Agrégation interne 2018 deuxième épreuve.

Durée : 6 heures.
L'usage de tout ouvrage de référence et de tout matériel électronique (y compris la calculatrice) est rigoureusement interdit.

Dans ce problème, on s'intéresse à des propriétés utilisant la notion de distance d'un point à une partie d'un ensemble.

Dans la partie I-A, on étudie des généralités sur cette notion dans le cas d'un espace métrique et d'un espace affine euclidien.

Dans la partie I-B, on donne des exemples de calcul de distance dans $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$.

Dans la partie II, on étudie les points d'une courbe situés à égale distance d'une droite .
Cette partie II est indépendante de la partie I.

Dans la partie III, on étudie la notion de ligne médiatrice de deux fermés non vides séparés par une droite .
Cette partie III est indépendante des partie I-B et II.

Dans la partie IV, on s'intéresse à l'asymptote de la ligne médiatrice des deux compacts non vides séparés par une droite.

Préambule : notations et rappels.

- $\triangleright$ $\mathbb{N}$ désgne l'ensemble des entiers naturels et $\mathbb{R}$ le corps des nombres réels.
- $\triangleright$ $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ désigne l'ensemble des matrices carrées de taille $n \geqslant 1$ à coefficients dans $\mathbb{R}$. On note I_n son élément unité et 0_n la matrice nulle.
- $\triangleright$ $\mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$ désigne l'ensemble des matrices inversibles de $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$. Si $A \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$, on note A^{-1} son inverse.
- $\triangleright$ $\mathrm{O}_n(\mathbb{R})$ désigne l'ensemble des matrices orthogonales de $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$.
- $\triangleright$ Pour $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$, $\det(A)$ et ${}^tA$ désignent respectivement le déterminant et la transposée de A.
- $\triangleright$ Une matrice $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ est dite symétrique si elle est égale à sa transposée.

On rappelle les définitions et propriétés suivantes :

- $\triangleright$ Soit E un espace métrique muni d'une distance d.
  Pour $x \in E$ et A une partie non vide de E, on appelle distance de x à A, le réel défini par :
  $$d(x,A) = \inf_{a \in A} d(x,a).$$
  Pour A une partie non vide de E, on définit l'application $d_A : x \mapsto d(x,A)$ de E dans $\mathbb{R}$.

- ▷ On se donne, dans $\mathbb{R}^2$ muni de sa structure affine euclidienne usuelle, un point F et une droite Δ ne contenant pas F. La parabole de foyer F et de directrice Δ est l'ensemble des points m de $\mathbb{R}^2$ tels que : $d(m,F) = d_\Delta(m)$ (où d désigne la distance euclidienne de $\mathbb{R}^2$).
- ▷ Soit E un espace métrique muni d'une distance d. soient $f : E \to \mathbb{R}$ une application et k un réel strictement positif.
  On dit que f est k-lipschitzienne si : $\forall (x,y) \in E^2,\ |f(x) - f(y)| \leqslant kd(x,y)$.
  On dit que f lipschitzienne s'il existe $k > 0$ tel que f est k-lipschitzienne.

I Quelques propriétés de la distance à un fermé.

Partie A : généralités.

Soit E un espace métrique muni d'une distance d.

1. Soient A et B des parties non vides de E avec $A \subset B$.
   Démontrer que : $\forall x \in E,\ d_B(x) \leqslant d_A(x)$.

   Montrons : $\forall x \in E,\ d_B(x) \leqslant d_A(x)$.

   Soit $x \in E$.
   Puisque A et B sont non vides, $\{d(x,a) \mid a \in A\}$ et $\{d(x,b) \mid b \in B\}$ sont des parties non vides et minorées (par 0) de $\mathbb{R}$ qui admettent donc des bornes inférieures.
   De $A \subset B$ nous déduisons

   $$\{d(x,a) \mid a \in A\} \subset \{d(x,b) \mid b \in B\},$$

   d'où

   $$\forall a \in A,\ \inf \{d(x,b) \mid b \in B\} \leqslant d(x,a),$$

   et par conséquent

   $$\inf \{d(x,b) \mid b \in B\} \leqslant \inf \{d(x,a) \mid a \in A\}.$$

   Nous avons donc démontré que

   $$\boxed{\text{si } A \subset B, \text{ alors } \forall x \in E,\ d_B(x) \leqslant d_A(x).}$$

2. On considère A une partie non vide de E et on note $\overline{A}$ son adhérence.
Démontrer que : $\forall x \in E,\ d_A(x) = 0 \Leftrightarrow x \in \overline{A}$.

Démontrons que : $\forall x \in E,\ d_A(x) = 0 \Leftrightarrow x \in \overline{A}$.

Soit $x \in E$.
Notons $\mathscr{O}_x$ l'ensemble des voisinages de x pour la topologie induite par d et $B(x,r)$ la boule de centre x et de rayon $r > 0$.
Puisque A est non vide :

$$\begin{aligned} x \in \overline{A} &\Leftrightarrow \forall V \in \mathscr{O}_x,\ V \cap A \neq \emptyset \\ &\Leftrightarrow \forall r > 0,\ B(x,r) \cap A \neq \emptyset \\ &\Leftrightarrow \forall r > 0,\ \exists a \in A,\ 0 \leqslant d(a,x) < r \\ &\Leftrightarrow \inf\left\{d(a,x) \mid a \in A\right\} = 0, \text{ car } A \neq \emptyset \\ &\Leftrightarrow d(x,A) = 0 \end{aligned}$$

Ainsi

$$\boxed{\forall x \in E,\ d_A(x) = 0 \Leftrightarrow x \in \overline{A}.}$$

3. On considère A une partie non vide de E.

   (a) Démontrer que, pour tout $(x,y) \in E^2$, on a : $d_A(x) \leqslant d(x,y) + d_A(y)$.

   Montrons : $\forall (x,y) \in E^2,\ d_A(x) \leqslant d(x,y) + d_A(y)$.

   Soit $(x,y) \in E^2$.
   Soit $b \in A$.
   Nous avons l'inégalité triangulaire

$$d(b,x) \leqslant d(b,y) + d(y,x).$$

   Or $d_A(x) = \inf\left\{d(a,x) \mid a \in A\right\} \leqslant d(b,x)$ donc

$$d_A(x) \leqslant d(b,y) + d(y,x).$$

   Ainsi :

$$\forall b \in A,\ d_A(x) - d(x,y) \leqslant d(b,y).$$

   D'où, A et donc $\left\{d(b,y) \mid b \in A\right\}$ étant non vides

$$d_A(x) - d(x,y) \leqslant \inf\left\{d(b,y) \mid b \in A\right\},$$

i.e.

$$d_A(x) \leqslant d_A(y) + d(x,y).$$

Nous avons démontré que

$$\boxed{\forall (x,y) \in E^2,\ d_A(x) \leqslant d(x,y) + d_A(y).}$$

(b) En déduire que d_A est une application lipschitzienne de E dans $\mathbb{R}$.

Démontrons que d_A est lipschitzienne.

Par construction d_A est bien une application de E dans $\mathbb{R}$.
Soit $(x,y) \in E^2$.
D'après la question précédente : $d_A(x) - d_A(y) \leqslant d(x,y)$. De façon symétrique nous obtiendrions : $d_A(y) - d_A(x) \leqslant d(x,y)$. Nous en déduisons :

$$|d_A(x) - d_A(y)| \leqslant 1 \cdot d(x,y).$$

Finalement

$$\boxed{d_A \text{ est une application 1-lipschitzienne de } E \text{ dans } \mathbb{R}.}$$

4. On considère A une partie non vide de E et on note $\overline{A}$ son adhérence.
Démontrer que : $d_A = d_{\overline{A}}$.

Démontrons $d_{\overline{A}} = d_A$ en établissant les deux inégalités.

* $A \subset \overline{A}$ donc, d'après la question IA1, $d_{\overline{A}} \leqslant d_A$.
* Soient $x \in E$ et $b \in \overline{A}$.
  D'après la question IA3a :

$$d_A(x) \leqslant d_A(b) + d(x,b).$$

Or, puisque $b \in \overline{A}$,d'après IA2, $d_A(b) = 0$, donc

$$\forall b \in \overline{A},\ d_A(x) \leqslant d(x,b).$$

D'où, A, $\overline{A}$ et $\left\{d(x,b \mid b \in \overline{A}\right\}$ étant non vide :

$$\begin{aligned} d_A(x) &\leqslant \inf \left\{d(x,b) \mid b \in \overline{A}\right\} \\ d_A(x) &\leqslant d_{\overline{A}}(x) \end{aligned}$$

Ainsi : $d_A \leqslant d_{\overline{A}}$.

Nous avons établi

$$\boxed{d_A = d_{\overline{A}}.}$$

5. (a) Soient A et B deux parties fermées non vides de E. Démontrer que : $d_A = d_B \Leftrightarrow A = B$.

Démontrons par double implication que : $d_A = d_B \Leftrightarrow A = B$.

* Trivialement si $A = B$ alors $d_A = d_B$.

* Démontrons : $d_A = d_B \Rightarrow A = B$.
Autrement dit il s'agit d'établir que :

$$[\forall x \in E,\, d_A(x) = d_B(x)] \Rightarrow A = B.$$

Pour cela nous allons établir sa contraposée, à savoir

$$A \neq B \Rightarrow [\exists x \in E,\, d_A(x) \neq d_B(x).]$$

Supposons donc $A \neq B$.
Autrement dit : $\exists x_0 \in B,\, x_0 \notin A$.

- Puisque $x_0 \in B$, évidemment $d_B(x_0) = 0$.
- A étant un fermé $A = \overline{A}$ donc, d'après la question IA2 , comme A est non vide et que $x_0 \notin \overline{A}$ nécessairement $d_A(x_0) > 0$.

Ainsi $d_A(x_0) \neq d_B(x_0)$.

Nous avons donc établi que $d_A = d_B \Rightarrow A = B$.

$$\boxed{\text{Ainsi : } d_A = d_B \Leftrightarrow A = B\,;}$$

(b) En déduire alors une condition nécessaire et suffisante très simple sur des parties non vides A et B de E pour avoir la relation $d_A = d_B$.

Nous déduisons de la question précédente que si A et B sont des parties non vides de E alors

$$\boxed{d_A = d_B \Leftrightarrow \overline{A} = \overline{B}.}$$

6. On suppose que A est un compact non vide de E.
Montrer que, pour tout élément x de E, il existe $a \in A$ tel que : $d_A(x) = d(x,a)$.

Montrons : $\forall x \in E, \exists a \in A, d_A(x) = d(x,a)$.

Soit $x \in E$.
$d_{\{x\}} : \left\{ \begin{array}{ccc} E & \to & \mathbb{R} \\ b & \mapsto & d(x,b) \end{array} \right.$ est une application continue puisque lipschitzienne d'après la question IA3b.
Or une fonction numérique continue sur un compact est bornée et atteint ses bornes donc il existe $a \in A$ tel que

$$d_{\{x\}}(a) = \inf\{d(x,b) \mid b \in A\}.$$

Autrement dit

$$\boxed{\text{il existe } a \in A}$$

7. On suppose que E est un espace affine euclidien et que d est la distance euclidienne associée.
On considère A une partie fermée non vide de E
Montrer que, pour tout point m de E, il existe $a \in A$ tel que : $d_A(m) = d(a,m)$.

E étant un espace affine euclidien il est homéomorphe à $\mathbb{R}^n$ muni de la topologie usuelle pour un certain $n \in \mathbb{N}$. Nous pouvons donc raisonner dans ce dernier espace.
Soit A une partie fermée non vide de $\mathbb{R}^n$.

Démontrons : $\forall m \in \mathbb{R}^n, \exists a \in A, d(a,m) = d_A(m)$.

Soit $m \in \mathbb{R}^n$ et $\varepsilon > 0$.
Par construction de la borne inférieure, et en notant B_f les boules fermées, $A' = A \cap B_f(m,d_A(m) + \varepsilon)$ est non vide.
Ainsi A' est une partie non vide fermée et bornée de $\mathbb{R}^n$, donc, d'après le théorème de Borel-Lebesgue, A' est une partie compacte.
D'après la question précédente il existe donc $a \in A'$ tel que $d_{A'}(m) = d(a,m)$.
D'après la question 1, et puisque $A' \subset A$, $d_{A'}(m) \leqslant d_A(m)$. Ainsi : $d(a,m) \leqslant d_A(m)$ et par conséquent, $d_A(m)$ étant une borne inférieure,

$$\boxed{\text{il existe } a \in A \text{ tel que } d_A(m) = d(a,m).}$$

8. On se place dans $E = \mathbb{R}$ muni de sa distance usuelle et on considère une partie non vide A de $\mathbb{R}$.
   On suppose que, pour tout réel x, il existe un unique élément $a \in A$ tel que : $d_A(x) = d(x,a) = |x - a|$.

   (a) Démontrer que A est un fermé.

   Démontrons que A^c est un ouvert. Si $A = \mathbb{R}$ le résultat est évident sinon il suffit de démontrer que A^c est un voisinage de chacun de ses points. Puisque $\mathbb{R}$ est un espace métrique et que les boules ouvertes forment une base topologique, il suffit de montrer que chaque point de A^c appartient à une une boule ouverte incluse dans A^c.
   Démontrons : $\forall x \in A^c, \exists \varepsilon \in \mathbb{R}^+, B(x,\varepsilon) \subset A^c$.

   Soit $x \in A^c$.
   Par hypothèse il existe $a_x \in A$ tel que $d_A(x) = d(a_x,x)$.
   Puisque $d(a_x,x)$ est un minimum nécessairement $B\left(x,d(a_x,x)\right) \cap A = \emptyset$.
   Par conséquent $B\left(x,d(a_x,x)\right) \subset A^c$.
   Nous pouvons donc conclure

   $$\boxed{A \text{ est un fermé.}}$$

   (b) Démontrer que A est un intervalle.

9. On se place dans $E = \mathbb{R}^n$ avec $n \geqslant 1$, muni de sa structure affine euclidienne usuelle. On note d la distance euclidienne associée.
   On considère H un hyperplan de $\mathbb{R}^n$ dont une équation cartésienne est : $a_1x_1 + \cdots + a_nx_n + b = 0$, où $(a_1, \ldots ,a_n)$ est un élément non nul de $\mathbb{R}^n$ et $b \in \mathbb{R}$.
   Établir pour tout $x = (x_1, \ldots ,x_n) \in \mathbb{R}^n$, la relation :

$$d_H(x) = \frac{|a_1x_1 + \cdots + a_nx_n|}{\sqrt{a_1^2 + \cdots + a_n^2}}.$$

Notons $\tilde{x}$ le projeté orthogonal de x sur H et $\vec{e}(a_1, \ldots ,a_n)$ un vecteur (non nul par hypothèse) normal à H.
Par conséquent

$$\overrightarrow{\tilde{x}x} = \varepsilon d_H(x)\frac{1}{\|\vec{e}\|}\vec{e},$$

avec $\varepsilon = \pm 1$ suivant que $\overrightarrow{\tilde{x}x}$ et $\vec{e}$ sont de même sens ou de sens contraire.

D'où
$$\varepsilon\overrightarrow{\tilde{x}x}\cdot\frac{1}{\|\vec{e}\|}\vec{e}=d_H(x).$$

Ce qui équivaut à

$$\frac{\varepsilon}{\|\vec{e}\|}\left(a_1(x_1-\tilde{x}_1)+\cdots+a_n(x_n-\tilde{x}_n)\right)=d_H(x)$$

Et puisque $\tilde{x}\in H$, $a_1\tilde{x}_1+\cdots+\tilde{x}_n=-b$ donc :

$$\frac{1}{\|\vec{e}\|}\left|a_1x_1+\cdots+a_nx_n+b\right|=d_H(x)$$

$$\boxed{d_H(x)=\frac{|a_1x_1+\cdots+a_nx_n|}{\sqrt{a_1^2+\cdots+a_n^2}}.}$$

Partie B : quelques exemples dans $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$.

Soit un entier $n\geqslant 2$. Soit $E=\mathbb{R}^n$ muni de sa structure euclidienne usuelle dont la norme est notée $\|\cdot\|$.

Pour une matrice $M\in\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ dont u est l'endomorphisme de $\mathbb{R}^n$ canoniquement associé, on pose :

$$\|u\|=\sup_{x\in E,\|x\|=1}\|u(x)\|\quad\text{et}\quad\|M\|=\|u\|.$$

On rappelle que l'on définit ainsi une norme d'algèbre sur $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ (notée également $\|\cdot\|$), c'est-à-dire une norme vérifiant :

(i) $\|I_n\|=1$;

(ii) $\forall(A,B)\in\mathscr{M}_n(\mathbb{R})^2$, $\|AB\|\leqslant\|A\|\|B\|$.

En particulier, on a : $\forall k\in\mathbb{N}$, $\forall A\in\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$, $\|A^k\|\leqslant\|A\|^k$.

Sur $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$, on considère la distance d associée à la norme d'algèbre $\|\cdot\|$ (*i.e.* $\forall(M,N)\in\mathscr{M}_n(\mathbb{R})^2$, $d(M,N)=\|M-N\|$).

10. (a) Soit u un endomorphisme symétrique de $\mathbb{R}^n$ à valeurs propres positives ou nulles.

Démontrer à l'aide d'une réduction dans une base orthonormale que $\|u\|$ est le maximum de ses valeurs propres.

Démontrons : $\|u\| = \max\{\lambda \in \mathbb{R} \mid \lambda \in \mathrm{SP}_{\mathbb{R}}(u)\}$.

Puisque u est un endomorphisme symétrique d'un $\mathbb{R}$-espace vectoriel de dimension finie, il existe une base orthonormale $(X_1,\dots,X_n)$ de E telle que pour tout $i \in [\![1,n]\!]$, $\exists \lambda_i \in \mathbb{R}$, $u(X_i) = \lambda_i X_i$.
Les λ_i sont donc des valeurs propres de u et sont donc, par hypothèse, positives.
Soit $q \in [\![1,n]\!]$ l'indice du maximum des λ_i.

* $\|X_q\| = 1$ et

$$\begin{aligned}\|u(X_q)\| &= \|\lambda_q X_q\| \\ &= \lambda_q \|X_q\|\end{aligned}$$

  Et donc :

$$\begin{aligned}\lambda_q &= \|u(X_q)\| \\ &\leqslant \|u\|\end{aligned}$$

* Soit $X \in E$ tel que $\|X\| = 1$. Notons : $X = x_1 X_1 + \cdots + x_n X_n$.

$$\|u(X)\| = \left\| \sum_{i=1}^{n} x_i \lambda_i X_i \right\|$$

  Puisque $(X_1,\dots,X_n)$ est orthonormale :

$$\begin{aligned}\|u(X)\| &= \sqrt{\sum_{i=1}^{n} x_i^2 \lambda_i^2} \\ &\leqslant \lambda_q \sqrt{\sum_{i=1}^{n} x_i^2}\end{aligned}$$

  Et puisque $\|X\| = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} x_i^2} = 1$

$$\|u(X)\| \leqslant \lambda_q$$

  Ainsi : $\forall X \in E$, $(\|X\| = 1) \Rightarrow (\|u(X)\| \leqslant \lambda_q)$.

> Nous avons donc démontré que $\|u\|$ est le maximum des valeurs propres de u.

(b) En déduire que si A est symétrique avec des valeurs propres positives ou nulles, alors $\|A\|$ est le maximum de ses valeurs propres.

Démontrons que $\|A\|$ est le maximum de ses valeurs propres.

D'après l'énoncé $\|A\| = \|u\|$. Donc, d'après la question précédente $\|A\| = \max \mathrm{S}_{\mathbb{R}}(u)$. Comme de plus A est la matrice représentative de u dans la base canonique de E, $\mathrm{Sp}_{\mathbb{R}}(u) = \mathrm{Sp}_{\mathbb{R}}(A)$.
Finalement

$$\boxed{\|A\| = \max \mathrm{Sp}_{\mathbb{R}}(A).}$$

11. On se donne une matrice $M \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$.

(a) Démontrer l'existence d'une matrice symétrique $C \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$, à valeurs propres strictement positives telle que $C^2 = {}^tMM$.

${}^tMM \in \mathrm{S}_n(\mathbb{R})$ donc il existe $P \in \mathrm{O}_n(\mathbb{R})$ et $D \in \mathrm{D}_n(\mathbb{R})$ telles que ${}^tP{}^tMMP = D$.

* ${}^tMM \in \mathrm{S}_n^+(\mathbb{R})$.
  En effet, si $X \in \mathrm{R}^n$, alors

$${}^tX{}^tMMX = {}^t(MX)(MX)$$

  Nous reconnaissons le produit scalaire canonique, et donc :

$${}^tX{}^tMMX \geqslant 0$$

  Autrement dit ${}^tMM$ est positive.
* Les valeurs propres de ${}^tMM$ sont positives.
  En effet, si $\lambda \in \mathrm{Sp}_{\mathbb{R}}({}^tMM)$ et si X est un vecteur propre associé à la valeur propre λ (donc non nul) alors

$$\begin{aligned} {}^tX{}^tMMX &= {}^tX({}^tMMX) \\ &= {}^tX(\lambda X) \\ &= \lambda {}^tXX \end{aligned}$$

D'où

$$\lambda = \frac{{}^tX{}^tMMX}{{}^tXX}$$

Or ${}^tMM$ est positive donc :

$$\lambda \geqslant 0$$

* Du point précédent nous déduisons que les termes diagonaux de D sont positifs.
* Comme de plus ${}^tMM \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$ nécessairement $0 \notin \mathrm{SP}_{\mathbb{R}}({}^tMM)$.
* Notons $D = \mathrm{diag}(\lambda_1, \ldots, \lambda_n)$ et $C' = \mathrm{diag}(\sqrt{\lambda_1}, \ldots, \sqrt{\lambda_n})$. Ainsi $C'^2 = D$.
* Notons $C = PC'{}^tP$.

$$C^2 = PC'{}^tPPC'{}^tP$$

Puisque $P \in \mathrm{O}_n(\mathbb{R})$ $P{}^tP = I_n$.

$$\begin{aligned} C^2 &= PC'^2{}^tP \\ &= PD{}^tP \\ &= {}^tMM \end{aligned}$$

Si $C = PC'{}^tP$ alors on a bien : $C^2 = {}^tMM$, et $\mathrm{Sp}_{\mathbb{R}}(C') \subset \mathbb{R}_+^*$.

(b) En déduire l'existence de $U \in \mathrm{O}_n(\mathbb{R})$ telle que $M = UC$.
On admettra l'unicité de la matrice C obtenue précédemment et donc du couple (U,C) dans la décomposition $M = UC$, appelée décomposition polaire de M.

D'après la question précédente :

12. On considère $\mathscr{F} = \{M \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R}); \det(M) = 1\}$, le groupe spécial linéaire d'ordre n.

(a) Démontrer que $\mathscr{F}$ est fermé.

(b) Cet ensemble est-il compact ?

13. En utilisant la notion de décomposition polaire vue précédemment, démontrer la relation : $d(0_n,\mathscr{F}) = 1$.

14. Déterminer avec l'ensemble de s matrice de $\mathscr{F}$ en lesquelles cette distance est atteinte.

15. (a) On se donne $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ telle que $\|A\| < 1$. Démontrer que la série $sum_{p\in\mathbb{N}} A^p$ converge absolument et que l'on a la relation :

$$\sum_{p=0}^{+\infty} A^p = (I_n - A)^{-1}.$$

(b) Soit $T \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$. À l'aide de la question précédente, montrer que :

$$\forall M \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R}),\ \|T - M\| < \frac{1}{\|T^{-1}\|} \Rightarrow M \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{R}).$$

16. On pose $\mathscr{S} = \{M \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R}); \det(M) = 0\}$, l'ensemble des matrices singulières de $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ et on considère $T \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$. Établir la relation :

$$d\,(T,\mathscr{S}) = \frac{1}{\|T^{-1}\|}.$$

Indication : on pourra utiliser la décomposition polaire.

II Points d'une courbe à égale distance d'une droite.

On se place dans $\mathbb{R}^2$ muni de sa structure euclidienne usuelle et on note d la distance euclidienne associée.

On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = \frac{2x}{\mathrm{e}^x+1}$.

17. (a) Étudier avec soin les variations de f sur $\mathbb{R}$ et montrer que f admet un maximum atteint en un point $\alpha \in]1,2[$.

(b) Représenter graphiquement, sur la copie, la fonction f (allure de la courbe demandée).
On notera Γ le graphe de f dans le repère affine usuel de $\mathbb{R}^2$.

18. On suppose disposer d'un programme `expo` tel que si x est un nombre réel, `expo`(x) calcul e^x.
    Écrire une procédure en français `alpha` telle que si `epsilon` est un nombre réel de $]0{,}1[$, l'instruction `alpha(epsilon)` donne une valeur approchée de α à `epsilon` près.

19. Démontrer que f est intégrable sur $[0, +\infty[$.

20. On considère la suite de fonctions $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définies sur $[0, +\infty[$ par :

$$\forall n \in \mathbb{N},\ f_n : x \mapsto (-1)^n 2x\mathrm{e}^{-(n+1)x}.$$

    Démontrer la relation : $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} f_n = f$ sur $[0, +\infty[$.

21. On admet le résultat $\displaystyle\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}$. Démontrer alors que l'on a :

$$\int_0^{+\infty} f(t)\ \mathrm{d}t = \frac{\pi^2}{6}.$$

22. On note Δ l'axe des abscisses du repère affine usuel de $\mathbb{R}^2$.

    (a) On considère deux points M_1 et M_2 de Γ, d'abscisses réelles respectives x_1 et x_2.
    Montrer que $d(M_1,\Delta) = d(M_2,\Delta)$ si et seulement si $|f(x_1) = f(x_2)|$.

    (b) Soit M un point de Γ, d'abscisse $x \in]0,\alpha]$. Montrer que, sur Γ, il existe un unique point N d'abscisse $y \in [\alpha, +\infty[$, tel que $d(M,\Delta) = d(N,\Delta)$.

    À tout réel $x \in]0,\alpha]$, on associe ainsi un réel $y = \varphi(x) \in [\alpha, +\infty[$ de telle sorte que φ réalise une application de $]0,\alpha]$ dans $[\alpha, +\infty[$.
    En particulier, pour tout $x \in]0,\alpha]$, on a : $\varphi(x) \geqslant \alpha$ et $f(x) = f(\varphi(x))$.

23. On note f_1 et f_2 les restrictions de f sur respectivement $]0,\alpha]$ et $[\alpha, +\infty[$.

    (a) Montrer que ces fonctions sont strictement monotones et donner une expression de φ en fonction de f_1 et f_2.

    (b) En déduire la continuité de φ, son sens de variation et sa limite en 0.

24. Déterminer un équivalent de *varphi* à l'origine.

25. Démontrer que φ est de classe C^∞ sur $]0,\alpha]$.

26. Démontrer que φ est dérivable à gauche au point α.

III Courbe médiatrice de deux fermés dans $\mathbb{R}^2$.

Soit le plan $\mathscr{P} = \mathbb{R}^2$ muni de sa structure affine euclidienne usuelle et de son repère canonique $\mathscr{R}$.

On note d la distance euclidienne usuelle sur $\mathscr{P}$ et on pose :

$$\mathscr{P}^+ = \{(x,y) \in \mathscr{P}; y > 0\} \quad \text{et} \quad \mathscr{P}^- = \{(x,y) \in \mathscr{P}; y < 0\}.$$

Jusqu'à la fin du problème, A et B désignent deux fermés non vides tels que $A \subset \mathscr{P}^+$ et $B \subset \mathscr{P}^-$.

On appelle courbe médiatrice de A et B l'ensemble : $\Gamma_{A,B} = \{m \in \mathscr{P}; d_A(m) = d_B(m)\}$

Par exemple, si $A = \{a\}$ et $B = \{b\}$ où $a \in \mathscr{P}^+$ et $b \in \mathscr{P} =^-$, la courbe médiatrice $\Gamma_{A,B}$ est la médiatrice du segment $[a,b]$.

On se propose de montrer que $\Gamma_{A,B}$ est le graphe dans $\mathscr{R}$ d'une fonction $\varphi_{A,B}$: $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ et d'étudier quelques-unes de ses propriétés.

Dans la suite, il est vivement recommandé de s'aider de figures pour mener les raisonnements.

27. Déterminer la courbe médiatrice de A et B dans les cas particuliers suivants :

    (a) A est réduit à un point et B est une droite horizontale.

    (b) $A = \{(0,1)\}$ et $B = \{(-1,-1),(1,-1)\}$.

28. On se propose d'établir l'existence de $\varphi_{A,B}$: $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ telle que son graphe dans $\mathscr{R}$ soit $\Gamma_{A,B}$.
    Si K est une partie non vide de $\mathscr{P}$ et si $(x,y) \in \mathscr{P}$, on notera $d_K(x,y)$ le réel $d\left((x,y)\right)$.
    On considère un réel x_0 et on définit sur $\mathbb{R}$ la fonction :

    $$\Phi_{x_0} t \mapsto d_A(x_0,t) - d_B(x_0,t).$$

    (a) Soit a un point de A. Montrer que, pour tout $t \geqslant 0$:

    $$\Phi_{x_0}(t) \leqslant d\left(a,(x_0,t)\right) - t.$$

    (b) Montrer l'existence des réels $\lambda > 0$ et μ tels que :

    $$\forall t\ in \mathbb{R},\ d\left((x_0,t),a\right) - t = -\frac{\lambda t + \mu}{d\left((x_0,t),a)\right) + t}$$

    et en déduire l'existence de $t_0 > 0$ tel que $Phi_{x_0}(t_0) < 0$.

(c) En adaptant le raisonnement qui précède, montrer que Φ_0 peut prendre également des valeurs strictement positives dans $\mathbb{R}$.

(d) Montrer qu'il existe $y_0 \in \mathbb{R}$ tel que : $\Phi_{x_0}(y_0) = 0$.

Soit m_0 le point de cordonnées (x_0,y_0) et b un point de B réalisant la distance de m_0 à B, c'est-à-dire vérifiant : $b \in B$ et $d_B(m_0) = d(m_0,b)$.

(e) Soit $y < y_0$ et m le point de coordonnées (x_0,y).
Démontrer que : $\forall a \in A$, $d(m,a) > d(m,b)$
puis que : $\Phi_{x_0}(y) > 0$.

(f) En déduire l'existence de l'application $\varphi_{A,B}$ annoncée.

29. On considère une suite réelle bornée $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et un réel σ. On suppose que σ est l'unique valeur d'adhérence de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$. Démontrer que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers σ.

30. On se propose d'établir la continuité de $\varphi_{A,B}$ sur $\mathbb{R}$.

(a) Montrer l'existence de deux polynômes de degré deux, P_1 et P_2 tels que $P_1 \leqslant \varphi_{A,B} \leqslant P_2$.

Soit $x \in \mathbb{R}$. On se propose d'établir la continuité de $\varphi_{A,B}$ en ce point x.

(b) On considère une suite de réels $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ telle que : $\lim\limits_{n\to+\infty} x_n = x$ et on introduit la suite $y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ telle que : $\forall n \in \mathbb{N}$, $y_n = \varphi_{A,B}(x_n)$. Montrer que la suite $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est bornée.

(c) Démontrer que la suite $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ admet une unique valeur d'adhérence.

(d) En déduire que $\varphi_{A,B}$ est continue au point x puis que $\varphi_{A,B}$ est continue sur $\mathbb{R}$.

31. Montrer à l'aide d'un exemple que la fonction $\varphi_{A,B}$ n'est pas toujours lipschitzienne sur $\mathbb{R}$.

Soit $I = [\alpha,\beta]$, où $\alpha < \beta$. On se propose d'établir, jusqu'à la fin de la parti III, que $\varphi_{A?B}$ est lipschitzienne sur I.

32. On note Γ' le graphe de la restriction à I de $\varphi_{A,B}$ dans le repère $\mathscr{R}$.

(a) Montrer que Γ' est un compact de $\mathbb{R}^2$.

(b) Démontrer l'existence d'un réel $R_0 > 0$ tel que : $\forall m \in \Gamma'$, $d_A(m) \leqslant R_0$.

(c) En déduire l'existence d'un réel $R > 0$, tel que tout disque fermé de rayon R_0, centré sur un point du compact Γ', soit contenu dans $\overline{B}(0,R) = \{\zeta \in \mathbb{R}^2; \|\zeta\| \leqslant R\}$.

33. On pose $K_A = A \cap \overline{B}(0,R)$ et $K_B = B \cap \overline{B}(0,R)$.
Montrer que ces parties sont des compacts non vides de $\mathbb{R}^2$ vérifiant $K_A \subset \mathscr{P}^+$ et $K_B \subset \mathscr{P}^-$ et que :

$$\forall x \in I,\ \varphi_{A,B}(x) = \varphi_{K_A,K_B}(x).$$

34. Soit J un intervalle compact de $\mathbb{R}$.
Soit $\psi : J \to \mathbb{R}$ une fonction et Γ son graphe dans le repère canonique $\mathscr{R}$.
Pour $\theta \in \mathbb{R}$, on désigne par $\mathscr{R}_\theta$ l'image de $\mathscr{R}$ par la rotation d'angle θ et de centre O, origine du repère $\mathscr{R}$.
On suppose qu'il existe $\rho > 0$ tel que, $\forall \theta \in]-\rho,\rho[$, Γ est encore, dans le repère $\mathscr{R}_\theta$, le graphe d'une fonction.
Démontrer que ψ est lipschitzienne.

35. En déduire que $\varphi_{A,B}$ est lipschitzienne sur I.

IV Existence d'asymptotes lorsque A et B sont compacts.

On reprend les notations et définitions de la partie III et on considère deux fermés non vides A et B tels que $A \subset \mathscr{P}^+$ et $B \subset \mathscr{P}^-$.

Pour $(a,b) \in \mathscr{P}^+ \times \mathscr{P}^-$, on note $\varphi_{a,b}$, $\varphi_{a,B}$ et $\varphi_{A,b}$ les fonctions $\varphi_{\{a\},\{b\}}$, $\varphi_{\{a\},B}$ et $\varphi_{A,\{b\}}$.

36. Dans cette question, on étudie la courbe médiatrice $\Gamma_{A,B}$ de A et B dans le cas particulier suivant : $A = \{a\}$ où a est un point fixe de l'axe $x = 0$ et B est un rectangle plein du demi-plan $x \leqslant 0$, dont l'un des côté est contenu dans l'axe $x = 0$. (voir figure 1)

(a) Démontrer que $\Gamma_{A,B}$ est au-dessus de la droite contenant le côté horizontal le plus haut de B.

(b) En déduire que $\Gamma_{A,B}$ est la réunion de demi-droite et d'une courbe que l'on précisera.

(c) La fonction $\varphi_{A,B}$ est-elle dérivable sur $\mathbb{R}$?

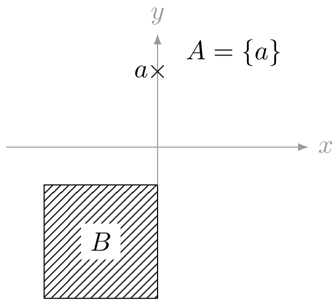

Figure 1

On revient au cas général.

1. Démontrer à l'aide de la question