# Agrégation interne 2019 première épreuve.

## Notations et rappels.

## I Partie I. Spectre d'un graphe et nombre chromatique.

1. (a) * Déterminons $\mathrm{rg}(G_{K_{a,b}})$.

Les vecteurs colonnes des colonnes 1 à $a$ de la matrice sont égaux donc liés deux à deux. De même pour les colonnes de $a+1$ à $b$.

De plus les vecteurs colonnes des colonnes $a$ et $a+1$ sont clairement libres. Ainsi :

$$\boxed{\mathrm{rg}(G_{K_{a,b}}) = 2.}$$

* Déterminons $\mathrm{tr}(G_{K_{a,b}})$.

Les coefficients diagonaux étant tous nuls

$$\boxed{\mathrm{tr}(G_{K_{a,b}}) = 0.}$$

* Déterminons $\mathrm{tr}\left(G^2_{K_{a,b}}\right)$.

Notons $\nVdash_{n,m}$ (respectivement $\nvdash_{n,m}$)la matrice $n \times m$ dont les coefficients sont tous des 1 (resp. des 0).

En travaillant par blocs nous avons

$$G_{K_{a,b}} = \begin{pmatrix} \nvdash_{a,a} & \nVdash_{a,b} \\ \nVdash_{b,a} & \nvdash_{bb,} \end{pmatrix}$$

En remarquant que $\nVdash_{a,b} \times \nVdash_{b,a} = b\nVdash_{a,a}$ nous obtenons

$$G^2_{K_{a,b}} = \begin{pmatrix} \nVdash_{a,a} & \nvdash_{a,b} \\ \nvdash_{b,a} & \nVdash_{b,b} \end{pmatrix}.$$

Par conséquent

$$\boxed{\mathrm{tr}\left(G^2_{K_{a,b}}\right) = a + b.}$$

(b) Déterminons le spectre de $G_{K_{a,b}}$.

* Comme le suggère l'énoncé étudions le cas de 0 comme valeur propre. Soit $X = {}^t(x_1,\dots,x_a,x_{a+1},\dots,x_{a+b})$.

$$G_{K_{a,b}}X = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x_{a+1}+\cdots+x_{a+b}=0 \\ x_1+\dots x_a = 0 \end{cases}$$

Autrement dit 0 est bien valeur propre pour $G_{K_{a,b}}$ et de plus sa multiplicité géométrique (et aussi algébrique puis la matrice étant symétrique réelle, elle est diagonalisable) est de $b-1+a-1=a+b-2$.

* Déterminons les autres valeurs de $G_{K_{a,b}}$ par analyse-synthèse.
Remarquons que la partie analyse peut être faite au brouillon et ne pas être rédigée.
Soit $(x_1,\dots,x_{a+b}) \in \mathbb{R}^{a+b}$ et $\lambda \in \mathbb{R}^*$ tel que

$$G_{K_{a,b}}\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_{a+b}\end{pmatrix} = \lambda \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_{a+b}\end{pmatrix}.$$

Donc

$$\begin{cases} x_{a+1}+\cdots+x_{a+b} = \lambda x_1 \\ \vdots \\ x_{a+1}+\cdots+x_{a+b} = \lambda x_a \\ x_1+\cdots+x_a = \lambda x_{a+1} \\ \vdots \\ x_1+\cdots+x_a = \lambda x_{a+b} \end{cases}$$

On en déduit $x_1=\cdots=x_a$ et $x_{a+1}=\cdots=x_{a+b}$ puis :

$$\begin{cases} ax_1 = \lambda x_{a+1} \\ bx_{a+1} = \lambda x_1 \end{cases}$$

Remarquons que si $x_1=0$ ou $x_{a+1}=0$ il en est de même pour l'autre puisque $\lambda \neq 0$ donc nécessairement $x_1$ et $x_{a+1}$ sont non nuls. En multipliant les inégalités : $abx_1x_{a+1} = \lambda^2 x_1 x_{a+1}$, puis en simplifiant : $\lambda = \varepsilon\sqrt{ab}$ avec $\varepsilon \in \{-1;1\}$.
Si par exemple $x_1=\sqrt{b}$ alors $x_{a+1}=\varepsilon\sqrt{a}$.

Réciproquement il est aisé de vérifier que ${}^t(\sqrt{b},\dots,\sqrt{b},\sqrt{a},\dots,\sqrt{a})$ est un vecteur propre de $G_{K_{a,b}}$ pour la valeur propre $\sqrt{ab}$ et qu'il en est de même pour ${}^t(\sqrt{b},\dots,\sqrt{b},-\sqrt{a},\dots,-\sqrt{a})$ et$-\sqrt{ab}$.

Les valeurs propres de $G_{K_{a,b}}$ sont 0 avec une multiplicité de $a+b-2$, $\sqrt{ab}$ avec une multiplicité de 1 et $-\sqrt{ab}$ avec une multiplicité de 1.

2. (a) Démontrons : $\forall \mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$, $(\mathbf{x}|M\mathbf{x}) \leqslant \lambda_{\max}(M)(\mathbf{x}|\mathbf{x})$.

Soit $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$.

$$(\mathbf{x}|M\mathbf{x}) = {}^t\mathbf{x}M\mathbf{x}$$

$M$ étant une matrice symétrique réelle, d'après le théorème spectral, il existe $P \in \mathrm{O}_(\mathbb{R})$ et $D = \mathrm{diag}(\lambda_1, \ldots, \lambda_n)$ telles que $M = {}^tPDP$.
Par conséquent

$$\begin{aligned}(\mathbf{x}|M\mathbf{x}) &= {}^t\mathbf{x}{}^tPDP\mathbf{x}\\ &= {}^t(P\mathbf{x})D(P\mathbf{x})\end{aligned}$$

Notons $P\mathbf{x} = \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}$.

$$\begin{aligned}(\mathbf{x}|M\mathbf{x}) &= \sum_{i=1}^{n} \lambda_i y_i^2\\ &\leqslant \lambda_{\max}(M)\sum_{i=1}^{n} y_i^2\\ &\leqslant \lambda_{\max}(M){}^t(P\mathbf{x})P\mathbf{x}\\ &\leqslant \lambda_{\max}(M){}^t\mathbf{x}{}^tPP\mathbf{x}\end{aligned}$$

Puisque $P \in \mathrm{O}_n(\mathbb{R})$ :

$$\begin{aligned}(\mathbf{x}|M\mathbf{x}) &\leqslant \lambda_{\max}(M){}^t\mathbf{x}\mathbf{x}\\ &\leqslant \lambda_{\max}(M)(\mathbf{x}|\mathbf{x})\end{aligned}$$

En procédant de même pour la plus petite valeur propre nous obtiendrions

$$\forall \mathbf{x} \in \mathbb{R}^n,\ \lambda_{\min}(M)(\mathbf{x}|\mathbf{x}) \leqslant (\mathbf{x}|M\mathbf{x}) \leqslant \lambda_{\max}(M)(\mathbf{x}|\mathbf{x})$$

(b) Démontrons que $\lambda_{\max}(M) = \max_{\mathbf{x}\in\mathbb{R}^n\setminus\{0\}} \frac{(\mathbf{x}|M\mathbf{x})}{(\mathbf{x}|\mathbf{x})}$.

* D'après la question précédente $\lambda_{\max}(M)$ est un majorant de

$$\left\{ \frac{(\mathbf{x}|M\mathbf{x})}{(\mathbf{x}|\mathbf{x})} \mid \mathbf{x} \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\} \right\}.$$

* De plus $\frac{(\mathbf{x}|M\mathbf{x})}{(\mathbf{x}|\mathbf{x})} = \lambda_{\max}$ lorsque $x$ est un vecteur propre associé à la valeur propre $\lambda_{\max}$.

$$\boxed{\lambda_{\max}(M) = \max_{\mathbf{x}\in\mathbb{R}^n\setminus\{0\}} \frac{(\mathbf{x}|M\mathbf{x})}{(\mathbf{x}|\mathbf{x})}.}$$

de même

$$\boxed{\lambda_{\min}(M) = \min_{\mathbf{x}\in\mathbb{R}^n\setminus\{0\}} \frac{(\mathbf{x}|M\mathbf{x})}{(\mathbf{x}|\mathbf{x})}.}$$

3. (a) Démontrons : $\lambda_{\max}(M') \leqslant \lambda_{\max}(M)$.

$$\left\{ \frac{\begin{pmatrix} {}^t\mathbf{x}' & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} M' & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{x}' \\ 0 \end{pmatrix}}{\begin{pmatrix} {}^t\mathbf{x}' & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{x}' \\ 0 \end{pmatrix}} \mid \mathbf{x}' \in \mathbb{R}^{n'} \right\} \subset \left\{ \frac{{}^t\mathbf{x}M\mathbf{x}}{{}^t\mathbf{x}\mathbf{x}} \mid \mathbf{x} \in \mathbb{R}^n \right\}$$

donc

$$\forall \mathbf{x}' \in \mathbb{R}^{n'}, \ \frac{\begin{pmatrix} {}^t\mathbf{x}' & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} M' & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{x}' \\ 0 \end{pmatrix}}{\begin{pmatrix} {}^t\mathbf{x}' & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{x}' \\ 0 \end{pmatrix}} \leqslant \sup_{\mathbf{x}\in\mathbb{R}^n\setminus\{0\}} \frac{(\mathbf{x}|M\mathbf{x})}{(\mathbf{x}|\mathbf{x})}$$

Or : $\frac{\begin{pmatrix} {}^t\mathbf{x}' & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} M' & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{x}' \\ 0 \end{pmatrix}}{\begin{pmatrix} {}^t\mathbf{x}' & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{x}' \\ 0 \end{pmatrix}} = \frac{{}^t\mathbf{x}'M'\mathbf{x}'}{{}^t\mathbf{x}'\mathbf{x}'}$, donc

$$\forall \mathbf{x}' \in \mathbb{R}^{n'}, \ \frac{{}^t\mathbf{x}'M'\mathbf{x}'}{{}^t\mathbf{x}'\mathbf{x}'} \leqslant \sup_{\mathbf{x}\in\mathbb{R}^n\setminus\{0\}} \frac{(\mathbf{x}|M\mathbf{x})}{(\mathbf{x}|\mathbf{x})}.$$

Enfin

$$\sup_{\mathbf{x}'\in\mathbb{R}^{n'}\setminus\{0\}} \frac{(\mathbf{x}'|M\mathbf{x}')}{(\mathbf{x}'|\mathbf{x}')} \leqslant \sup_{\mathbf{x}\in\mathbb{R}^n\setminus\{0\}} \frac{(\mathbf{x}|M\mathbf{x})}{(\mathbf{x}|\mathbf{x})}.$$

Autrement dit

$$\boxed{\lambda_{\max}(M') \leqslant \lambda_{\max}(M).}$$

En procédant de même nous établirions $\lambda_{\min}(M) \leqslant \lambda_{\min}(M')$. Comme d'après la question 2.(a) $\lambda_{\min}(M') \leqslant \lambda_{\max}(M')$ nous obtenons finalement

$$\boxed{\lambda_{\min}(M) \leqslant \lambda_{\min}(M') \leqslant \lambda_{\max}(M') \leqslant \lambda_{\max}(M)}$$

(b) Démontrons : $\forall(\mathbf{x}',\mathbf{x}'') \in \mathbb{R}^{n'} \times \mathbb{R}^{n''}$, $(\mathbf{x}'|L\mathbf{x}'')^2 \leqslant (\mathbf{x}'|M'\mathbf{x}')\cdot(\mathbf{x}''|M''\mathbf{x}'')$.

Soient $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$ et, comme l'indique l'énoncé, $t \in \mathbb{R}$, $\mathbf{x}_t = (t\mathbf{x}',\mathbf{x}'')$.
En utilisant la décomposition par blocs proposée dans l'énoncé :

$${}^t\mathbf{x}_t M \mathbf{x}_t = \begin{pmatrix} t\,{}^t\mathbf{x}' & {}^t\mathbf{x}'' \end{pmatrix} \begin{pmatrix} M' & L \\ {}^tL & M'' \end{pmatrix} \begin{pmatrix} t\mathbf{x}' \\ \mathbf{x}'' \end{pmatrix}$$

Donc

$${}^t\mathbf{x}_t M \mathbf{x}_t = \begin{pmatrix} t\,{}^t\mathbf{x}' & {}^t\mathbf{x}'' \end{pmatrix} \begin{pmatrix} tM'\mathbf{x}' + L\mathbf{x}'' \\ t\,{}^tL\mathbf{x}' + M''\mathbf{x}'' \end{pmatrix}$$

Enfin

$${}^t\mathbf{x}_t M \mathbf{x}_t = t^2\,{}^t\mathbf{x}' M'\mathbf{x}' + t\,{}^t\mathbf{x}' L\mathbf{x}'' + t\,{}^t\mathbf{x}''\,{}^tL\mathbf{x}' + {}^t\mathbf{x}'' M''\mathbf{x}''$$

Autrement dit, et puisque ${}^t\mathbf{x}' L\mathbf{x}'' = {}^t\mathbf{x}''\,{}^tL\mathbf{x}'$ (transposée d'un nombre),

$$(\mathbf{x}_t|M\mathbf{x}_t) = (\mathbf{x}'|M'\mathbf{x}')t^2 + 2(\mathbf{x}'|L\mathbf{x}'')t + (\mathbf{x}''|M''\mathbf{x}'')$$

* Si $(\mathbf{x}'|M'\mathbf{x}') = 0$ alors $t \mapsto (\mathbf{x}_t|M\mathbf{x}_t)$ est une fonction affine qui ne change pas de signe donc constante donc $(\mathbf{x}'|L\mathbf{x}'') = 0$. L'inégalité souhaitée et donc vérifiée.
* Supposons $(\mathbf{x}'|M'\mathbf{x}') \neq 0$.
  Dans ce cas $(\mathbf{x}_t|M\mathbf{x}_t)$ est une fonction polynomiale de degré deux qui ne change pas de signe donc nécessairement son discriminant est négatif :

$$\left(2(\mathbf{x}'|L\mathbf{x}'')\right)^2 - 4(\mathbf{x}'|M'\mathbf{x}')\cdot(\mathbf{x}''|M''\mathbf{x}'') \leqslant 0.$$

Ainsi dans tous les cas

$$\boxed{\forall(\mathbf{x}',\mathbf{x}'') \in \mathbb{R}^{n'} \times \mathbb{R}^{n''},\ (\mathbf{x}'|L\mathbf{x}'')^2 \leqslant (\mathbf{x}'|M'\mathbf{x}')\cdot(\mathbf{x}''|M''\mathbf{x}'').}$$

(c)

(d) Démontrons : $\lambda_{\max}(M)+\lambda_{\min}(M)\leqslant\lambda_{\max}(M')+\lambda_{\max}(M'')$.

Soit $M\in\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

Utilisons l'indication donné par l'énoncé.
Il est aisé de vérifié que si $\mu$ est un réel alors $\mathbf{x}$ est un vecteur propre de $M$ symétrique pour la valeur propre $\lambda$ si et seulement si $\mathbf{x}$ est un vecteur propre de $M+\mu I_n$, également symétrique, pour la valeur propre $\lambda+\mu$.
Ainsi : $\mathrm{Sp}(M+\mu I_n)=\{\lambda+\mu\mid\lambda\in\mathrm{Sp}(M)\}$. En particulier : $\lambda_{\max}(M+\mu I_n)=\lambda_{\max}(M)+\mu$ et $\lambda_{\min}(M+\mu I_n)=\lambda_{\min}(M)+\mu$.

Nous en déduisons en particulier que $\mathrm{Sp}\left(M-\lambda_{\min}(M)I_n\right)\subset\mathbb{R}_+$. Autrement dit $M-\lambda_{\min}(M)I_n$ est une matrice symétrique positive.
Or, dans ce cas, d'après la question 3.(c)

$$\lambda_{\max}\left(M-\lambda_{\min}(M)I_n\right)\leqslant\lambda_{\max}\left(M'-\lambda_{\min}(M)I_{n'}\right)+\lambda_{\max}\left(M''-\lambda_{\min}(M)I_{n''}\right)$$

donc

$$\lambda_{\max}(M)-\lambda_{\min}(M)\leqslant\lambda_{\max}(M')-\lambda_{\min}(M)+\lambda_{\max}(M'')-\lambda_{\min}(M),$$

Ainsi nous avons établi

$$\boxed{\begin{array}{c}\text{quelque soit } M\in\mathcal{M}_n(\mathbb{R}),\\ \lambda_{\max}(M)+\lambda_{\min}(M)\leqslant\lambda_{\max}(M')+\lambda_{\max}(M'').\end{array}}$$

4. Démontrons par récurrence que : $\forall k\geqslant 2$, $\lambda_{\max}(M)+(k-1)\lambda_{\min}(M)\leqslant\lambda_{\max}(M_1)+\cdots+\lambda_{\max}(M_k)$.

* Le cas $k=2$ a été traité à la question précédente.
* Soit $k\geqslant 2$. Supposons que l'égalité est vraie pour $k$ et démontrons qu'elle alors encore vraie pour $k+1$.
Notons
$$\begin{pmatrix} M_1 & * & \dots & * \\ * & M_2 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & * \\ * & \dots & * & M_k \end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\tilde{M} & * \\ * & M_{k+1}\end{pmatrix}.$$
D'après la question précédente
$$\lambda_{\max}(M)+\lambda_{\min}(M)\leqslant\lambda_{\max}(\tilde{M})+\lambda_{\max}(M_{k+1})$$

Donc, en utilisant l'inégalité de l'hypothèse de récurrence appliquée à $\tilde{M}$ qui est une matrice avec $k$ blocs diagonaux :

$$\lambda_{\max}(M) + \lambda_{\min}(M) \leqslant \lambda_{\max}(M_1) + \cdots + \lambda_{\max}(M_k) + (k-1)\lambda_{\min}(M) \\ + \lambda_{\max}(M_{k+1})$$

Autrement dit

$$\lambda_{\max}(M) + k\lambda_{\min}(M) \leqslant \lambda_{\max}(M_1) + \cdots + \lambda_{\max}(M_{k+1}).$$

L'inégalité est donc vraie au rang $k+1$.

Nous avons démontré par récurrence que $\lambda_{\max}(M) + (k-1)\lambda_{\min}(M) \leqslant \lambda_{\max}(M_1) + \lambda_{\max}(M_2) + \cdots + \lambda_{\max}(M_k)$.

5. (a) Soit $M$ la matrice d'adjacence de $\Gamma$.

Démontrons que $M$ admet une valeur propre strictement négative.

Puisque $\Gamma$ admet au moins une arête, $M$ n'est pas nulle donc son spectre n'est pas réduit à 0. Soit $\lambda_0$ une valeur propre non nulle de $M$.

i. Si $\lambda_0 < 0$ la question résolue.

ii. Si $\lambda_0 > 0$ alors puisque $\mathrm{tr}(M) = \sum_{\lambda \in \mathrm{Sp}(M)} \lambda = 0$, nécessairement il existe $\mu \in \mathrm{SP}(M)$ tel que $\mu < 0$.

Ainsi $M$ admet une valeur propre strictement négative et par conséquent

$$\lambda_{\min} < 0.$$

(b)

# II Partie II. Nombre d'arbres couvrant un graphe.

6. Justifions que $\sim$ est une relation d'équivalence.

$\sim$ est une relation binaire sur $E$.

* Puisque le cas $\ell = 0$ d'un chemin réduit à un somme est autorisé $\sim$ est réflexive.

* Si $x_0 \sim x_\ell$ avec le chemin $(x_0,x_1,\ldots,x_\ell)$ alors $x_\ell \sim x_0$ puisque le chemin $(x_\ell,x_{\ell-1},\ldots,x_0)$ convient. Ainsi $\sim$ est symétrique.
* Si $x_0 \sim x_\ell$ avec le chemin $(x_0,x_1,\ldots,x_\ell)$ et $x_\ell \sim x_{\ell'}$ avec le chemin $(x_\ell,x_{\ell+1},\ldots,x_{\ell'})$ alors $x_0 \sim x_{\ell'}$) avec le chemin $(x_0,x_1,\ldots,x_{\ell'})$.

$\sim$ est une relation d'équivalence sur $S$.

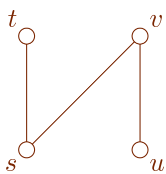
7. Démontrons l'existence d'une arête reliant $S'$ à $S''$.

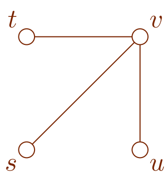
Soit $x' \in S'$ et $x'' \in S''$.
Puisque $S$ est connexe il admet une unique composante connexe. Par conséquent $x' \sim x''$. Ainsi il existe un chemin $c_0 = (x',x_1,x_2,\ldots,x_{n-1},x'')$. Et en notant $x' = x_0$ et $x'' = x_n$ nous avons $c_0 = (x_0,\ldots,x_n)$.
Construisons une suite de chemins par récurrence : $c_0$ est le chemin précédent et pour tout $i \in \mathbb{N}$, $c_{i+1}$ est le chemin obtenu de la façon suivante : si le second sommet de $c_i$ est dans $S''$ alors $c_{i+1} = c_i$ sinon $c_{i+1}$ est le chemin obtenu en ôtant le premier sommet du chemin $c_i$.
La suite $(\#(c_i))_{i\in\mathbb{N}}$ des cardinaux des chemins est une suite décroissante d'entiers naturels donc elle est stationnaire à partir d'un certain rang.
De plus $\#(c_i) > 1$ car $x_n \in S''$. Soit $i_0$ le plus petit indice à partir duquel $(\#(c_i))_{i\in\mathbb{N}}$ est stationnaire. Alors $x_{i_0} \in S'$ mais $x_{i_0+1} \in S''$.

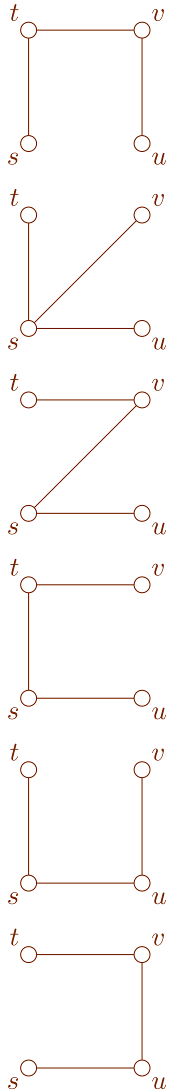
Il existe donc une arête reliant un élément de $S'$ à une élément de $S''$.

8. Dessinons tous les arbres couvrants.

$S$ ayant quatre sommets, $B$ doit contenir 3 arêtes choisies parmi celles dans $A$. Comme de plus les arbres doivent êtres connexes les arbres couvrants possibles sont :






9. (a) $$\boxed{M\,{}^t\mathrm{com}(M) = \det(M).}$$

(b)

(c)

10. (a)

    (b)

11. (a)

    (b)

12.

13.

14. (a)

    (b)

    (c)

15. (a)

    (b)

    (c)

    (d)

    (e)

16.