques	E-livre ISBN : 9782954093611
COGIS O. **ROBERT C.**	Au-delà des ponts de Königsberg. Théorie des graphes. Problèmes, théorie, algorithmes	Vuibert ISBN : 9782711753215
COHN P.M.	Algebra Volume 1	John Wiley ISBN : 9780471101699
COLLET H. **GIRARD B.** **PERRIER C.**	Mathématiques BTS industriel	Nathan ISBN : 9782091790886
COLLET P.	Modeling binary data	Chapman and Hall ISBN : 9780412388002
COLMEZ **P.**	Éléments d'analyse et d'algèbre (et de théorie des nombres)	Editions de l'X ISBN : 9782730215879
COMBROUZE A.	Probabilités et statistiques	PUF ISBN : 9782130460299
CORI R. **LASCAR D.**	Logique mathématique, 1. Calcul propositionnel, algèbre de Boole, calcul des prédicats	Dunod ISBN : 9782100054527
CORI R. **LASCAR D.**	Logique mathématique, 2. Fonctions récursives, théorème de Gödel, théorie des ensembles, théorie des modèles	Dunod ISBN : 9782100054534
CORMEN T. H. **LEISERSON C. E.** **RIVEST R. L.** **STEIN C.**	Introduction à l'algorithmique	Dunod ISBN : 9782100039227
COTRELL M. **GENON-CATALOT V.** **DUHAMEL C.** **MEYRE T.**	Exercices de probabilités	Cassini ISBN : 9782842250683
COURANT R. **HILBERT D.**	Methods of Mathematical Physics, Volume 1	John Wiley ISBN : 9780471504474
COURANT R. **HILBERT D.**	Methods of Mathematical Physics, Volume 2	John Wiley ISBN : 9780471504399
COUSINEAU G. **MAUNY M.**	Approche fonctionnelle de la programmation	Ediscience ISBN : 9782840741145
COX D.	Galois theory	Wiley ISBN : 9780471434191
COXETER H.S.M.	Introduction to Geometry	John Wiley ISBN : 9780471504580

CVITANOVIC P.	Universality in Chaos	Institute of Physics, Publishing ISBN : 9780852742600
DACUNHA-CASTELLE D. **DUFLO M.**	Exercices de Probabilités et Statistiques, 1. Problèmes à temps fixe	Masson ISBN : 9872225779023
DACUNHA-CASTELLE D. **DUFLO M.**	Probabilités et Statistiques, 1. Problèmes à temps fixe	Masson ISBN : 9872225745476
DACUNHA-CASTELLE D. **REVUZ D.** **SCHREIBER M.**	Recueil de problèmes de calcul des probabilités	Masson
DAMPHOUSSE P.	Petite introduction à l'algorithmique	Ellipses ISBN : 9782729823009
DANTZER J.-F.	Mathématiques pour l'agrégation interne, Analyse et probabilités. Cours et exercices corrigés	Vuibert ISBN : 9782711740260
DAVID R. **NOUR K.** **RAFFALI C.**	Introduction à la logique, Théorie de la démonstration	Dunod ISBN : 9782100067961
DE KONNINCK J.M. **MERCIER A.**	Introduction à la théorie des nombres	Modulo
DE SEGUINS PAZZIS C.	Invitation aux formes quadratiques	Calvage et Mounet ISBN : 9782916352190
DEHEUVELS P.	L'intégrale	PUF
DEHEUVELS P.	L'intégrale	Que-sais-je ? PUF
DEHEUVELS R.	Formes quadratiques et groupes classiques	PUF
DEHORNOY P.	Complexité et décidabilité	Springer ISBN : 9782287004165
DEHORNOY P.	Mathématiques de l'informatique	Dunod ISBN : 9782100044467
DELTHEIL R. **CAIRE D.**	Géométrie et compléments	Jacques Gabay ISBN : 9782876470500
DEMAILLY J.P.	Analyse numérique et équations différentielles	PU Grenoble ISBN : 9782706104213
DEMAZURE M.	Catastrophes et bifurcations	Ellipses ISBN : 9782729886469
DEMAZURE M.	Cours d'Algèbre	Cassini ISBN : 9782842251277
DEMAZURE M.	Cours d'algèbre : primalité, divisibilité, codes	Cassini ISBN : 9782842251277
DEMBO A. **ZEITOUNI O.**	Large deviations techniques and applications	Springer ISBN : 9780387984063
DESCHAMPS **WARUSFEL** **MOULIN** **RUAUD** **MIQUEL** **SIFRE**	Mathématiques, cours et exercices corrigés, 1ère année MPSI, PCSI, PTSI	Dunod ISBN : 9782100039319

DESCHAMPS WARUSFEL MOULIN RUAUD MIQUEL SIFRE	Mathématiques, cours et exercices corrigés, 2ème année MP, PC, PSI	Dunod ISBN : 9782100054121
DESCOMBES R.	Éléments de théorie des nombres	PUF ISBN : 9782130392149
DEVANZ C. ELHODAIBI M.	Exercices corrigés de Mathématiques posés à l'oral des Ensi, Tome 2	Ellipses
DI MENZA L.	Analyse numérique des équations aux dérivées partielles	Cassini ISBN : 9782842250737
DIEUDONNÉ J.	Algèbre linéaire et géométrie élémentaire	Hermann ISBN : 9782705655006
DIEUDONNÉ J.	Calcul infinitésimal	Hermann
DIEUDONNÉ J.	Éléments d'Analyse., Éléments d'Analyse Tome 2	Gauthier-Villars ISBN : 9782876472120
DIEUDONNÉ J.	Éléments d'Analyse., Fondements de l'analyse moderne	Gauthier-Villars ISBN : 9782876472112
DIEUDONNÉ J.	Sur les groupes classiques	Hermann ISBN : 9782705610401
DIXMIER J.	Cours de Mathématiques du premier cycle, Deuxième année	Gauthier-Villars ISBN : 9782040157159
DIXMIER J.	Cours de Mathématiques du premier cycle, Première année	Gauthier-Villars ISBN : 9782100057702
DOWEK G. LEVY J.-J.	Introduction à la théorie des langages de programmation	Editions de l'X ISBN : 9782730213332
DRAPER N.R. SMITH H.	Applied regression analysis	Wiley ISBN : 9780471170822
DUBERTRET G.	Initiation à la cryptographie	Vuibert ISBN : 9782711770878
DUBUC S.	Géométrie plane	PUF ISBN : 9782130316688
DUGAC P.	Histoire de l'analyse., Autour de la notion de limite et de ses voisinages	Vuibert ISBN : 9782711753116
DYM H. Mac KEAN H.P.	Fourier series and integrals	Academics Press ISBN : 9870122264519
EBBINGHAUS HERMES HIRZEBRUCH KOECHER LAMOTKE MAINZER NEUKIRSCH PRESTEL REMMERT	Les Nombres	Vuibert ISBN : 9782711789016
EIDEN J.D.	Géométrie analytique classique	Calvage et Mounet ISBN : 9782916352084

EL KACIMI ALAOUI A. **QUEFFÉLEC H.** **SACRÉ C.** **VASSALLO V.**	Quelques aspects des mathématiques actuelles	Ellipses ISBN : 9782729868352
ENGEL A.	Solutions d'expert vol. 1	Cassini ISBN : 9782842250515
ENGEL A.	Solutions d'expert vol. 2	Cassini ISBN : 9782842250553
EPISTEMON L. **(OVAERT J.L.** **VERLEY J.L.)**	Exercices et problèmes, Algèbre	Cédic/Nathan
EPISTEMON L. **(OVAERT J.L.** **VERLEY J.L.)**	Exercices et problèmes, Analyse. Volume 1	Cédic/Nathan
EXBRAYAT J.M. **MAZET P.**	Notions modernes de mathématiques, Algèbre 1 : Notions fondamentales de la théorie des ensembles	Hatier
EXBRAYAT J.M. **MAZET P.**	Notions modernes de mathématiques, Analyse 1 : Construction des espaces fondamentaux de l'analyse	Hatier
EXBRAYAT J.M. **MAZET P.**	Notions modernes de mathématiques, Analyse 2 : Éléments de topologie générale	Hatier
FADDEEV D. **SOMINSKI I.**	Recueil d'exercices d'Algèbre Supérieure	MIR
FAIRBANK X. **BEEF C.**	POX - Exercices posés au petit oral de l'X	Ellipses
FARAUT J.	Analyse sur les groupes de Lie	Calvage et Mounet ISBN : 9782916352008
FARAUT J. **KHALILI E.**	Arithmétique, Cours, Exercices et Travaux Pratiques sur Micro-Ordinateur	Ellipses ISBN : 9872729890122
FELLER **W.**	An introduction to Probability theory & its applications, Volume 1	Wiley
FELLER **W.**	An introduction to Probability theory & its applications, Volume 2	Wiley
FERRIER J.P.	Mathématiques pour la licence	Masson ISBN : 9782225804182
FLORY G.	Topologie, analyse exercices tome 1	Vuibert ISBN : 9782711721467
FLORY G.	Topologie, analyse exercices tome 2	Vuibert
FLORY G.	Topologie, analyse exercices tome 3	Vuibert
FLORY G.	Topologie, analyse exercices tome 4	Vuibert
FONTANEZ C. **RANDE B.**	Les clés pour les Mines	Calvage et Mounet ISBN : 9782916352176
FRANCHINI J. **JACQUENS J-C.**	Mathématiques Spéciales, Algèbre	Ellipses ISBN : 9782729856571
FRANCINOU S. **GIANELLA H.**	Exercices de Mathématiques pour lagrégation Algèbre 1	Masson ISBN : 9782225843662

FRANCINOU S. **GIANELLA H.** **NICOLAS S.**	Exercices de mathématiques, Oraux X-ens Algèbre 1	Cassini ISBN : 9782842250300
FRANCINOU S. **GIANELLA H.** **NICOLAS S.**	Exercices de mathématiques, Oraux X-ens Algèbre 1 (seconde édition)	Cassini ISBN : 9782842251321
FRANCINOU S. **GIANELLA H.** **NICOLAS S.**	Exercices de mathématiques, Oraux X-ens Algèbre 2	Cassini ISBN : 9782842251420
FRANCINOU S. **GIANELLA H.** **NICOLAS S.**	Exercices de mathématiques, Oraux X-ens Algèbre 3	Cassini ISBN : 9782842250928
FRANCINOU S. **GIANELLA H.** **NICOLAS S.**	Exercices de mathématiques, Oraux X-ens Analyse 1	Cassini ISBN : 9782842251352
FRANCINOU S. **GIANELLA H.** **NICOLAS S.**	Exercices de mathématiques, Oraux X-ens Analyse 2	Cassini ISBN : 9782842251413
FRANCINOU S. **GIANELLA H.** **NICOLAS S.**	Exercices de mathématiques, Oraux X-ens Analyse 3	Cassini ISBN : 9782842250935
FRENKEL J.	Géométrie pour l'élève-professeur	Hermann
FRESNEL J.	Géométrie	IREM de Bordeaux
FRESNEL J.	Géométrie algébrique	UFR Maths Bordeaux
FRESNEL J.	Méthodes modernes en géométrie	Hermann ISBN : 9782705614379
FRESNEL J. **MATIGNON M.**	Algèbre et Géométrie	Hermann ISBN : 9782705680701
FUHRMANN P.	A polynomial approach to linear algebra	Springer ISBN : 9780387946436
FULTON W.	Algebraic Topology	Springer ISBN : 9780387943275
GABRIEL P.	Matrices, géométrie, algèbre linéaire	Cassini ISBN : 9782842250188
GANTMACHER F.R.	Théorie des matrices, Tome 1	Dunod
GANTMACHER F.R.	Théorie des matrices, Tome 2	Dunod
GAREY M. **JOHNSON D.S.**	Computers and Intractability	Freeman and Co ISBN : 9780716710455
GARLING D.J.H.	Inequalities	Cambridge ISBN : 9780521699730
GATHEN J. **GERHARD J.**	Modern Computer algebra	Cambridge ISBN : 9780521826464
GENET J.	Mesure et intégration. Théorie élémentaire. Cours et exercices résolus	Vuibert
GHIDAGLIA J.M.	Petits problèmes d'analyse	Springer ISBN : 9783540640745
GINDIKIN S.	Histoires de mathématiciens et de physiciens	Cassini ISBN : 9782842250232

GOBLOT R.	Algèbre commutative	Masson ISBN : 9782225853081
GOBLOT R.	Thèmes de géométrie	Masson ISBN : 9782225831492
GODEMENT R.	Analyse mathématique 1	Springer ISBN : 9783540632122
GODEMENT R.	Analyse mathématique 2	Springer ISBN : 9783540634140
GODEMENT R.	Analyse mathématique 3	Springer ISBN : 9783540661429
GODEMENT R.	Cours d'Algèbre	Hermann
GOLUB G.H. **VAN LOAN C.F.**	Matrix computations	Wiley ISBN : 9780801854149
GONNORD S. **TOSEL N.**	Thèmes d'Analyse pour l'agrégation, Topologie et Analyse fonctionnelle	Ellipses ISBN : 9782729896942
GOSTIAUX B.	Cours de mathématiques spéciales, Tome 1 - Algèbre	PUF ISBN : 9782130458357
GOSTIAUX B.	Cours de mathématiques spéciales, Tome 2 - Topologie et analyse réelle	PUF ISBN : 9782130458364
GOSTIAUX B.	Cours de mathématiques spéciales, Tome 3 - Analyse fonctionnelle et calcul différentiel	PUF ISBN : 9782130458494
GOSTIAUX B.	Cours de mathématiques spéciales, Tome 4 - Géométrie affine et métrique	PUF ISBN : 9782130470274
GOSTIAUX B.	Cours de mathématiques spéciales, Tome 5 - Géométrie : arcs et nappes	PUF ISBN : 9782130471318
GOURDON X.	Les maths en tête, mathématiques pour M', Algèbre	Ellipses ISBN : 9782729894320
GOURDON X.	Les maths en tête, mathématiques pour M', Analyse	Ellipses ISBN : 9782729844493
GRAHAM **KNUTH**	Concrete mathematics	Addison Wesley ISBN : 9780201558029
GRAMAIN A.	Géométrie élémentaire	Hermann ISBN : 9782705663339
GRANJON Y.	Informatique, Algorithmes en Pascal et en langage C	Dunod ISBN : 9782100485284
GREUB W.	Linear Algebra	Springer ISBN : 9780387901107
GRIMMET G. **WELSH D.**	Probability (an introduction)	Oxford ISBN : 9780198532644
GUJARATI D. N.	Basic Econometrics	Wiley ISBN : 9780071139649
GUSFIELD D.	Algorithms on strings, trees and sequences	Cambridge ISBN : 9780521585194
HABSIEGER L. **MARTEL V.**	Exercices corrigés posés à l'oral des ENSI Tome 1 Analyse	Ellipses
HAMMAD P.	Cours de probabilités	Cujas

HAMMAD P. **TARANCO A.**	Exercices de probabilités	Cujas ISBN : 9872254850707
HAMMER R. **HOCKS M.** **KULISH U.** **RATZ D.**	C++ toolbox for verified computing	Springer ISBN : 9783540591108
HARDY G.H. **WRIGH E.M.**	An introduction to the theory of numbers	Oxford
HAREL D. **FELDMAN Y.**	Algorithmics. The spirit of computing	Addison Wesley ISBN : 9780321117847
HENNEQUIN P.L. **TORTRAT A.**	Théorie des probabilités et quelques applications	Masson
HENRICI P.	Applied and Computational Complex Analysis, Volume 1	Wiley-Interscience
HENRICI P.	Applied and Computational Complex Analysis, Volume 2	Wiley-Interscience
HENRICI P.	Applied and Computational Complex Analysis, Volume 3	Wiley-Interscience
HERVE M.	Les fonctions analytiques	PUF
HINDRY M.	Arithmétique	Calvage et Mounet ISBN : 9782916352046
HIRSCH F. **LACOMBE G.**	Éléments d'analyse fonctionnelle	Masson ISBN : 9782225855733
HOCHARD M.	Algèbre, analyse, géométrie	Vuibert ISBN : 9782711771844
HOPCROFT J.E. **MOTWANI R.** **ULLMAN J. D.**	Introduction to automata theory, Languages and Computation	Addison Wesley ISBN : 9780321210296
HOUZEL C.	Analyse mathématique : cours et exercices	Belin
INGRAO B.	Coniques projectives, affines et métriques	Calvage et Mounet ISBN : 9782916352121
IRELAND K. **ROSEN M.**	A Classical Introduction to Modern Numbers Theory	Springer Verlag ISBN : 9780387906258
ISAAC R.	Une initiation aux probabilités (Trad. R. Mansuy)	Vuibert-Springer
ITARD J.	Les nombres premiers	Que sais-je ? PUF
JACOBSON N.	Basic Algebra, Tome I	Freeman and Co
JACOBSON N.	Basic Algebra, Tome II	Freeman and Co
KAHANE J.P. **LEMARIE-RIEUSSET P.-G.**	Séries de Fourier et ondelettes	Cassini ISBN : 9782842250010
KERBRAT Y. **BRAEMER J-M.**	Géométrie des courbes et des surfaces	Hermann
KERNIGHAN B. **RITCHIE D.**	Le langage C	Dunod ISBN : 9782100487349
KNUTH D.E.	The art of computer programming, Volume 1 : Fundamental algorithms	Addison-Wesley ISBN : 9780201896831

KNUTH D.E.	The art of computer programming, Volume 2 : Seminumerical algorithms	ADDISON-WESLEY ISBN : 9780201896842
KNUTH D.E.	The art of computer programming, Volume 3 : Sorting and Searching	ADDISON-WESLEY ISBN : 9780201896850
KOBLITZ N.	A course in number theory and cryptography	SPRINGER ISBN : 9780387942933
KOLMOGOROV A. **FOMINE S.**	Éléments de la théorie des fonctions et de l'analyse fonctionnelle	ELLIPSES ISBN : 9696748024722
KÖRNER T.W.	Exercises for Fourier analysis	CAMBRIDGE ISBN : 9780521438490
KÖRNER T.W.	Fourier analysis	CAMBRIDGE ISBN : 9780521389914
KREE P.	Introduction aux Mathématiques et à leurs applications fondamentales M.P.2	DUNOD
KRIVINE H.	Exercices de mathématiques pour physiciens	CASSINI ISBN : 9782842250379
KRIVINE J.L.	Théorie axiomatique des ensembles	PUF
KRIVINE J.L.	Théorie des ensembles	CASSINI ISBN : 9782842250140
KUNG J.	Combinatorics	CAMBRIDGE ISBN : 9780521737944
LAAMRI EL HAJ	Mesures, intégration et transformée de Fourier, des fonctions	DUNOD ISBN : 9782100057009
LACOMME P. **PRINS C.** **SEVAUX M.**	Algorithmes de graphes	EYROLLES ISBN : 9782212113853
LAFONTAINE J.	Introduction aux variétés différentielles	PUF ISBN : 9782706106545
LALEMENT R.	Logique, réduction, résolution	MASSON ISBN : 9782225821042
LANG S.	Algebra	ADDISON-WESLEY
LANG S.	Algèbre linéaire, Tome 1	INTEREDITIONS ISBN : 9872729600011
LANG S.	Algèbre linéaire, Tome 2	INTEREDITIONS ISBN : 9872729600028
LANG S.	Linear Algebra	ADDISON-WESLEY
LAROCHE F.	Escapades arithmétiques	ELLIPSES ISBN : 9782729860097
LASCAR D.	La théorie des modèles en peu de maux	CASSINI ISBN : 9782842251376
LAVILLE G.	Courbes et surfaces	ELLIPSES ISBN : 9782729818562
LAVILLE G.	Géométrie pour le CAPES et l'Agrégation	ELLIPSES ISBN : 9782729878429
LAX P. D.	Functional analysis	WILEY ISBN : 9780471556046
LAX P. D.	Linear Algebra	WILEY

LE BRIS G.	Maple Sugar : Initiation progressive à Maple	Cassini ISBN : 9782842250195
LEBOEUF C. GUEGAND J.,ROQUE J.-L. LANDRY P.	Exercices corrigés de probabilités	Ellipses ISBN : 2729887296
LEBORGNE D.	Calcul différentiel et géométrie	PUF
LEBOSSÉ C. HÉMERY C.	Géométrie. Classe de Mathématiques	Jacques Gabay
LEHMANN D. SACRE C.	Géométrie et topologie des surfaces	PUF
LEHNING H.	Mathématiques supérieures et spéciales, Tome 1 : Topologie	Masson ISBN : 9872225806689
LEHNING H.	Mathématiques supérieures et spéciales, Tome 3 : Intégration et sommation	Masson ISBN : 9782225806797
LEHNING H.	Mathématiques supérieures et spéciales, Tome 4 : Analyse en dimension finie	Masson ISBN : 9782225808784
LEHNING H.	Mathématiques supérieures et spéciales, Tome 5 : Analyse fonctionnelle	Masson ISBN : 9782225812262
LEHNING H. JAKUBOWICZ D.	Mathématiques supérieures et spéciales, Tome 2 : Dérivation	Masson ISBN : 9782225808760
LEICHTNAM E. SCHAUER X.	Exercices corrigés de mathématiques posés aux oraux X-ENS, Tome 1 - Algèbre 1	Ellipses ISBN : 9782729888330
LEICHTNAM E. SCHAUER X.	Exercices corrigés de mathématiques posés aux oraux X-ENS, Tome 2 - Algèbre et géométrie	Ellipses ISBN : 9782729888349
LEICHTNAM E. SCHAUER X.	Exercices corrigés de mathématiques posés aux oraux X-ENS, Tome 3 - Analyse 1	Ellipses ISBN : 9782729801531
LEICHTNAM E. SCHAUER X.	Exercices corrigés de mathématiques posés aux oraux X-ENS, Tome 4 - Analyse 2	Ellipses ISBN : 9782729888357
LELONG-FERRAND J.	Géométrie différentielle	Masson
LELONG-FERRAND J.	Les fondements de la géométrie	PUF
LELONG-FERRAND J. ARNAUDIES J.M.	Cours de Mathématiques, Tome 1 pour A-A' : Algèbre	Dunod
LELONG-FERRAND J. ARNAUDIES J.M.	Cours de Mathématiques, Tome 1 pour M-M' : Algèbre	Dunod ISBN : 9782040070748
LELONG-FERRAND J. ARNAUDIES J.M.	Cours de Mathématiques, Tome 2 : Analyse	Dunod ISBN : 9782040071356
LELONG-FERRAND J. ARNAUDIES J.M.	Cours de Mathématiques, Tome 3 : Géométrie et cinématique	Dunod
LELONG-FERRAND J. ARNAUDIES J.M.	Cours de Mathématiques, Tome 4 : Équations différentielles, intégrales multiples	Dunod ISBN : 9782040026066
LESIEUR L. MEYER Y. JOULAIN C. LEFEBVRE J.	Algèbre linéaire, géométrie	Armand Colin ISBN : 9782200210397

LION G.	Algèbre pour la licence, Cours et exercices (2ème édition)	Vuibert ISBN : 9782711789603
LIRET **F.**	Maths en pratique à l'usage des étudiants	Dunod ISBN : 9782100496297
LOTHAIRE M.	Algebraic combinatorics on words	Cambridge ISBN : 9780521812207
MAC LANE S. **BIRKHOFF G.**	Algèbre, 1 : Structures fondamentales	Gauthier-Villars
MAC LANE S. **BIRKHOFF G.**	Algèbre, 2 : Les grands théorèmes	Gauthier-Villars
MACKI J. **STRAUSS A.**	Introduction to optimal control theory	Springer ISBN : 9780387906249
MAKAROV B.M. **GOLUZINA M.G.** **LODKIN A.A.** **PODKORYTOV A.N.**	Problèmes d'analyse réelle	Cassini ISBN : 9782842251246
MALLIAVIN M. P.	Les groupes finis et leurs représentations complexes	Masson ISBN : 9782225699719
MALLIAVIN M. P. **WARUSFEL A.**	Algèbre linéaire et géométrie classique. Exercices	Masson ISBN : 9782225686408
MALLIAVIN P.	Géométrie différentielle intrinsèque	Hermann
MANIVEL	Fonctions symétriques, polynômes de Schubert	SMF ISBN : 2856290663
MANSUY R. **RANDÉ B.**	Les clés pour l'X (2)	Calvage et Mounet ISBN : 9782916352152
Manuels Matlab	Using Matlab version 5	Matlab
MASCART H. **STOKA M.**	Fonctions d'une variable réelle, Tome 2 : Exercices et corrigés	PUF
MASCART H. **STOKA M.**	Fonctions d'une variable réelle, Tome 3 : Exercices et corrigés	PUF ISBN : 9782130401469
MASCART H. **STOKA M.**	Fonctions d'une variable réelle, Tome 4 : Exercices et corrigés	PUF ISBN : 9782130401469
MAWHIN J.	Analyse : fondements, technique, évolutions	De Boeck Université ISBN : 9782804116705
MAZET P.	Algèbre et géométrie pour le CAPES et l'Agrégation	Ellipses ISBN : 9782729846725
MENEZES A. **VAN OORSCHOT P.** **VANSTON S.**	Handbook of applied cryptography	CRC Press ISBN : 9780849385230
MÉRINDOL J.Y.	Nombres et algèbre	EDP Sciences ISBN : 9782868838209
MERKIN D.	Introduction to the theory of stability	Springer ISBN : 9780387947617
MÉTIVIER M.	Probabilités : dix leçons d'introduction., École Polytechnique	Ellipses ISBN : 9782729887164
MEUNIER	Agrégation interne de Mathématiques, Exercices d'oral corrigés et commentés, Tome 2	PUF ISBN : 9782130489801

MEUNIER P.	Algèbre avec applications à l'algorithmique et à la cryptographie	Ellipses ISBN : 9782729852184
MEYRE T.	Séries, intégrales et probabilités. Préparation à l'agrégation interne	E-livre
MEYRE T.	Probabilités. Cours et exercices corrigés	Calvage et Mounet ISBN : 9782916352374
MIGNOTTE M.	Mathématiques pour le calcul formel	PUF ISBN : 9782130422594
MITCHELL J. C.	Concepts in programming languages	Cambridge ISBN : 9780521780988
MNEIMNÉ R.	Éléments de géométrie : action de groupes	Cassini ISBN : 9782842250034
MNEIMNÉ R.	Réduction des endomorphismes	Calvage et Mounet ISBN : 9782916352015
MNEIMNÉ R. **TESTARD F.**	Introduction à la théorie des groupes de Lie classiques	Hermann
MOISAN J. **VERNOTTE A.**	Exercices corrigés de mathématiques spéciales, Analyse : topologie et séries	Ellipses
MOISAN J. **VERNOTTE A.** **TOSEL N.**	Exercices corrigés de mathématiques spéciales, Analyse : suites et séries de fonctions	Ellipses ISBN : 9782729892937
MONIER J.M.	Cours de mathématiques, Algèbre 1 MPSI, PCSI, PTSI	Dunod ISBN : 9782100029747
MONIER J.M.	Cours de mathématiques, Algèbre 2 MP, PSI, PC, PT	Dunod ISBN : 9782100033126
MONIER J.M.	Cours de mathématiques, Analyse 2 MPSI, PCSI, PTSI	Dunod ISBN : 9782100030767
MONIER J.M.	Cours de mathématiques, Analyse 3 MP, PSI, PC, PT	Dunod ISBN : 9782100033669
MONIER J.M.	Cours de mathématiques, Analyse 4 MP, PSI, PC, PT	Dunod ISBN : 9782100034666
MONIER J.M.	Cours de mathématiques, Exercice d'algèbre et géométrie MP	Dunod ISBN : 9782100059775
MUTAFIAN C.	Le défi algébrique, Tome 1	Vuibert ISBN : 9782711721418
MUTAFIAN C.	Le défi algébrique, Tome 2	Vuibert
NAGEL E. **NEWMAN J. R.** **GÖDEL K.** **GIRARD J. Y.**	Le théorème de Gödel	Seuil ISBN : 9782020106528
NAUDIN P. **QUITTE C.**	Algorithmique algébrique avec exercices corrigés	Masson ISBN : 9782225827037
NIVEN I.	Irrational numbers	Mathematical Association of America ISBN : 9870883850112
NORRIS J.R.	Markov chains	Cambridge ISBN : 9780521633963

O'ROURKE J.	Computational geometry in C	Cambridge ISBN : 9780521649766
OPREA J.	Differential geometry	Prentice hall ISBN : 9780133407389
OUVRARD J.Y.	Probabilités 1 (capes, agrégation)	Cassini ISBN : 9782842250041
OUVRARD J.Y.	Probabilités 1 (capes, agrégation)	Cassini ISBN : 9782842250041
OUVRARD J.Y.	Probabilités 2 (maitrise, agrégation)	Cassini ISBN : 9782842250102
PAPADIMITRIOU C.	Computational complexity	Addison Wesley ISBN : 9780201530827
PAPINI O. **WOLFMANN J.**	Algèbre discrète et codes correcteurs	Springer ISBN : 9783540602262
PARDOUX E.	Processus de Markov et applications	Dunod ISBN : 9782100512171
PEDOE D.	Geometry - A comprehensive course	Dover ISBN : 9780486658124
PERKO L.	Differential equation and dynamical systems	Springer ISBN : 9780387947785
PERRIN D.	Cours d'Algèbre	Ellipses ISBN : 9782729855529
PERRIN D.	Cours d'Algèbre	ENSJF
PERRIN D.	Mathématiques d'école : nombres, mesure, géométrie	Cassini ISBN : 9782842250577
PERRIN-RIOU B.	Algèbre, arithmétique et MAPLE	Cassini ISBN : 9782842250218
PETAZZZONI B.	Seize problèmes d'informatique	Springer ISBN : 9783540673873
PETKOVSEK M. **WILF H.** **ZEILBERGER D.**	A=B	A.K. Peters ISBN : 9781568810638
PEVZNER P.	Computational molecular biology	MIT Press ISBN : 9780262161978
PÓLYA G. **SZEGÖ G.**	Problems and Theorems in Analysis, Volume I	Springer Verlag ISBN : 9783540636404
PÓLYA G. **SZEGÖ G.**	Problems and Theorems in Analysis, Volume II	Springer Verlag ISBN : 9783540636862
POMMELLET A.	Agrégation de Mathématiques. Cours d'Analyse	Ellipses
POMMELLET A.	Agrégation de mathématiques. Cours d'analyse	Ellipses
PRASOLOV V.	Polynomials	Springer ISBN : 9783540407140
PRASOLOV V.	Problèmes et théorèmes d'algèbre linéaire	Cassini ISBN : 9782842250676
PREPARATA F. **SHAMOS M.**	Computational geometry, an introduction	Springer ISBN : 9780387961316

PRESS W. **FLANNERY B.** **TEUKOLSKI S.** **VETTERLING W.**	Numerical recipes in Pascal	Cambridge ISBN : 9780521375160
PUTZ J. F.	Maple animation	Chapman and Hall ISBN : 9781584883784
QUEFFELEC H. **ZUILY C.**	Éléments d'analyse	Dunod ISBN : 9782225848841
QUEFFELEC H. **ZUILY C.**	Éléments d'analyse pour l'agrégation	Masson ISBN : 9782225848841
RALSTON A. **RABINOWITCH P.**	A first course in numerical analysis	International Student Edition
RAMIS E. **DESCHAMPS C.** **ODOUX J.**	Cours de Mathématiques spéciales, 1- Algèbre	Masson
RAMIS E. **DESCHAMPS C.** **ODOUX J.**	Cours de Mathématiques spéciales, 2- Algèbre et applications à la géométrie	Masson ISBN : 9782225634048
RAMIS E. **DESCHAMPS C.** **ODOUX J.**	Cours de Mathématiques spéciales, 3- Topologie et éléments d'analyse	Masson ISBN : 9782225771873
RAMIS E. **DESCHAMPS C.** **ODOUX J.**	Cours de Mathématiques spéciales, 4- Séries et équations différentielles	Masson ISBN : 9782225840679
RAMIS E. **DESCHAMPS C.** **ODOUX J.**	Cours de Mathématiques spéciales, 5- Applications de l'analyse à la géométrie	Masson
RAMIS E. **DESCHAMPS C.** **ODOUX J.**	Exercices avec solutions, Algèbre	Masson ISBN : 9782225813146
RAMIS E. **DESCHAMPS C.** **ODOUX J.**	Exercices avec solutions, Analyse 1	Masson ISBN : 9782225800986
RAMIS E. **DESCHAMPS C.** **ODOUX J.**	Exercices avec solutions, Analyse 2	Masson ISBN : 9782225805783
RAMIS J.- P. **WARUSFEL A.** **BUFF X.** **ARNIER J.** **HALBERSTADT E.** **LACHAND-ROBERT T.** **MOULIN F.** **SAULOY J.**	Mathématiques Tout-en-un pour la licence, Cours complet avec 270 exercices corrigés, niveau L1	Dunod ISBN : 9782100496143
RANDÉ B. **TAÏEB F.**	Les clés pour l'X	0 ISBN : 9782916352091
RANDÉ **B.**	Les carnets indiens de Srinivasa Ramanujan	Cassini ISBN : 9782842250652
RAO C.R.	Linear statistical inference and its application	Wiley ISBN : 9780471708232

REINHARDT F. **SOEDER H.**	Atlas des mathématiques	LIVRE DE POCHE ISBN : 9782253130130
REMMERT R.	Classical topics in complex function theory	SPRINGER ISBN : 9780387982212
RIDEAU F.	Exercices de calcul différentiel	HERMANN
RIESZ E. **NAGY B. SZ**	Leçons d'analyse fonctionnelle	GAUTHIER-VILLARS
RIO E.	Théorie asymptotique des processus aléatoires faiblement dépendants	SPRINGER ISBN : 9783540659792
ROBERT C.	Contes et décomptes de la statistique - Une initiation par l'exemple	VUIBERT ISBN : 9782711753208
ROLLAND R.	Théorie des séries, 2- Séries entières	CÉDIC/NATHAN
ROMBALDI J.E.	Analyse matricielle	EDP SCIENCES ISBN : 9782868834256
ROMBALDI J.E.	Interpolation, approximation, Analyse pour l'agrégation	VUIBERT ISBN : 9782711771868
ROMBALDI J.E.	Thèmes pour l'agrégation de mathématiques	EDP SCIENCES ISBN : 9772868834073
ROUDIER H.	Algèbre linéaire. Cours et exercices	VUIBERT ISBN : 9782711724857
ROUSSEAU Y. **SAINT-AUBIN Y.**	Mathématiques et Technologie	SPRINGER (SUMAT) ISBN : 9780387692128
ROUVIERE F.	Petit guide de calcul différentiel à l'usage de la licence et de l'agrégation	CASSINI ISBN : 9782842250089
RUAUD J.F. **WARUSFEL A.**	Exercices de Mathématiques Algèbre 3	MASSON
RUDIN W.	Analyse réelle et complexe	MASSON
RUDIN W.	Functional analysis	MC GRAW HILL
RUDIN W.	Real and complex analysis	MC GRAW HILL
SA EARP R. **TOUBIANA E.**	Introduction à la géométrie hyperbolique et aux surfaces de Riemann	CASSINI ISBN : 9782842250850
SAINT RAYMOND J.	Topologie, calcul différentiel et variable complexe	CALVAGE ET MOUNET ISBN : 9782916352039
SAKAROVITCH J.	Eléments de théorie des automates	VUIBERT ISBN : 9782711748075
SAKS S. **ZYGMUND A.**	Fonctions analytiques	MASSON
SAMUEL P.	Théorie algébrique des nombres	HERMANN
SARMANT M.C. **MERLIER T.** **PILIBOSSIAN Ph.** **YAMMINE S.**	Analyse 1	ELLIPSES ISBN : 9782729898519
SAVIOZ J.C.	Algèbre linéaire, cours et exercices	VUIBERT ISBN : 9782711789849
SCHNEIER B.	Applied cryptography	WILEY ISBN : 9780471117094

SCHWARTZ L.	Analyse, I Topologie générale et analyse fonctionnelle	Hermann
SCHWARTZ L.	Analyse, II Calcul différentiel et équations différentielles	Hermann ISBN : 9782705661625
SCHWARTZ L.	Cours d'Analyse	Hermann
SCHWARTZ L.	Méthodes mathématiques pour les sciences physiques	Hermann
SEDGEWICK R.	Algorithmes en Java	Pearson Education ISBN : 9782744070242
SEDGEWICK R.	Algorithmes en langage C	Dunod ISBN : 9780201314525
SEDGEWICK R.	Algorithms	Addison Wesley ISBN : 9782744070242
SELBERHERR S. STIPPEL H. STRASSER E.	Simulation of semi-conductor devices and processes	Springer ISBN : 9780387818006
SERRE D.	Les matrices, théorie et pratique	Dunod ISBN : 9782100055159
SERRE J.P.	Cours d'arithmétique	PUF
SHAPIRO H.	Introduction to the theory of numbers	Dover ISBN : 9780486466699
SIDLER J.C.	Géométrie Projective	Dunod ISBN : 9782100052349
SIPSER M.	Introduction to the theory of computation	Thomson C.T. ISBN : 9780619217648
SKANDALIS G.	Topologie et analyse	Dunod ISBN : 9782100045310
SKANDALIS G.	Algèbre générale et algèbre linéaire. Préparation à l'agrégation interne	E-livre
SKANDALIS G.	Algèbre générale et algèbre linéaire et un peu de géométrie. Agrégation interne	Calvage et Mounet ISBN : 9782916352350
SKANDALIS G.	Analyse-Résumés et exercices. Préparation à l'agrégation interne	E-livre
STANLEY R.P.	Enumerative combinatorics Volume I	Waddworth and Brooks ISBN : 9780534065465
STEWART I.	Galois theory	Chapman and Hall ISBN : 9780412345500
STROUSTRUP B.	Le langage C++	Pearson Education ISBN : 9782744070037
SZPIRGLAS A.	Exercices d'algèbre	Cassini ISBN : 9782842250270
TAUVEL P.	Corps commutatifs et théorie de Galois	Calvage et Mounet ISBN : 9782916352060
TAUVEL P.	Cours d'algèbre	Dunod ISBN : 9782100045907
TAUVEL P.	Cours de Géométrie	Dunod ISBN : 9782100058709

TAUVEL P.	Exercices de mathématiques pour l'agrégation, Algèbre 2	MASSON ISBN : 9782225844416
TAUVEL P.	Mathématiques générales pour l'agrégation	MASSON ISBN : 9782225827338
TENENBAUM G.	Introduction à la théorie analytique et probabiliste des nombres	INSTITUT ELIE CARTAN ISBN : 9782903594121
TENENBAUM G.	Introduction à la théorie analytique et probabiliste des nombres	S.M.F. ISBN : 9782856290329
TENENBAUM G. **MENDÈS-FRANCE M.**	Les nombres premiers	QUE SAIS-JE ? PUF ISBN : 9782130483991
TENENBAUM G. **WU J.**	Exercices corrigés de théorie analytique et probabiliste des nombres T 2	S.M.F. ISBN : 9782856290450
TISSERON C.	Géométries affine, projective et euclidienne	HERMANN ISBN : 9782705614416
TISSIER A.	Mathématiques générales : exercices avec solutions	BRÉAL
TITCHMARSH E.C.	The theory of functions	OXFORD
TORTRAT A.	Calcul des probabilités et introduction aux processus aléatoires	MASSON
TRIGNAN J.	Constructions géométriques et courbes remarquables	VUIBERT ISBN : 9782711771240
TRUFFAULT B.	Exercices de géométrie élémentaires	IREM DES PAYS DE LOIRE
TURING A **GIRARD J. Y.**	La Machine de Turing	SEUIL ISBN : 9782020135719
VALIRON G.	Cours d'analyse mathématique, I Théorie des fonctions	MASSON
VALIRON G.	Cours d'analyse mathématique, II Équations fonctionnelles - Applications	MASSON
VAUTHIER J. **PRAT J-J.**	Cours d'Analyse Mathématique de l'Agrégation	MASSON ISBN : 9782225844508
VAZIRANI V.	Algorithmes d'approximation	SPRINGER ISBN : 9782287006777
VINBERG E.B.	A course in algebra	AMS ISBN : 9780821834138
WAGSCHAL C.	Distributions, Analyse microlocale, Équations aux dérivées partielles	HERMANN ISBN : 9782705680817
WAGSCHAL C.	Fonctions holomorphes, Équations différentielles	HERMANN ISBN : 9782705664565
WARIN B.	L'algorithmique, votre passeport informatique pour la programmation	ELLIPSES ISBN : 9782729811402
WARUSFEL A.	Structures algébriques finies	CLASSIQUES HACHETTE
WARUSFEL **ATTALI** **COLLET** **GAUTIER** **NICOLAS**	Mathématiques, Analyse	VUIBERT ISBN : 9782711789573

WARUSFEL **ATTALI** **COLLET** **GAUTIER** **NICOLAS**	Mathématiques, Arithmétique	Vuibert ISBN : 9782711789535
WARUSFEL **ATTALI** **COLLET** **GAUTIER** **NICOLAS**	Mathématiques, Géométrie	Vuibert ISBN : 9782711789542
WARUSFEL **ATTALI** **COLLET** **GAUTIER** **NICOLAS**	Mathématiques, Probabilités	Vuibert ISBN : 9782711789580