Notations et rappels

Le cardinal d'un ensemble fini E est noté $|E|$.

Pour un entier n supérieur ou égal à 1, l'ensemble des parties à n éléments d'un ensemble E est noté $\mathscr{P}_n(E)$.

Étant donnés deux entiers m et n tels que $m \leqslant n$, on pose $[\![m, n]\!] = \{m, m+1, \ldots, n\}$.

Pour chaque entier n supérieur ou égal à 1, on note $\mathfrak{S}_n$ le groupe des permutations de l'ensemble $[\![1, n]\!]$.

L'anneau des polynômes en une indéterminée X à coefficients réels est noté $\mathbb{R}[X]$; son corps des fractions est noté $\mathbb{R}(X)$.

Si H est un sous-groupe d'un groupe fini G alors l'ordre de H divise l'ordre de G ; le quotient $|G|/|H|$ est donc un entier, appelé indice de H dans G.

Pour chaque entier n supérieur ou égal à 1, on munit l'espace vectoriel $\mathbb{R}^n$ de son produit scalaire euclidien habituel, défini par : $(\mathbf{x} \mid \mathbf{y}) = x_1y_1 + \cdots + x_ny_n$ pour $\mathbf{x} = (x_1, \ldots, x_n)$ et $\mathbf{y} = (y_1, \ldots, y_n)$.

À l'exception des questions 10 et 11, toutes les matrices considérées dans ce sujet sont à coefficients réels. On identifie une matrice de taille $m \times n$ (m lignes, n colonnes) à l'application linéaire de $\mathbb{R}^n$ dans $\mathbb{R}^m$ dont elle est la représentation dans les bases standards de $\mathbb{R}^n$ et $\mathbb{R}^m$.

Pour chaque entier $n \geqslant 1$, on note I_n la matrice identité de taille $n \times n$ à coefficients dans $\mathbb{R}$.

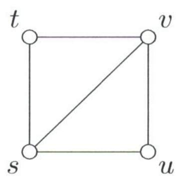
La transposée d'une matrice M est notée ${}^tM$.

Le déterminant d'une matrice carrée M est noté $\det(M)$.

La comatrice d'une matrice carrée M est notée $\operatorname{com}(M)$; son coefficient en position (i, j) est égal à $(-1)^{i+j}$ fois le déterminant de la matrice extraite de M obtenue en supprimant la i-ème ligne et la j-ème colonne de M.

On appelle graphe un couple $\Gamma = (S, A)$ formé d'un ensemble fini S non vide et d'un sous-ensemble $A \subset \mathscr{P}_2(S)$. Les éléments de S sont appelés les sommets de Γ ; les éléments de A sont appelés les arêtes de Γ. On dit qu'une arête a relie deux sommets x et y si $a = \{x, y\}$.

Il est commode de représenter un graphe par un dessin, dans lequel un sommet apparaît comme un point et une arête comme un trait entre les deux sommets qu'elle relie. Le dessin ci-dessous représente le graphe $\Gamma = (S, A)$ avec $S = \{s, t, u, v\}$ et $A = \{\{s,t\}, \{s,u\}, \{s,v\}, \{t,v\}, \{u,v\}\}$.



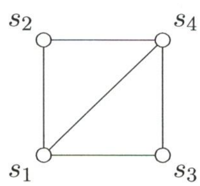
Les quatre parties I, II, III et IV sont mutuellement indépendantes.

Partie I – Spectre d'un graphe et nombre chromatique

Soit $\Gamma = (S, A)$ un graphe. On note n le nombre de sommets de Γ et on énumère ces sommets de la façon suivante : $S = \{s_1, s_2, \dots, s_n\}$. On définit la **matrice d'adjacence** de Γ comme étant la matrice carrée G_Γ, de taille $n \times n$, dont les coefficients $g_{i,j}$ sont donnés par :

$$g_{i,j} = \begin{cases} 1 & \text{si } \{s_i, s_j\} \text{ est une arête,} \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

La matrice G_Γ est symétrique, ses coefficients diagonaux sont nuls et elle possède exactement $2m$ coefficients égaux à 1, où m est le nombre d'arêtes de Γ. Par exemple, la matrice d'adjacence du graphe Γ :

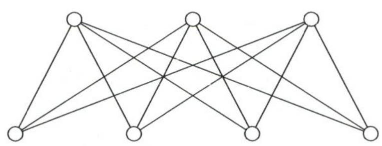


est

$$G_\Gamma = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Il est clair également que l'utilisation d'une autre énumération des sommets de Γ a pour effet de permuter simultanément et pareillement les lignes et les colonnes de G_Γ, c'est-à-dire de conjuguer G_Γ par une matrice de permutation. Le rang de G_Γ, sa trace, son polynôme caractéristique, et tout autre invariant de similitude, ne dépendent donc que de Γ et pas du choix de l'énumération. On appelle **spectre** de Γ la donnée des valeurs propres de G_Γ et de leurs multiplicités.

1. Étant donnés deux entiers a et b supérieurs ou égaux à 1, on note $K_{a,b}$ le graphe ayant $a + b$ sommets et ab arêtes, tel que chacun des a premiers sommets est relié par une arête à chacun des b derniers sommets. La figure ci-dessous représente $K_{3,4}$.



La matrice d'adjacence $G_{K_{a,b}}$ est ainsi de la forme

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 0 & \cdots & 0 & 1 & \cdots & 1 \\ \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & 1 & \cdots & 1 \\ \hline 1 & \cdots & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & \cdots & 1 & 0 & \cdots & 0 \end{array}\right)$$

avec deux blocs diagonaux nuls de taille $a \times a$ et $b \times b$ et deux blocs non diagonaux de taille $a \times b$ et $b \times a$ ayant tous leurs coefficients égaux à 1.

a) Trouver le rang de la matrice $G_{K_{a,b}}$, sa trace et la trace de son carré.

b) Donner le spectre de $K_{a,b}$.
(Indication : examiner la multiplicité de 0 comme valeur propre de $G_{K_{a,b}}$.)

On rappelle que toute matrice symétrique à coefficients réels est diagonalisable sur $\mathbb{R}$ par une matrice de passage orthogonale ; en particulier ses valeurs propres sont réelles.

Pour toute matrice M symétrique à coefficients réels, on note $\lambda_{\max}(M)$ la plus grande valeur propre de M et $\lambda_{\min}(M)$ sa plus petite.

2. Soient n un entier supérieur ou égal à 1 et M une matrice symétrique réelle de taille $n \times n$.

a) Démontrer que, pour tout $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$, on a :

$$\lambda_{\min}(M)\ (\mathbf{x} \mid \mathbf{x}) \leqslant (\mathbf{x} \mid M\mathbf{x}) \leqslant \lambda_{\max}(M)\ (\mathbf{x} \mid \mathbf{x}).$$

b) Démontrer que :

$$\lambda_{\max}(M) = \sup_{\mathbf{x}\in\mathbb{R}^n\setminus\{0\}} \frac{(\mathbf{x} \mid M\mathbf{x})}{(\mathbf{x} \mid \mathbf{x})} \quad \text{et} \quad \lambda_{\min}(M) = \inf_{\mathbf{x}\in\mathbb{R}^n\setminus\{0\}} \frac{(\mathbf{x} \mid M\mathbf{x})}{(\mathbf{x} \mid \mathbf{x})}$$

et que ces bornes, supérieure et inférieure, sont atteintes.

3. Soit n un entier supérieur ou égal à 2 et soit M une matrice symétrique réelle de taille $n \times n$.
On écrit $n = n' + n''$ avec n' et n'' deux entiers supérieurs ou égaux à 1. On décompose M par blocs :

$$M = \begin{pmatrix} M' & L \\ {}^tL & M'' \end{pmatrix}$$ avec M' symétrique de taille $n' \times n'$ et M'' symétrique de taille $n'' \times n''$.

Chaque vecteur $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$ s'écrit $(\mathbf{x}', \mathbf{x}'')$ avec $\mathbf{x}' \in \mathbb{R}^{n'}$ et $\mathbf{x}'' \in \mathbb{R}^{n''}$.

a) Prouver que : $\lambda_{\min}(M) \leqslant \lambda_{\min}(M') \leqslant \lambda_{\max}(M') \leqslant \lambda_{\max}(M)$.

Dans les questions b) et c) suivantes, on suppose que M est positive, c'est-à-dire que $(\mathbf{x} \mid M\mathbf{x}) \geqslant 0$ pour tout $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$.

b) Prouver que, pour tout $(\mathbf{x}', \mathbf{x}'') \in \mathbb{R}^{n'} \times \mathbb{R}^{n''}$:

$$(\mathbf{x}' \mid L\mathbf{x}'')^2 \leqslant (\mathbf{x}' \mid M'\mathbf{x}')\ (\mathbf{x}'' \mid M''\mathbf{x}'').$$

(Indication : considérer le vecteur $\mathbf{x}_t = (t\mathbf{x}', \mathbf{x}'')$ de $\mathbb{R}^n$ pour $t \in \mathbb{R}$ et observer que $(\mathbf{x}_t \mid M\mathbf{x}_t)$ est un polynôme en t à valeurs positives.)

c) Démontrer l'inégalité : $\lambda_{\max}(M) \leqslant \lambda_{\max}(M') + \lambda_{\max}(M'')$.

Abandonnant l'hypothèse que M est positive, on revient au cas général.

d) Démontrer l'inégalité : $\lambda_{\max}(M) + \lambda_{\min}(M) \leqslant \lambda_{\max}(M') + \lambda_{\max}(M'')$.
(Indication : appliquer la question c) à $M + \mu I_n$ avec μ réel judicieusement choisi.)

4. Soient deux entiers n et k tels que $n \geqslant k \geqslant 2$ et M une matrice symétrique réelle de taille $n \times n$.
On écrit $n = n_1 + n_2 + \cdots + n_k$ avec n_1, n_2, ..., n_k entiers supérieurs ou égaux à 1.
On décompose M par blocs :

$$M = \begin{pmatrix} M_1 & * & \dots & * \\ * & M_2 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & * \\ * & \dots & * & M_k \end{pmatrix}$$

où M_1, M_2, ...,M_k sont des matrices symétriques de tailles respectives $n_1 \times n_1$, $n_2 \times n_2$, ..., $n_k \times n_k$.

Démontrer l'inégalité : $\lambda_{\max}(M) + (k-1)\lambda_{\min}(M) \leqslant \lambda_{\max}(M_1) + \lambda_{\max}(M_2) + \cdots + \lambda_{\max}(M_k)$.

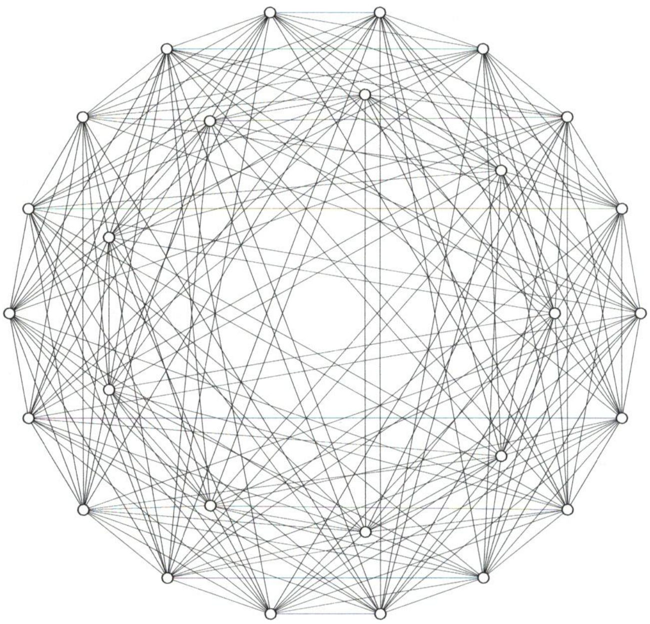
Soient $\Gamma = (S, A)$ un graphe et k un entier supérieur ou égal à 2.
Un coloriage admissible en k couleurs de Γ est une application $c : S \to [\![1, k]\!]$ telle que, pour chaque arête $\{x, y\}$, on ait $c(x) \neq c(y)$.

5. Soient Γ un graphe ayant au moins une arête et k un entier supérieur ou égal à 2. On note $\lambda_{\max}$ le plus grand élément du spectre de Γ et $\lambda_{\min}$ le plus petit.

a) Justifier que : $\lambda_{\min} < 0$.

b) Prouver que : si $k < 1 - \lambda_{\max}/\lambda_{\min}$ alors il n'existe pas de coloriage admissible en k couleurs de Γ.

Le résultat de la question 5 b) peut par exemple être utilisé pour démontrer qu'un coloriage admissible du graphe représenté ci-dessous (le graphe de Schläfli : 27 sommets, 216 arêtes, $\lambda_{\max} = 16$, $\lambda_{\min} = -2$) nécessite au moins neuf couleurs.

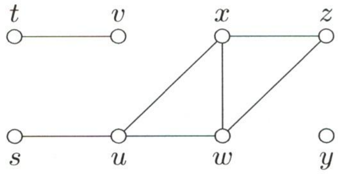


Partie II – Nombre d'arbres couvrant un graphe

Soit $\Gamma = (S, A)$ un graphe. On appelle **chemin** dans Γ une suite finie $(x_0, x_1, \ldots, x_\ell)$ de sommets telle que $\{x_{i-1}, x_i\}$ soit une arête de Γ pour chaque $i \in [\![1, \ell]\!]$. L'entier ℓ est appelé la **longueur** du chemin ; le cas $\ell = 0$ d'un chemin réduit à un sommet est autorisé. On dit que le chemin relie x_0 à x_ℓ.

Pour deux sommets x et y, on écrit $x \sim y$ s'il existe un chemin reliant x à y. La relation $\sim$ est une relation d'équivalence sur S (*cf.* question 6 *infra*). Les classes d'équivalence de $\sim$ sont appelées **composantes connexes** de Γ.

Par exemple, le graphe représenté ci-dessous possède trois composantes connexes, à savoir $\{s, u, w, x, z\}$, $\{t, v\}$ et $\{y\}$.



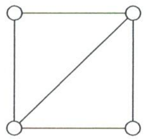
6. Justifier le fait, mentionné sans preuve dans le texte ci-avant, que la relation $\sim$ est une relation d'équivalence sur S.

Un graphe est dit **connexe** s'il possède exactement une composante connexe.

7. Soit $\Gamma = (S, A)$ un graphe connexe. Soit $S = S' \cup S''$ une partition de S en deux parties disjointes et non vides.
   Démontrer l'existence d'une arête de Γ reliant un sommet dans S' à un sommet dans S''.

On appelle **arbre** un graphe connexe dont le nombre d'arêtes est égal au nombre de sommets moins un. Si $\Gamma = (S, A)$ est un graphe connexe, on appelle **arbre couvrant** Γ un arbre de la forme (S, B) avec $B \subset A$.

8. Dessiner tous les arbres couvrant le graphe représenté ci-dessous (on ne demande pas de justification).



Le but de cette partie est de trouver une formule donnant le nombre d'arbres couvrant un graphe connexe donné. On commence par des préliminaires algébriques.

9. Soit n un entier supérieur ou égal à 1. Soit M une matrice carrée de taille $n \times n$ à coefficients réels.
   a) Donner sans justification une identité reliant M, sa comatrice $\mathrm{com}(M)$ et son déterminant $\det(M)$.
   b) Donner le rang de $\mathrm{com}(M)$ en fonction du rang de M. Justifier la réponse.
   c) A-t-on $\mathrm{com}({}^tM) = {}^t\mathrm{com}(M)$? Justifier la réponse.

10. Soient m et n deux entiers avec $m \geqslant n \geqslant 1$. Soit C une matrice carrée de taille $m \times m$ à coefficients réels. Soit X une indéterminée.
    a) On considère la matrice $I_m + XC$, à coefficients dans le corps $\mathbb{R}(X)$. Justifier que $\det(I_m + XC)$ appartient à l'anneau $\mathbb{R}[X]$.

    On appelle mineur principal d'ordre n de C le déterminant d'une sous-matrice de C obtenue en choisissant une partie $K \in \mathscr{P}_n([\![1, m]\!])$ et en ne gardant que les lignes et les colonnes d'indice appartenant à K.

    b) Démontrer que le coefficient de X^n du polynôme $\det(I_m + XC)$ est la somme des mineurs principaux d'ordre n de C.
    (Remarque : cette question, de rédaction délicate, peut être admise sans que cela compromette la compréhension des questions suivantes.)

11. Soient m et n deux entiers avec $m \geqslant n \geqslant 1$. Soient A et B deux matrices à coefficients réels, avec A de taille $n \times m$ et B de taille $m \times n$.
    a) Soit X une indéterminée. Prouver l'identité :

$$\det(I_n + XAB) = \det(I_m + XBA).$$

    (Indication : multiplier les matrices par blocs $\begin{pmatrix} I_m & -XB \\ A & I_n \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} I_m & XB \\ 0 & I_n \end{pmatrix}$.)

Tournez la page S.V.P.

Pour $K \in \mathscr{P}_n(\llbracket 1, m \rrbracket)$, on note A_K la sous-matrice de A de taille $n \times n$ obtenue en ne gardant que les colonnes d'indice appartenant à K, et on note B_K la sous-matrice de B de taille $n \times n$ obtenue en ne gardant que les lignes d'indice appartenant à K.

b) Prouver l'identité de Binet-Cauchy

$$\det(AB) = \sum_{K \in \mathscr{P}_n(\llbracket 1, m \rrbracket)} \det(A_K) \det(B_K).$$

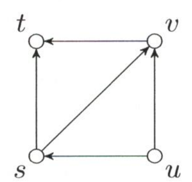
(Indication : examiner le coefficient de X^n dans l'égalité de la question a).)

On appelle **orientation** d'un graphe $\Gamma = (S, A)$ la donnée de deux applications $d : A \to S$ et $f : A \to S$ telles que chaque $a \in A$ soit l'ensemble $\{d(a), f(a)\}$. Sur un dessin représentant Γ, cette donnée supplémentaire peut être symbolisée en remplaçant chaque arête a par une flèche allant de $d(a)$, le début de a, vers $f(a)$, la fin de a.

Dans l'exemple de graphe ci-dessous, le choix :

$$\begin{array}{lllll} d(\{s,t\}) = s, & d(\{s,u\}) = u, & d(\{s,v\}) = s, & d(\{t,v\}) = v, & d(\{u,v\}) = u, \\ f(\{s,t\}) = t, & f(\{s,u\}) = s, & f(\{s,v\}) = v, & f(\{t,v\}) = t, & f(\{u,v\}) = v \end{array}$$

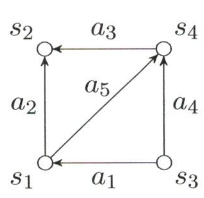
est représenté par le dessin :



On se donne à présent un graphe $\Gamma = (S, A)$.
On note n ($n \geqslant 2$) le nombre de sommets et on énumère les sommets : $S = \{s_1, s_2, \ldots, s_n\}$.
On note m ($m \geqslant 1$) le nombre d'arêtes et on énumère les arêtes : $A = \{a_1, a_2, \ldots, a_m\}$.
On choisit une orientation (d, f) de Γ et on définit la **matrice d'incidence** de Γ comme étant la matrice N_Γ, de taille $m \times n$, dont les coefficients $n_{i,j}$ sont donnés par :

$$n_{i,j} = \begin{cases} -1 & \text{si } s_j = d(a_i), \\ 1 & \text{si } s_j = f(a_i), \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

Par exemple, la matrice d'incidence du graphe Γ :



est

$$N_\Gamma = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \\ -1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

12. La matrice N_Γ est-elle de rang n ?
(Indication : calculer la somme les colonnes de N_Γ.)

13. Soit M une sous-matrice carrée extraite de N_Γ. Démontrer que $\det(M) \in \{-1, 0, 1\}$.
(Indication : commencer par traiter le cas où chaque ligne de M contient un 1 et un -1.)

La relation d'équivalence $\sim$ sur l'ensemble des sommets de Γ a été définie au début de la partie II.

14. a) Soit $\mathbf{x} = (x_1, \ldots, x_n)$ un élément de $\mathbb{R}^n$. Démontrer que $\mathbf{x}$ appartient au noyau de N_Γ si et seulement si $x_j = x_k$ pour tout $(j,k) \in [\![1,n]\!]^2$ tel que $s_j \sim s_k$.

b) Prouver que la dimension du noyau de la matrice N_Γ est égale au nombre de composantes connexes de Γ.

c) En déduire que, si Γ est connexe alors le noyau de N_Γ est la droite vectorielle engendrée par le vecteur $(1, \ldots, 1)$.

On appelle **matrice laplacienne** de Γ la matrice $Q_\Gamma = {}^tN_\Gamma\, N_\Gamma$; c'est une matrice symétrique à coefficients réels de taille $n \times n$.

On note J_n la matrice de taille $n \times n$ dont tous les coefficients sont égaux à 1.

15. a) La matrice Q_Γ dépend-elle du choix de l'orientation (d, f) utilisée pour définir N_Γ ?

b) Démontrer que les matrices Q_Γ et N_Γ ont même noyau.
(Indication : observer que si $\mathbf{x} \in \ker Q_\Gamma$, alors $(\mathbf{x} \mid Q_\Gamma\,\mathbf{x}) = 0$.)

c) Démontrer que les matrices Q_Γ et ${}^tN_\Gamma$ ont même image.

d) Démontrer que toutes les colonnes de $\mathrm{com}(Q_\Gamma)$ sont égales.
(Indication : utiliser les questions 9, 14 et 15 b).)

e) Prouver que $\mathrm{com}(Q_\Gamma)$ est proportionnelle à J_n.

À partir de maintenant et jusqu'à la fin de la partie II, on suppose que $\Gamma = (S, A)$ est un graphe connexe à n sommets ($n \geqslant 2$). On conserve les notations mises en place ci-dessus. Pour qu'un graphe de la forme (S, B) soit un arbre couvrant Γ, il est nécessaire que $B \subset A$ et que $|S| = |B| + 1$, donc que $B \in \mathscr{P}_{n-1}(A)$.

16. Étant donnée une partie $B \in \mathscr{P}_{n-1}(A)$, on note N_B la sous-matrice de N_Γ obtenue en sélectionnant les lignes d'indice i tel que $a_i \in B$, et on note N'_B la sous-matrice de N_B obtenue en supprimant la dernière colonne ; ainsi N'_B est carrée de taille $(n-1) \times (n-1)$. Démontrer que les quatre conditions suivantes sont équivalentes :

i) Le graphe (S, B) est un arbre couvrant Γ.

ii) Le graphe (S, B) est connexe.

iii) La matrice N_B est de rang $n - 1$.

iv) La matrice N'_B est inversible.

(Indication pour prouver l'implication iii) $\Rightarrow$ iv) : si N'_B n'est pas inversible, alors le noyau de N_B n'est pas engendré par le vecteur $(1, \ldots, 1)$.)

On note $\kappa(\Gamma)$ le nombre d'arbres couvrant Γ.

17. a) En utilisant la formule de Binet-Cauchy (question 11 b)) et les questions 13 et 16, démontrer que le déterminant de la sous-matrice de Q_Γ obtenue en supprimant la dernière ligne et la dernière colonne est égal à $\kappa(\Gamma)$.

b) En déduire, en utilisant la question 15 e), que : $\mathrm{com}(Q_\Gamma) = \kappa(\Gamma)\, J_n$.

18. Soit $\chi(X) = \det(XI_n - Q_\Gamma)$ le polynôme caractéristique de la matrice Q_Γ.
Prouver que : $\kappa(\Gamma) = \frac{(-1)^{n-1}}{n}\, \chi'(0)$.

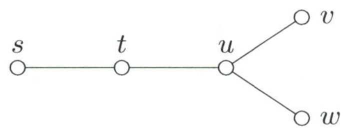
Partie III – Exemples de groupes d'automorphismes

Un automorphisme d'un graphe $\Gamma = (S, A)$ est une permutation $\sigma : S \to S$ telle que pour tout $(x, y) \in S^2$, on ait :

$$\{x, y\} \in A \iff \{\sigma(x), \sigma(y)\} \in A.$$

L'ensemble des automorphismes de Γ est un groupe pour la loi de composition, noté $\mathrm{Aut}(\Gamma)$ (admis).

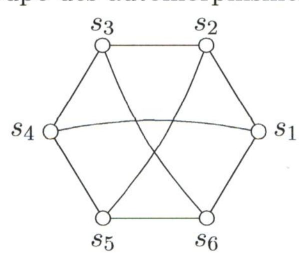
Par exemple, un automorphisme du graphe :



fixe nécessairement u, le seul point d'où partent trois arêtes, et fixe également les points s et t, situés sur la seule branche de longueur 2 issue de u. Il n'y a donc que deux automorphismes, à savoir l'identité et la transposition qui échange v et w.

Pour obtenir des descriptions explicites de $\mathrm{Aut}(\Gamma)$, il est commode d'énumérer les sommets, ainsi que cela a été fait dans les parties I et II. On note donc n le nombre de sommets et on choisit une bijection $i \mapsto s_i$ de $[\![1, n]\!]$ sur S. Ceci permet, par transport de structure, d'identifier le groupe des permutations de S au groupe symétrique $\mathfrak{S}_n$. Le groupe $\mathrm{Aut}(\Gamma)$ se trouve alors identifié à un sous-groupe de $\mathfrak{S}_n$.

19. Dans cette question, on étudie le groupe des automorphismes du graphe Γ dessiné ci-dessous.



On appelle 3-arc dans Γ un chemin (x_0, x_1, x_2, x_3) de longueur 3 tel que $x_0 \neq x_2$ et $x_1 \neq x_3$. (La notion de chemin dans un graphe est définie au début de la partie II.) On note $\mathscr{A}$ l'ensemble des 3-arcs dans Γ.

a) Combien $\mathscr{A}$ a-t-il d'éléments ?

On fait agir $\mathrm{Aut}(\Gamma)$ sur $\mathscr{A}$ en posant $\sigma \cdot (x_0, x_1, x_2, x_3) = (\sigma(x_0), \sigma(x_1), \sigma(x_2), \sigma(x_3))$.

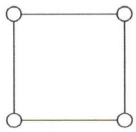
Grâce à la numérotation des sommets de Γ indiquée sur le dessin, on identifie $\mathrm{Aut}(\Gamma)$ à un sous-groupe de $\mathfrak{S}_6$. On observe, et on admettra, que $\mathrm{Aut}(\Gamma)$ contient le 6-cycle (123456) et les transpositions (13), (24), (35), (46), (15) et (26).

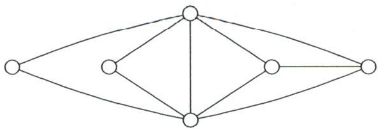
b) Démontrer que $\mathscr{A}$ ne contient qu'une seule orbite sous l'action de $\mathrm{Aut}(\Gamma)$.

c) Démontrer que $|\,\mathrm{Aut}(\Gamma)| = 72$.

d) Démontrer que $\mathrm{Aut}(\Gamma)$ est engendré par les permutations (123456) et (13).

20. On considère les deux graphes connexes dessinés ci-dessous.





Les groupes des automorphismes de ces deux graphes sont-ils isomorphes ?
(Indication : pour information, ces deux groupes sont d'ordre 8.)

Un groupe est dit **simple** s'il contient exactement deux sous-groupes distingués, à savoir lui-même et le sous-groupe réduit à l'élément neutre.

21. Soient G un groupe d'ordre 51 840 et H un sous-groupe de G d'indice 2.

a) Rappeler pourquoi H est un sous-groupe distingué de G.

b) On suppose que H est un groupe simple.
Prouver que H est le seul sous-groupe de G d'indice 2.

On peut démontrer que le groupe des automorphismes du graphe de Schläfli dessiné à la fin de la partie I possède 51 840 éléments et contient un sous-groupe simple d'indice 2. Ce sous-groupe est donc unique et est d'ordre 25 920. En fait, il n'existe à isomorphisme près qu'un seul groupe simple d'ordre 25 920 ; on peut le construire par diverses méthodes.

Partie IV – Une majoration du diamètre d'un graphe

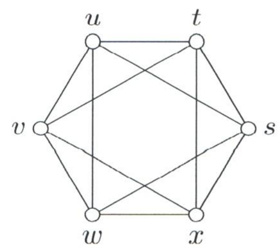
22. Soient n un entier supérieur ou égal à 1, k un nombre réel strictement positif et G une matrice de taille $n \times n$ à coefficients réels positifs ou nuls. On suppose que la somme des coefficients sur chaque ligne de G est égale à k.

a) Justifier que k est une valeur propre de G.

b) Prouver que chaque valeur propre $\lambda \in \mathbb{C}$ de G vérifie $|\lambda| \leqslant k$.
(Indication : considérer un vecteur propre $(x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{C}^n$ de G pour la valeur propre λ, choisir un indice i pour lequel $|x_i|$ est maximal, et analyser le système d'équations dont $(x_1, \ldots, x_n)$ est solution.)

Les notions de matrice d'adjacence d'un graphe et de graphe connexe sont définies dans les parties I et II ; le candidat est invité à relire les paragraphes concernés si nécessaire.

On dit qu'un graphe Γ est **régulier** de degré k, où k est un entier supérieur ou égal à 2, si de chaque sommet de Γ partent k arêtes. Ainsi le graphe dessiné ci-dessous est régulier de degré 4.



Soit $\Gamma = (S, A)$ un graphe connexe. Alors deux sommets quelconques de Γ sont toujours reliés par un chemin. Pour chaque couple $(x, y) \in S^2$, on appelle **distance** de x à y et on note $\delta(x, y)$ la plus petite des longueurs des chemins reliant x à y. Enfin, on appelle **diamètre** de Γ la plus grande des distances $\delta(x, y)$ pour $(x, y) \in S^2$. Par exemple, dans le graphe ci-dessus, on a $\delta(s, t) = \delta(s, u) = 1$ et $\delta(s, v) = 2$, et le graphe est de diamètre 2.

Tournez la page S.V.P.

Le but des questions suivantes est d'établir une majoration du diamètre d'un graphe connexe régulier de degré k.

Soit $\Gamma = (S, A)$ un graphe connexe régulier de degré k. On note n le nombre de sommets ($n \geqslant 2$) et on énumère les sommets : $S = \{s_1, s_2, \ldots, s_n\}$. On peut alors définir la matrice d'adjacence G_Γ.

La matrice G_Γ vérifie l'hypothèse de la question 22, ce qui implique que k est valeur propre de G_Γ et que chaque valeur propre λ de G_Γ vérifie $|\lambda| \leqslant k$. De plus, en utilisant l'hypothèse de connexité ainsi que les questions 14 b) et 15 b), on peut prouver que la multiplicité de k comme valeur propre de G_Γ est 1, ce que l'on admettra.

Puisque G_Γ est symétrique, il existe une base orthonormée $(\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_n)$ de $\mathbb{R}^n$ formée de vecteurs propres de G_Γ ; on suppose l'indexation choisie de façon que les valeurs propres λ_1, ..., λ_n auxquelles sont associés les vecteurs $\mathbf{v}_1$, ..., $\mathbf{v}_n$ vérifient

$$\lambda_1 = k \quad \text{et} \quad |\lambda_1| \geqslant |\lambda_2| \geqslant \cdots \geqslant |\lambda_n|.$$

Enfin, pour chaque $p \in [\![1, n]\!]$, le vecteur $\mathbf{v}_p$ appartient à $\mathbb{R}^n$, ce qui permet d'écrire $\mathbf{v}_p = (v_{p,1}, \ldots, v_{p,n})$.

23. Soit m un entier supérieur ou égal à 1. Pour $(i, j) \in [\![1, n]\!]^2$, on note $g_{i,j}^{(m)}$ le coefficient en position (i, j) de la matrice $(G_\Gamma)^m$.

a) Proposer une expression explicite du vecteur $\mathbf{v}_1$.

b) Démontrer que, pour chaque $i \in [\![1, n]\!]$, on a :

$$\sum_{p=1}^{n} (v_{p,i})^2 = 1.$$

c) Justifier la formule :

$$g_{i,j}^{(m)} = \sum_{p=1}^{n} \lambda_p^m \, v_{p,i} \, v_{p,j}.$$

d) En déduire l'inégalité :

$$g_{i,j}^{(m)} \geqslant \frac{k^m}{n} - |\lambda_2|^m \left(\sum_{p=2}^{n} (v_{p,i})^2 \right)^{1/2} \left(\sum_{p=2}^{n} (v_{p,j})^2 \right)^{1/2}.$$

e) On suppose que : $k^m > |\lambda_2|^m (n-1)$. Démontrer que $g_{i,j}^{(m)} > 0$ pour tout $(i, j) \in [\![1, n]\!]^2$.

f) Démontrer que $g_{i,j}^{(m)}$ est le nombre de chemins dans Γ de longueur m reliant s_i à s_j. (La notion de chemin dans un graphe est définie au début de la partie II.)

g) On suppose que $0 < |\lambda_2| < k$.

Soit m le plus petit entier supérieur à $\dfrac{\ln(n-1)}{\ln\left(\dfrac{k}{|\lambda_2|}\right)}$.

Démontrer que le diamètre de Γ est majoré par m.

FIN DU SUJET