Agréation interne 2019 deuxième épreuve.

Durée : 6 heures.

L'usage de tout ouvrage de référence et de tout matériel électronique (y compris la calculatrice) est rigoureusement interdit.

Notations et présentation du problème.

- ▷ On désigne par $\mathbb{N}$ l'ensemble des entiers naturels, par $\mathbb{Z}$ l'anneau des entiers relatifs, par $\mathbb{R}$ le corps des nombres réels et par $\mathbb{C}$ celui des nombres complexes.
- ▷ On note $\mathbb{R}_+^*$ l'ensemble des réels strictement positifs et $\mathbb{N}^*$ l'ensemble des entiers strictement positifs.
- ▷ Soient E et F deux ensembles quelconques. On note $E \setminus F$, l'ensemble des éléments qui appartiennent à E mais pas à F .
- ▷ Lorsque le corps $\mathbb{K}$ est égale à $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$, on identifie polynômes et fonctions polynomiales associées. On note $\mathbb{K}[X]$ l'ensemble des polynômes à coefficients dans $\mathbb{K}$ et, pour n entier, $\mathbb{K}_n[X]$ le sous-espace vectoriel des polynômes de degré inférieur ou égale à n .
- ▷ Si E est un $\mathbb{K}$ -espace vectoriel, on note $\mathcal{L}(E)$ l'ensemble de ses endomorphismes.
- ▷ On note indifféremment, lorsque la notion est bien définie, $\frac{d^n f}{dx^n}$ ou $f^{(n)}(x)$ la dérivée n -ième d'une fonction au point x . Par convention pour $n = 0$, $f^{(0)}(x) = f(x)$.
- ▷ On note $C^0(\mathbb{R}, \mathbb{C})$ (respectivement $C^\infty(\mathbb{R}, \mathbb{C})$) l'ensemble des fonctions continues (respectivement infiniment dérivables) sur $\mathbb{R}$ et à valeurs dans $\mathbb{C}$.

Dans la première partie, on introduit la famille des polynômes d'Hermite $(H_n)_{n \in \mathbb{N}}$. On établit son orthogonalité pour un certain produit scalaire, ainsi que d'autres propriétés. Après avoir étudié, en partie II, quelques propriétés de la fonction Γ utiles par la suite, on définit et étudie dans la partie III la dérivation d'une fonction à un ordre $s \in \mathbb{R}$, ceci pour une classe appropriée de fonctions. Ce travail permettra de définir une famille de fonctions $(H_s)_{s \in \mathbb{R}}$ qui étend naturellement la famille des polynômes d'Hermite $(H_n)_{n \in \mathbb{N}}$. L'étude des propriétés de cette famille, en lien avec l'équation différentielle d'Hermite, fera l'objet de la partie IV.

I Polynômes orthogonaux d'Hermite.

1. (a) Soit un couple $(P, Q) \in \mathbb{R}[X]^2$.

Montrer que la fonction de la variable réelle x définie par $x \mapsto P(x)Q(x)e^{-x^2}$ est intégrable sur $\mathbb{R}$.

Au vu de l'ensemble sur lequel nous souhaitons intégrer nous ne pouvons ne contenir de l'intégrale au sens de Riemann.

Vérifions que $x \mapsto P(x)Q(x)e^{-x^2}$ est intégrable sur $\mathbb{R}$ au sens des intégrales impropres.

$x \mapsto P(x)Q(x)e^{-x^2}$ est localement intégrable sur $\mathbb{R}$ (continue sur tout segment de $\mathbb{R}$).

Vérifions donc que l'intégrale impropre $\int_{-\infty}^{+\infty} P(x)Q(x)e^{-x^2} dx$ est convergente.

Par linéarité de l'intégrale il suffit de vérifier la convergence de l'intégrale $\int_{-\infty}^{+\infty} t^n e^{-t^2} dt$ avec $n \in \mathbb{N}$.

Par parité de $x \mapsto x^n e^{-x^2}$ il suffit d'étudier le cas de l'intégrale impropre $\int_0^{+\infty} t^n e^{-t^2} dt$ avec $n \in \mathbb{N}$.

Soit $n \in \mathbb{N}$.

Démontrons que l'intégrale impropre $\int_0^{+\infty} t^n e^{-t^2} dt$ est convergente.

Notons $g_n(x) = x^n e^{-x^2}$ pour tout $x \in \mathbb{R}_+$.

- . Soit $x \in [1, +\infty[$. De $x^2 \geq x$ nous déduisons par monotonie des fonctions considérées : $g_n(x) \leq x^n e^{-x}$.
- . De plus $x^n e^{-x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{1}{x^2} \right)$ et $\int_1^{+\infty} \frac{1}{t^2} dt$ est une intégrale impropre convergente (exemple de Riemann).
- . Enfin toutes les fonctions considérées sont positives.

Nous déduisons des points précédents, par majoration de l'intégrale impropre qu'elle est convergente.

L'intégrale impropre $\int_0^{+\infty} t^n e^{-t^2} dt$ est convergente.

Et donc $x \mapsto P(x)Q(x)e^{-x^2}$ est intégrable sur $\mathbb{R}$.

(b) On note $\langle \cdot, \cdot \rangle$ l'application définie sur $\mathbb{R}[X]^2$ par :

$$\forall (P, Q) \in \mathbb{R}[X]^2, \langle P, Q \rangle = \int_{-\infty}^{+\infty} P(x)Q(x)e^{-x^2} dx.$$

Établir que l'on définit ainsi un produit scalaire sur $\mathbb{R}[X]$.

Démontrons que $\langle \cdot, \cdot \rangle$ est un produit scalaire sur $\mathbb{R}[X]^2$.

- * **Symétrie.** Découle de la commutativité du produit.
- * **Bilinéarité.** La bilinéarité de $\langle \cdot, \cdot \rangle$ découle de la linéarité des intégrales impropres convergentes.
- * **Définition.** Soit $x \in \mathbb{R}_+$. Nous avons

$$0 \leq \int_{-x}^x P^2(t)e^{-t^2} dt \leq \int_{-\infty}^{\infty} P^2(t)e^{-t^2} dt,$$

donc si $\langle P, P \rangle = 0$, alors $\int_{-x}^x P^2(t)e^{-t^2} dt = 0$ et l'intégrande étant ici continue et positive nécessairement $t \mapsto P^2(t)e^{-t^2}$ est nulle sur $[-x, x]$. Nous en déduisons finalement que $P = 0$.

- * **Positivité.** Soit $P \in \mathbb{R}[X]^2$. Clairement : $\forall x \in \mathbb{R}, P^2(x)e^{-x^2} \geq 0$.
Donc $\int_{-\infty}^{+\infty} P^2(t)e^{-t^2} dt \geq 0$

$\langle \cdot, \cdot \rangle$ est un produit scalaire sur $\mathbb{R}[X]^2$.

Dans la suite du problème, on munit $\mathbb{R}[X]$ de cette structure d'espace préhilbertien réel.

2. Montrer qu'il existe une suite $(Q_k)_{k \in \mathbb{N}}$ d'éléments unitaires de $\mathbb{R}[X]$ deux à deux orthogonaux telle que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, le sous-espace engendré par $Q_0, \dots, Q_n$ soit $\mathbb{R}_n[X]$.

Justifions l'existence de la famille $(Q_k)_{k \in \mathbb{N}}$.

- * La famille $(X^k)_{k \in \mathbb{N}}$ est une base de $\mathbb{R}[X]$ telle que, pour chaque $n \in \mathbb{N}$, $\text{Vect}(1, \dots, X^n) = \mathbb{R}_n[X]$.
- * En appliquant le procédé d'orthonormalisation de Gram-Schmidt à la famille $(X^k)_{k \in \mathbb{N}}$ nous obtenons une famille $(Q_k)_{k \in \mathbb{N}}$ de vecteurs orthonormaux.

La famille $(Q_k)_{k \in \mathbb{N}}$ ainsi construite est répond bien à la question.

Il existe une famille $(Q_k)_{k \in \mathbb{N}}$ de polynômes orthogonaux et unitaires tels que, quelque soit $n \in \mathbb{N}$, le sous-espace vectoriel engendré par $Q_0, \dots, Q_n$ est $\mathbb{R}_n[X]$.

3. Pour tout entier $n \in \mathbb{N}$, on note H_n la fonction définie par :

$$x \mapsto H_n(x) = e^{x^2} \frac{d^n}{dx^n} (e^{-x^2}).$$

(a) Établir, pour tout $n \in \mathbb{N}$, la relation :

$$\forall x \in \mathbb{R}, H_{n+1}(x) = -2xH_n(x) + H'_n(x).$$

Démontrons la formule de récurrence proposée.

Soient $n \in \mathbb{N}$ et $x \in \mathbb{R}$.

H_n est un produit de fonctions indéfiniment dérivable donc l'est aussi et :

$$\begin{aligned} H'_n(x) &= 2xe^{x^2} \frac{d^n}{dx^n} (e^{-x^2}) + e^{x^2} \frac{d^{n+1}}{dx^{n+1}} (e^{-x^2}) \\ &= 2xH_n(x) + H_{n+1}(x) \end{aligned}$$

Nous avons donc établi :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \forall x \in \mathbb{R}, H_{n+1}(x) = -2xH_n(x) + H'_n(x).$$

(b) Calculer $H_0(x)$, $H_1(x)$, $H_2(x)$, $H_3(x)$.

Calculons H_0 .

Par construction

$$H_0(x) = e^{x^2} \frac{d^0}{dx^0} (e^{-x^2})$$

Donc :

$$H_0 = 1.$$

Calculons H_1 .

Soit $x \in \mathbb{R}$.

En utilisant la formule de récurrence établie à la question précédente

$$H_1(x) = -2xH_0(x) + H'_0(x)$$

$$\forall x \in \mathbb{R}, H_1(x) = -2x.$$

Calculons H_2 et H_3 .

En utilisant à nouveau la formule de récurrence :

$$\begin{aligned} H_2(x) &= -2xH_1(x) + H_1'(x) \\ &= -2x(-2x) + (-2) \end{aligned}$$

$$\forall x \in \mathbb{R}, H_2(x) = 4x^2 - 2.$$

et

$$\begin{aligned} H_3(x) &= -2xH_2(x) + H_2'(x) \\ &= -2x(4x^2 - 2) + 8x \end{aligned}$$

$$\forall x \in \mathbb{R}, H_3(x) = -8x^3 + 12x.$$

- (c) Démontrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, H_n est un polynôme de degré n .
 H_n désigne le n -ième polynôme d'Hermite.

Notons, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\mathcal{P}_1(n)$: « $\deg(H_n) = n$ ».

Démontrons par récurrence sur n que $\mathcal{P}_1(n)$ est vraie.

* $H_0 = 1$, donc $\deg(H_0) = 0$ et $\mathcal{P}_1(0)$ est vraie.

Remarquons encore que comme $H_1(x) = -2x$, $\deg(H_1) = 1$.

* Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Supposons $\mathcal{P}_1(n)$ vraie et démontrons qu'alors $\mathcal{P}_1(n+1)$ est vraie.

D'après la question 3.(a) : $\forall x \in \mathbb{R}, H_{n+1}(x) = -2xH_n(x) + H_n'(x)$.

Puisque par hypothèse de récurrence $\deg(H_n) = n$, nous avons $\deg(-2xH_n(x)) = n + 1$ et $\deg(H_n'(x)) = n - 1$. Par conséquent : $\deg(H_{n+1}) = n + 1$.

Ainsi $\mathcal{P}_1(n + 1)$ est vraie.

Nous avons démontré par récurrence que quelque soit $n \in \mathbb{N}$,
 $\deg(H_n) = n$.

(d) Déterminer, pour tout $n \in \mathbb{N}$, le coefficient dominant du polynôme H_n .

Les calculs des premiers polynômes d'Hermite permettent de conjecturer que pour $n \in \mathbb{N}$, l'assertion $\mathcal{P}_2(n)$: « le coefficient dominant de H_n est $(-2)^n$ », est vraie.

Démontrons par récurrence sur $n \in \mathbb{N}$ que $\mathcal{P}_2(n)$ est vraie.

* Le coefficient dominant de H_0 est $1 = (-2)^0$.

* Soit $n \in \mathbb{N}$. Supposons $\mathcal{P}_2(n)$ vraie et démontrons qu'alors $\mathcal{P}_2(n+1)$ est encore vraie.

D'après la question 3.(a) : $\forall x \in \mathbb{R}, H_{n+1}(x) = -2xH_n(x) + H'_n(x)$.

D'après la question précédente le coefficient dominant de H_{n+1} est donc le même que celui de $-2XH_n(X)$. Le coefficient dominant de ce dernier est, d'après l'hypothèse de récurrence, $-2 \times (-2)^n = (-2)^{n+1}$.
Donc $\mathcal{P}_2(n+1)$ est vraie.

Nous avons démontré par récurrence sur n que $(-2)^n$ est le coefficient dominant de H_n et ce quelque soit $n \in \mathbb{N}$.

4. Établir que $(H_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est une famille orthogonale de $(\mathbb{R}[X], \langle \cdot, \cdot \rangle)$.

Notons $\mathcal{P}_3(n)$: « H_n est orthogonal à $\mathbb{R}_{n-1}[X]$ », pour $n \in \mathbb{N}^*$.

Démontrons par récurrence sur n que $\mathcal{P}_3(n)$ est vraie.

* Soit $x \in \mathbb{R}_+$. $\int_{-x}^x H_1(t)e^{-t^2} dt = \int_{-x}^x -2te^{-t^2} dt = 0$ par parité. Donc :
 $\int_{-\infty}^{+\infty} H_1(t)e^{-t^2} dt = 0$.

Par linéarité nous en déduisons que pour tout $\lambda \in \mathbb{R}$,

$$\langle H_1, \lambda \rangle = \int_{-\infty}^{+\infty} aH_1(t)e^{-t^2} dt = 0.$$

Ainsi $\mathcal{P}_3(1)$ est vraie.

* Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Supposons que $\mathcal{P}_3(n)$ est vraie et démontrons qu'alors $\mathcal{P}_3(n+1)$ est vraie.

Nous allons démontrer que H_{n+1} est orthogonal à X^k quelque soit $k \in \llbracket 0, n \rrbracket$.
Soient $k \in \llbracket 0, n \rrbracket$ et $x \in \mathbb{R}_+$.

Par définition de H_{n+1} :

$$\int_{-x}^x H_{n+1}(t)t^k e^{-t^2} dt = \int_{-x}^x t^k \frac{d^{n+1}}{dt^{n+1}} \left(e^{-t^2} \right) dt$$

En procédant à une intégration par parties, les fonctions considérées étant de classe C^1 ,

$$\begin{aligned} \int_{-x}^x H_{n+1}(t)t^k e^{-t^2} dt &= \left[\frac{d^n}{dt^n} \left(e^{-t^2} \right) t^k \right]_{-x}^x - k \int_{-x}^x \frac{d^n}{dt^n} \left(e^{-t^2} \right) t^{k-1} dt \\ &= \left[H_n(t)t^k e^{-t^2} \right]_{-x}^x - k \int_{-x}^x H_n(t)t^{k-1} e^{-t^2} dt \end{aligned}$$

Or, d'une part, par hypothèse de récurrence : $\int_{-x}^x H_n(t)t^{k-1} e^{-t^2} dt \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} \langle H_n, X^{k-1} \rangle = 0$, et d'autre part (h_n étant un polynôme) $H_n(t)t^k e^{-t^2} \xrightarrow{x \rightarrow \pm\infty} 0$, donc $\int_{-\infty}^{+\infty} H_{n+1}(t)t^k e^{-t^2} dt = 0$.

Nous avons établi que, quelque soit $k \in \llbracket 0, n \rrbracket$, $\langle H_{n+1}, X^k \rangle = 0$.

Autrement dit $\mathcal{P}_3(n+1)$ est vraie.

Nous avons démontré par récurrence sur $n \in \mathbb{N}^*$ que
 $H_n \in (\mathbb{R}_{n-1}[X])^\perp$.

5. Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, le polynôme H_n est colinéaire au polynôme Q_n introduit à la question 2 (pour la structure d'espace vectoriel de $\mathbb{R}[X]$).
6. Établir, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, l'existence d'un nombre réel α_n tel que $H'_n(x) = \alpha_n H_{n-1}(x)$ pour tout x réel. On précisera la valeur de α_n .
7. Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, H_n est solution de l'équation différentielle (dite d'Hermite) :

$$(E_n) \quad y'' - 2xy' + 2ny = 0.$$

8. Établir, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, la relation de récurrence :

$$\forall x \in \mathbb{R}, H_{n+1}(x) + 2xH_n(x) + 2nH_{n-1}(x) = 0.$$

9. Que dire de la parité de H_n ?
10. Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, H_n possède n racines réelles distinctes.
Indication : on pourra remarquer que $\langle H_n, P \rangle = 0$ pour tout polynôme $P \in \mathbb{R}_{n-1}[X]$.

II Quelques résultats sur la fonction Γ .

On considère la fonction Γ définie sur $]0; +\infty[$ par :

$$x \mapsto \Gamma(x) = \int_0^{+\infty} t^{x-1} e^{-t} dt.$$

On rappelle les résultats suivants (que l'on admet) :

- ▷ la fonction Γ est définie et de classe C^∞ sur $\mathbb{R}_+^*$;
- ▷ $\forall n \in \mathbb{N}^*, \forall x \in]0, +\infty[, \Gamma^{(n)}(x) = \int_0^{+\infty} (\ln(t))^n t^{x-1} e^{-t} dt.$

11. Vérifier que Γ satisfait à l'équation fonctionnelle :

$$(E_f) \quad \forall x \in]0, +\infty[, \Gamma(x+1) = x\Gamma(x).$$

- 12. Déterminer un équivalent simple de $\Gamma(x)$ lorsque x tend vers 0^+ .
- 13. Déterminer les limites de $\Gamma'(x)$ lorsque x tend vers 0^+ et quand x tend vers $+\infty$.
- 14. On étudie un prolongement de Γ sur l'ensemble des réels négatifs non entiers qui soient compatibles avec l'équation fonctionnelle (E_f) de Γ .

(a) On note D_Γ l'ensemble $\mathbb{R}$ privé des entiers négatifs ou nul, c'est-à-dire :

$$D_\Gamma = \mathbb{R} \setminus \{-n, n \in \mathbb{N}\}.$$

Montrer qu'il existe un unique prolongement de Γ sur D_Γ qui préserve (E_f) sur D_Γ .

Dans toute la suite du problème, on note encore Γ le prolongement ainsi obtenu.

- (b) Soit $n \in \mathbb{N}$. Déterminer un équivalent simple de $\Gamma(x)$ au voisinage de $(-n)^+$, c'est-à-dire quand x tend vers $(-n)$ par valeurs strictement supérieures à $(-n)$, et au voisinage de $(-n)^-$, c'est-à-dire quand x tend vers $(-n)$ par valeurs strictement inférieures à $(-n)$.
- (c) Montrer que Γ est convexe sur $\mathbb{R}_+^*$ et qu'elle présente un minimum en point $x_0 \in [1,2]$. Établir le tableau de variations de Γ sur $]0,3]$.

- (d) Donner l'allure de la courbe représentative de la fonction Γ sur $] - 3, 3]$.
Il est inutile de reproduire sur la copie un éventuel tableau de variations.
On placera les asymptotes sur le dessin lorsqu'elles existent.

15. Soit $(x, y) \in]0, +\infty[^2$. On pose, lorsque l'intégrale converge :

$$B(x, y) = \int_0^1 t^{x-1} (1-t)^{y-1} dt.$$

- (a) Démontrer que la fonction B est définie sur $]0, +\infty[^2$.
(b) Établir l'égalité :

$$\forall (x, y) \in]0, +\infty[^2, B(x, y) = \frac{\Gamma(x)\Gamma(y)}{\Gamma(x+y)}.$$

- (c) Montrer que :

$$\forall x \in]0, +\infty[, B(x, x) = 2^{1-2x} B\left(x, \frac{1}{2}\right).$$

- (d) Calculer la valeur de $\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)$. En déduire la formule de duplication de la fonction Γ :

$$\forall x \in]0, +\infty[, \Gamma(2x) = \frac{2^{2x-1}}{\sqrt{\pi}} \Gamma(x) \Gamma\left(x + \frac{1}{2}\right).$$

On admettra que, par une utilisation directe de l'équation fonctionnelle, la formule de duplication de Γ s'étend à tout $x \in \mathbb{R} \setminus \left\{\frac{-n}{2}, n \in \mathbb{N}\right\}$.

III Une généralisation de la notion de dérivation.

On définit deux espaces de fonctions en posant :

- ▷ $\mathbf{S}_0 = \{f \in C^0(\mathbb{R}, \mathbb{C}) / \exists \alpha > 0 \text{ tel que } f(x) = o(e^{\alpha x}) \text{ quand } x \text{ tend vers } -\infty\}$;
▷ $\mathbf{S}_\infty = \{f; n C^\infty(\mathbb{R}, \mathbb{C}) / \forall n \in \mathbb{N}, f^{(n)} \in \mathbf{S}_\infty\}$

Pour $f \in \mathbf{S}_0$, $s \in]-\infty, 0[$, et $x \in \mathbb{R}$, on pose :

$$D^{(s)}(f)(x) = \frac{1}{\Gamma(-s)} \int_{-\infty}^x (x-u)^{-s-1} f(u) du.$$

16. Pour $f \in \mathbf{S}_0$, $s \in]-\infty, 0[$, et $x \in \mathbb{R}$, montrer que le nombre $D^{(s)}(f)(x)$ défini ci-dessus existe bien et que l'on a :

$$D^{(s)}(f)(x) = \frac{1}{\Gamma(-s)} \int_0^{+\infty} u^{-s-1} f(x-u) du.$$

17. Pour $f \in \mathbf{S}_0$ et $s < 0$, montrer que $D^{(s)}(f) \in \mathbf{S}_0$.

La linéarité étant immédiate, l'application $D^{(s)} : f \mapsto D^{(s)}(f)$ est donc un endomorphisme de $\mathbf{S}_0$, ce que l'on admettra.

18. Pour $p \in \mathbb{N}^*$ et $f \in \mathbf{S}_0$, établir que $D^{(-p)}(f)$ coïncide avec la primitive itérée p fois de f , lorsque les constantes d'intégration sont toutes choisies nulles en $-\infty$, c'est-à-dire :

$$\forall x \in \mathbb{R}, D^{(-p)}(f)(x) = \int_{u_1=-\infty}^x \left(\int_{u_2=-\infty}^{u_1} \left(\dots \left(\int_{u_p=-\infty}^{u_{p-1}} f(u_p) du_p \right) \dots \right) du_2 \right) du_1.$$

19. Établir l'égalité entre éléments de $\mathcal{L}(\mathbf{S}_0)$:

$$\forall (s, s') \in]-\infty, 0]^2, D^{(s)} \circ D^{(s')} = D^{(s+s')}.$$

On souhaite étendre la dérivation d'ordre n (entier naturel) à des ordres réels. pour cela on va travailler sur $\mathbf{S}_\infty$.

20. Montrer que, pour tout réel s strictement négatif, $D^{(s)}$ laisse stable le sous-espace vectoriel $\mathbf{S}_\infty$.

Par la suite, on note encore $D^{(s)}$ les endomorphismes induits par la restriction de $D^{(s)}$ à $\mathbf{S}_\infty$.

21. On cherche à vérifier quelques égalités entre endomorphismes de $\mathbf{S}_\infty$.

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on note $d^{(n)}$ l'endomorphisme de dérivation n -ième sur $\mathbf{S}_\infty$:

$$\forall f \in \mathbf{S}_\infty, d^{(n)}(f) = f^{(n)}.$$

- (a) Établir l'égalité suivante :

$$\forall s \in]-\infty, 0[, \forall n \in \mathbb{N}, d^{(n)} \circ D^{(s)} = D^{(s)} \circ d^{(n)}.$$

(b) Pour $s \in]-\infty, 0[$, et $n \in \mathbb{N}$ tels que $s + n < 0$ établir l'égalité :

$$D^{(s)} \circ d^{(n)} = d^{(n)} \circ D^{(s)} = D^{(s+n)}.$$

(c) Pour $s \in \mathbb{R}$ et $(n, m) \in \mathbb{N}^2$ tels que $s < n$ et $s < m$, établir l'égalité :

$$d^{(n)} \circ D^{(s-n)} = d^{(m)} \circ D^{(s-m)}.$$

Pour $f \in S_0$ et lorsque $s \geq 0$, la fonction $u \mapsto u^{-s-1}f(x-u)$ peut ne pas être intégrable sur $]0, +\infty[$. Aussi, lorsque $s \geq 0$, l'opérateur $D^{(s)}$ ne peut pas être défini à l'aide de la formule intégrale :

$$\begin{aligned} \forall f \in S_\infty, D^{(s)}(f)(x) &= \frac{1}{\Gamma(-s)} \int_{-\infty}^x (x-u)^{-s-1} f(u) \, du \\ &= \frac{1}{\Gamma(-s)} \int_0^{+\infty} (u)^{-s-1} f(x-u) \, du. \end{aligned}$$

En s'appuyant sur les questions précédentes, on définit, pour $s \in \mathbb{R}$, un opérateur $D^{(s)}$ sur S_∞ de la façon suivante :

$$D^{(s)} = D^{(s-n)} \circ d^{(n)} \quad \text{où } n \in \mathbb{N} \text{ est tel que } s < n.$$

On a montré à la question précédente que cette définition est indépendante de l'entier naturel n choisi tel que $s < n$. De manière explicite :

$$\forall f \in S_\infty, \forall x \in \mathbb{R}, D^{(s)}(f)(x) = \frac{1}{\Gamma(n-s)} \int_0^{+\infty} u^{n-s-1} f^{(n)}(x-u) \, du.$$

22. Montrer que dans $\mathcal{L}(S_\infty)$, on a, pour tout $(s, s') \in \mathbb{R}^2$, l'égalité : $D^{(s+s')} = D^{(s)} \circ D^{(s')}$.
23. Soit $f \in S_\infty$ et $x \in \mathbb{R}$. Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a : $D^{(n)}(f)(x) = f^{(n)}(x)$.
24. Soit $f \in S_\infty$. Établir que la fonction : $(x, s) \mapsto D^{(s)}(f)(x)$ est continue sur $\mathbb{R}^2$.

IV Étude des polynômes d'Hermite généralisés.

On monte dans cette partie que la définition des opérateurs de dérivation $(D^{(s)})_{s \in \mathbb{R}}$ permet d'étendre la famille des polynômes d'Hermite $(H_n)_{n \in \mathbb{N}}$ donnée par :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \forall x \in \mathbb{R}, H_n(x) = e^{x^2} D^{(n)} \left(e^{-x^2} \right)$$

en une famille des polynômes d'Hermite généralisés $(H_s)_{s \in \mathbb{R}}$:

$$\forall s \in \mathbb{R}, \forall x \in \mathbb{R}, H_s(x) = e^{x^2} D^{(s)} \left(e^{-x^2} \right).$$

25. Montrer que $x \mapsto e^{-x^2}$ appartient à l'espace S_∞ , ce qui justifie la définition de la famille des polynômes d'Hermite généralisée, $(H_s)_{s \in \mathbb{R}}$.
26. Démontrer que, pour tout réel s et pour tout entier $m \in \mathbb{N}$ tel que $s < m$, on a :

$$\forall x \in \mathbb{R}, H_s(x) = \frac{1}{\Gamma(m-s)} \int_0^{+\infty} H_m(x-u) e^{-u^2+2xu} u^{m-s-1} du.$$

27. Établir pour tout $s \in \mathbb{R}$:

$$\forall x \in \mathbb{R}, H'_s(x) = -2sH_{s-1}(x).$$

28. Établir que, pour tout $s \in \mathbb{R}$, H_s est solution de l'équation différentielle :

$$(E_s) \quad y'' - 2xy' + 2sy = 0$$

qui généralise, pour le paramètre s réel, l'équation d'Hermite (E_n) lorsque n est un entier positif ou nul.

29. Vérifier que, pour tout $s \in \mathbb{R}$, on a :

$$\forall x \in \mathbb{R}, H_{s+1}(x) + 2xH_s(x) + 2sH_{s-1}(x) = 0.$$

30. Que dire, sans calcul, des solutions maximales de (E_s) ? De la structure de l'ensemble des solutions?

Par la suite, l'expression « solution de (E_s) » fera référence à une solution maximale.

31. Pour tout réel λ , on définit le symbole $(\lambda)_n$ par :

$$(\lambda)_0 = 1 \text{ et } \forall n \in \mathbb{N}^*, (\lambda)_n = \lambda(\lambda + 1)(\lambda + 2) \dots (\lambda + n - 1).$$

Pour $(\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2$ et $x \in \mathbb{R}$, on pose, lorsque cette quantité existe :

$$K(\alpha, \beta; x) = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(\alpha)_k x^k}{(\beta)_k k!}.$$

(a) Montrer que $K(\alpha, \beta; x)$ est bien défini pour $\alpha \in \mathbb{R}$, $\beta \in \mathbb{R} \setminus \{-n, n \in \mathbb{N}\}$ et $x \in \mathbb{R}$.

(b) À quelle(s) condition(s) la fonction $x \mapsto K(\alpha, \beta; x)$ est-elle polynomiale ?

32. On veut déterminer deux solutions de (E_s) définies sur $\mathbb{R}$, notées $y_{1,s}$ et $y_{2,s}$, et vérifiant les conditions initiales :

$$\begin{cases} y_{1,s}(0) = 1 \\ y'_{1,s}(0) = 0 \end{cases} \quad \text{et} \quad \begin{cases} y_{2,s}(0) = 0 \\ y'_{2,s}(0) = 1. \end{cases}$$

Établir que $y_{1,s}(x) = K\left(-\frac{s}{2}, \frac{1}{2}; x^2\right)$ et exprimer $y_{2,s}$ sous une forme analogue.

33. On se place dans le cas où s est un entier naturel ($s = n \in \mathbb{N}$). Exprimer H_n en fonction de $y_{1,n}$ et $y_{2,n}$.

34. Avec les notations précédentes, établir que :

$$\forall s \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{N}, \forall x \in \mathbb{R}, H_s(x) = \frac{2^s \sqrt{\pi}}{\Gamma\left(\frac{1-s}{2}\right)} y_{1,s} + \frac{2^{s+1} \sqrt{\pi}}{\Gamma\left(\frac{-s}{2}\right)} y_{2,s}.$$

35. Pour z_1 et z_2 , deux solutions de (E_s) , on définit le wronskien de z_1 et z_2 au point $x \in \mathbb{R}$ par :

$$w(x) = \begin{vmatrix} z_1(x) & z_2(x) \\ z'_1(x) & z'_2(x) \end{vmatrix}.$$

Établir l'existence d'une constante $C(z_1, z_2) \in \mathbb{R}$ telle que : $\forall x \in \mathbb{R}, w(x) = C(z_1, z_2)e^{x^2}$, avec $C(z_1, z_2) = 0$ si et seulement si (z_1, z_2) est lié.

36. Pour tout $s \in \mathbb{R}$, on pose :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \tilde{H}_s(x) = H_s(-x).$$

- (a) Montrer que $\tilde{H}_s$ est solution de (E_s) .
- (b) Déterminer une condition nécessaire et suffisante sur s pour que le couple $(H_s, \tilde{H}_s)$ soit une base de l'espace des solutions de (E_s) .

37. On veut préciser le comportement de $H_s(x)$ lorsque x tend vers $-\infty$.

- (a) On fixe un entier n . Pour $t \in \mathbb{R}$, on pose : $g_n(t) = e^{-t^2} - \sum_{k=0}^n \frac{(-1)^k t^{2k}}{k!}$.

Montrer que : $|g_n(t)| \leq \frac{t^{2n+2}}{(n+1)!}$.

- (b) On se place dans le cas $s < 0$. Établir, pour tout entier $n \in \mathbb{N}$, l'existence d'un développement :

$$\forall x \in]-\infty, 0[, H_s(x) = (-2x)^s \left(\sum_{k=0}^n \frac{(-1)^k (-s)_{2k}}{k!} (2x)^{-2k} + O(x^{-2n-2}) \right)$$

lorsque x tend vers $-\infty$.

- (c) Montrer qu'un tel développement existe, en fait, pour tout $x \in \mathbb{R}$.
- (d) En déduire un équivalent de $H_s(x)$ lorsque x tend vers $-\infty$.

38. On étudie maintenant le comportement de $H_s(x)$ lorsque x tend vers $+\infty$.

- (a) Démontrer que, pour $s \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{N}$, $H_s(x) \sim \frac{\sqrt{\pi}}{\Gamma(-s)} x^{-s-1} e^{x^2}$ lorsque x tend vers $+\infty$. On pourra commencer par traiter le cas où $s < 0$.
- (b) Lorsque $s \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{N}$, la fonction $H_s(x)$ admet-elle au voisinage de $+\infty$ un développement de la forme de celui établi en question 37.(b) ?