

Agrégation interne 2018 première épreuve.

Durée : 6 heures.

L'usage de tout ouvrage de référence et de tout matériel électronique (y compris la calculatrice) est rigoureusement interdit.

Notations, rappels et présentation du problème.

- On note \mathbb{N} , \mathbb{Z} , \mathbb{Q} , \mathbb{R} et \mathbb{C} les ensembles de nombres usuels : entiers naturels, entiers relatifs, nombres rationnels, nombres réels et nombres complexes.
- Dans tout le problème, n est un entier naturel non nul fixé et \mathbb{K} désigne un corps égal à \mathbb{Q} , \mathbb{R} ou \mathbb{C} .
- Si A est une partie de B (*i.e.* $A \subset B$), on note $B - A$ le complémentaire de A dans B .
- Si p et q sont deux entiers relatifs, on pose $\llbracket p, q \rrbracket = \{k \in \mathbb{Z} \mid p \leq k \leq q\}$.
- $\mathbb{K}[X]$ désigne l'ensemble des polynômes à une indéterminée et à coefficients dans \mathbb{K} ; pour tout entier naturel d , on note $\mathbb{K}_d[X]$ l'ensemble des éléments de $\mathbb{K}[X]$ de degré inférieur ou égal à d .
- Si P et Q sont deux polynômes, on note $P \wedge Q$ le p.g.c.d. de P et Q ; par définition, lorsqu'il n'est pas nul, ce polynôme est unitaire.
- On identifie \mathbb{K}^n avec le \mathbb{K} -espace vectoriel $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K})$ des matrices colonnes de taille n .
- $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ et $\text{GL}_n(\mathbb{K})$ désignent respectivement l'ensemble des matrices carrées de taille n et l'ensemble des matrices carrées inversibles de taille n à coefficients dans \mathbb{K} ; $(\mathcal{M}_n(\mathbb{K}), +, \cdot, \times)$ est une \mathbb{K} -algèbre, *i.e.* $(\mathcal{M}_n(\mathbb{K}), +, \cdot)$ est un \mathbb{K} -espace vectoriel et $(\mathcal{M}_n(\mathbb{K}), +, \times)$ est un anneau; $(\text{GL}_n(\mathbb{K}), \times)$ un groupe.
- $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ est naturellement muni d'une structure de \mathbb{R} -algèbre par restriction de la loi externe aux nombres réels.
- Si E est un \mathbb{K} -espace vectoriel, on note $\mathcal{L}(E)$ l'ensemble des endomorphismes de E .
- Si $u \in \mathcal{L}(E)$ et si \mathcal{B} est une base de E , on note $\mathcal{M}_{\mathcal{B}}(u)$ la matrice de u relativement à la base \mathcal{B} .
- Soit $A = [a_{i,j}]_{1 \leq i, j \leq n} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. Le déterminant de A est noté $\det(A)$ ou

$$\begin{vmatrix} a_{1,1} & \cdots & a_{1,n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n,1} & \cdots & a_{n,n} \end{vmatrix}$$

- Pour tout $v = (x_i)_{1 \leq i \leq n} \in \mathbb{C}^n$, on pose $\bar{v} = (\bar{x}_i)_{1 \leq i \leq n}$.

- Pour toute matrice $A = [a_{i,j}]_{1 \leq i,j \leq n} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$, on note \overline{A} la matrice $[\overline{a_{i,j}}]_{1 \leq i,j \leq n}$.
- Pour toute matrice $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, on note $\chi_A = \det(XI_n - A)$ le polynôme caractéristique de A (I_n désigne la matrice unité de taille n). Ce polynôme est unitaire de degré n .
- Si E désigne un ensemble quelconque, on dit qu'une application $f : E \rightarrow E$ est involutive lorsque $f \circ f = \text{Id}_E$.

L'objectif du problème est d'établir l'assertion (1) suivante :

$$\forall (A,B) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})^2, \det \left(\begin{bmatrix} A & B \\ -\overline{B} & \overline{A} \end{bmatrix} \right) \in \mathbb{R}_+. \quad (1)$$

Pour cela, on commencera par montrer que cette assertion est équivalente à l'assertion (2) :

$$\forall C \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C}), \det (I_n + C\overline{C}) \in \mathbb{R}_+. \quad (2)$$

Une démonstration directe sera proposée en dernière partie.

I Résultats préliminaires.

On fixe deux matrices A et B , éléments de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$.

1. Démontrez l'assertion (1) dans le cas où $n = 1$.
2. Étude de la conjugaison dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$.
 - (a) Montrer que, pour tout $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ et tout $v \in \mathbb{C}^n$, $\overline{Av} = \overline{A}\overline{v}$.
 - (b) Montrer que l'application : $\begin{cases} \mathcal{M}_n(\mathbb{C}) & \rightarrow \mathcal{M}_n(\mathbb{C}) \\ A & \mapsto \overline{A} \end{cases}$ est un automorphisme de \mathbb{R} -algèbre involutif.
 - (c) Montrer que, pour tout $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$, $\det(\overline{A}) = \overline{\det(A)}$.
 - (d) En déduire que, pour tout $A \in \text{GL}_n(\mathbb{C})$, $\det(A\overline{A}) \in \mathbb{R}_+^*$.
3. Densité de $\text{GL}_n(\mathbb{C})$.
 - (a) Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$. Montrer qu'il existe $\eta > 0$ tel que :

$$\forall \lambda \in \mathbb{C}, 0 < |\lambda| < \eta \Rightarrow A - \lambda I_n \in \text{GL}_n(\mathbb{C}).$$

(b) En déduire que $GL_n(\mathbb{C})$ est dense dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$.

4. On suppose dans cette question que A est inversible.

(a) Calculer $\begin{bmatrix} I_n & 0 \\ \overline{B}A^{-1} & I_n \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} A & B \\ -\overline{B} & \overline{A} \end{bmatrix}$.

(b) En déduire qu'il existe une matrice $C \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ à déterminer telle que :

$$\det \left(\begin{bmatrix} A & B \\ -\overline{B} & \overline{A} \end{bmatrix} \right) = |\det(A)|^2 \det(I_n + C\overline{C}).$$

5. Montrer que (1) et (2) sont équivalentes.

II Démonstration de (2) dans un cas particulier.

On considère : $\Omega = \{C \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C}) \mid \chi_{C\overline{C}} \text{ est un polynôme scindé à racines simples}\}$.
Soit $C \in \Omega$.

6. Soit $(A, B) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})^2$.

(a) Montrer que si A est inversible, $\chi_{AB} = \chi_{BA}$.

Indication : on pourra montrer que AB et BA sont semblables.

(b) Montrer que $\chi_{AB} = \chi_{BA}$.

Indication : on pourra utiliser la question 3. (b).

(c) Montrer que $\chi_{C\overline{C}} \in \mathbb{R}[X]$.

7. Montrer que $C\overline{C}$ est diagonalisable. Que dire de la dimension des sous-espaces propres.

8. Soient λ une valeur propre réelle de $C\overline{C}$ et $v \in \mathbb{C}^n$ un vecteur propre associé.

(a) Montrer que $\overline{C}Cv = \lambda\overline{v}$.

(b) En calculant $C\overline{C}C\overline{v}$, montrer qu'il existe $\mu \in \mathbb{C}$ tel que $C\overline{v} = \mu v$.

(c) Calculer $C(\overline{\mu v})$ de deux manières différentes. En déduire que $\lambda \in \mathbb{R}_+$.

9. Montrer que $\det(I_n + C\overline{C}) \in \mathbb{R}_+$.

13. On suppose que $P \wedge Q = 1$.

(a) Montrer que φ est injective.

(b) En déduire que $\text{Res}_{\mathbb{K}}(P, Q) \neq 0$.

14. On suppose que $P \wedge Q \neq 1$.

Montrer que φ n'est pas injective, puis que $\text{Res}_{\mathbb{K}}(P, Q) \neq 0$.

Ainsi on a démontré que : $P \wedge Q = 1$ si et seulement si $\text{Res}_{\mathbb{K}}(P, Q) \neq 0$.

On pose $\Delta(P) = \frac{(-1)^{\frac{q(q-1)}{2}}}{a_q} \text{Res}_{\mathbb{K}}(P, P')$, où P' désigne le polynôme dérivé de P . $\Delta(P)$ est appelé discriminant de P .

15. On suppose ici que P est de degré 2 et on pose $P = aX^2 + bX + c$. Calculer $\Delta(P)$.

16. On suppose ici que $\mathbb{K} = \mathbb{C}$ et par conséquent que $P \in \mathbb{C}[X]$. Montrer que P est scindé à racines simples si et seulement si $\Delta(P) \neq 0$.

IV Quelques résultats sur les fonctions polynomiales à plusieurs variables.

Soit d un entier naturel non nul.

On dit qu'une fonction $P : \mathbb{C}^d \rightarrow \mathbb{C}$ est polynomiale lorsqu'il existe une partie finie S de \mathbb{N}^d et une famille $(a_k)_{k \in S}$ de nombres complexes telles que :

$$\forall (x_1, x_2, \dots, x_d) \in \mathbb{C}^d, P(x_1, x_2, \dots, x_d) = \sum_{(k_1, \dots, k_d) \in S} a_{(k_1, \dots, k_d)} x_1^{k_1} x_2^{k_2} \dots x_d^{k_d}.$$

Soit P une fonction polynomiale.

En reprenant les notations précédentes, on pose :

$$Z_P = \{(x_k)_{1 \leq k \leq d} \in \mathbb{C}^d \mid P(x_1, x_2, \dots, x_d) = 0\}.$$

17. (a) Soient I_1, I_2, \dots, I_d des parties infinies de \mathbb{C} . On suppose que $I_1 \times I_2 \times \dots \times I_d \subset Z_P$. Montrer que P est la fonction polynomiale nulle, *i.e.* que tous ses coefficients sont nuls.

Indication : on pourra procéder par récurrence sur d .

- (b) En déduire que si $P \neq 0$, alors Z_P est un fermé d'intérieur vide, puis que $\mathbb{C}^d \setminus Z_P$ est un ouvert dense dans \mathbb{C}^d .

On rappelle que $\Omega = \{C \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C}) \mid \chi_{C\bar{C}} \text{ est un polynôme scindé à racines simples}\}$.

18. À l'aide du discriminant, montrer que Ω est un ouvert dense de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$.

19. Démontrer l'assertion (2).

Indication : on pourra utiliser les résultats de la partie II.

20. (a) Montrer plus généralement que, pour tout $C \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$, on a :

$$\forall \lambda \in \mathbb{R}_+, \det(\lambda I_n + C\bar{C}) \geq 0.$$

- (b) En déduire que si M est une matrice telle qu'il existe $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ vérifiant $M = A^2$, alors les valeurs propres réelles strictement négatives de M sont de multiplicité paire.

- (c) En déduire que si $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ est l'image d'une matrice réelle par l'application exponentielle alors les valeurs propres réelles négatives de M sont de multiplicité paire.

V Autre manière d'introduire le résultat.

Soit $D \in \mathbb{K}[X]$ tel que $D \neq 0$.

Pour tout polynôme U , on note $\text{quo}_D(U)$ (*resp.* $\text{rem}_D(U)$) le quotient (*resp.* le reste) de la division euclidienne de U par D .

21. Montrer que quo_D et rem_D sont des endomorphismes de $\mathbb{K}[X]$ et que rem_D est un projecteur dont on donnera les éléments caractéristiques.

On reprend les notations de la partie III. On note (Q) l'idéal engendré par Q et on pose $E = \mathbb{K}[X]/(Q)$. Pour tout $U \in \mathbb{K}[X]$, on note \bar{U} la classe de U modulo Q .

22. Montrer que E est un \mathbb{K} -espace vectoriel de dimension E et que $\mathcal{B}_0 = (1, \bar{X}, \dots, \bar{X}^{r-1})$ en est une base.

23. On considère l'endomorphisme : $f : \begin{cases} E & \rightarrow E \\ U & \mapsto PU \end{cases}$.

D'après le théorème de division euclidienne, pour tout $j \in \llbracket 0, r-1 \rrbracket$, il existe un unique couple (U_j, R_j) appartenant à $\mathbb{K}[X]^2$ tel que $X^j P = QU_j + R_j$ et $\deg(R_j) \leq r-1$.

On note \tilde{R} la matrice de la famille $(R_0, R_1, \dots, R_{r-1})$ relativement à la base canonique de $\mathbb{K}_{r-1}[X]$.

- (a) Montrer que f est un automorphisme de l'espace vectoriel E si et seulement si $P \wedge Q = 1$.
- (b) Exprimer la matrice $\mathcal{M}_{\mathcal{B}_0}(f)$ de f relativement à la base \mathcal{B}_0 à l'aide de \tilde{R} .

24. On considère l'endomorphisme

$$\tilde{f} : \begin{cases} \mathbb{K}_{q+r-1}[X] & \rightarrow \mathbb{K}_{q+r-1}[X] \\ S & \mapsto P \times \text{rem}_Q(S) + Q \times \text{quo}_Q(S) \end{cases}$$

- (a) Montrer que l'endomorphisme \tilde{f} est bien défini.
- (b) Pour tout $(U, V) \in \mathbb{K}_{r-1}[X] \times \mathbb{K}_{q-1}[X]$, expliciter $\tilde{f}(U + QV)$.
- (c) Montrer que la famille $\mathcal{B}_1 = (1, X, X^2, \dots, X^{r-1}, Q, XQ, \dots, X^{q-1}Q)$ est une base de $\mathbb{K}_{q+r-1}[X]$.
- (d) À l'aide de la matrice $\mathcal{M}_{\mathcal{B}_1}(\tilde{f})$, montrer que $\det(\tilde{f}) = \det(f)$.

25. On considère maintenant les endomorphismes :

$$\xi : \begin{cases} \mathbb{K}_{q+r-1}[X] & \rightarrow \mathbb{K}_{q+r-1}[X] \\ S & \mapsto P \times \text{rem}_{X^r}(S) + Q \times \text{quo}_{X^r}(S) \end{cases}$$

et

$$\psi : \begin{cases} \mathbb{K}_{q+r-1}[X] & \rightarrow \mathbb{K}_{q+r-1}[X] \\ S & \mapsto \text{rem}_{X^r}(S) + Q \times \text{quo}_{X^r}(S) \end{cases}$$

On note \mathcal{B}_{can} la base canonique de $\mathbb{K}_{q+r-1}[X]$.

- (a) Pour tout $(U, V) \in \mathbb{K}_{r-1}[X] \times \mathbb{K}_{q-1}[X]$, expliciter $\xi(U + X^r V)$ et $\psi(U + X^r V)$.

- (b) Déterminer $\mathcal{M}_{\mathcal{B}_{\text{can}}}(\xi)$ et $\mathcal{M}_{\mathcal{B}_{\text{can}}}(\psi)$.
- (c) Montrer que ψ est un automorphisme.
- (d) Exprimer \tilde{f} en fonction de ξ et ψ .
26. Montrer que : $\text{Res}_{\mathbb{K}}(P,Q) = b_r^q \det(f)$.

VI Autre preuve de l'assertion (1).

27. Soient $A, B, C, D \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$.

- (a) Démontrer que les matrices $\begin{bmatrix} D & C \\ B & A \end{bmatrix}$ et $\begin{bmatrix} A & B \\ C & D \end{bmatrix}$ sont semblables.
- (b) Démontrer que les matrices $\begin{bmatrix} A & -B \\ -C & D \end{bmatrix}$ et $\begin{bmatrix} A & B \\ C & D \end{bmatrix}$ sont semblables.

28. Soient $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$.

Démontrer que le polynôme caractéristique de $\begin{bmatrix} A & B \\ -\overline{B} & \overline{A} \end{bmatrix}$ est dans $\mathbb{R}[X]$.

29. On considère le \mathbb{C} -espace vectoriel $\mathbb{C}^n \times \mathbb{C}^n$ dont on écrira les éléments sous la forme : $\begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix}$ avec $(X, Y) \in \mathbb{C}^n \times \mathbb{C}^n$.

$$\text{Soit } \theta : \begin{cases} \mathbb{C}^n \times \mathbb{C}^n & \rightarrow \mathbb{C}^n \times \mathbb{C}^n \\ \begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix} & \mapsto \begin{pmatrix} -\overline{Y} \\ \overline{X} \end{pmatrix} \end{cases} .$$

- (a) Démontrer que θ est une application \mathbb{R} -linéaire et que θ commute avec tous les endomorphismes de $\mathbb{C}^n \times \mathbb{C}^n$ de matrice $\begin{bmatrix} A & B \\ -\overline{B} & \overline{A} \end{bmatrix}$ dans la base canonique de $\mathbb{C}^n \times \mathbb{C}^n$.
- (b) Que vaut $\theta \circ \theta$?
- (c) Soit $v \in \mathbb{C}^n \times \mathbb{C}^n$ non nul. Démontrer que v et $\theta(v)$ sont linéairement indépendants (sur \mathbb{C}) et que $\text{Vect}_{\mathbb{C}}(v, \theta(v))$ est stable par θ (où $\text{Vect}_{\mathbb{C}}(v, \theta(v))$ désigne le sous-espace vectoriel de $\mathbb{C}^n \times \mathbb{C}^n$ engendré par v et $\theta(v)$).
- (d) Soit E un sous-espace vectoriel de $\mathbb{C}^n \times \mathbb{C}^n$ stable par θ et soit $v \notin E$. Démontrer que $E \cap \text{Vect}_{\mathbb{C}}(v, \theta(v)) = \{0\}$.

30. Soient $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$.

Soit $\lambda \in \mathbb{C}$ une valeur propre de $\begin{bmatrix} A & B \\ -\bar{B} & A \end{bmatrix}$.

On désigne par E_λ le sous-espace propre associé et par E'_λ le sous-espace caractéristique associé.

(a) Démontrer que $\bar{\lambda}$ est aussi une valeur propre de $\begin{bmatrix} A & B \\ -\bar{B} & A \end{bmatrix}$ et que :

$$\theta(E'_\lambda) = E'_{\bar{\lambda}}.$$

(b) Démontrer que si $\lambda \in \mathbb{R}$ alors $\dim_{\mathbb{C}} E'_\lambda$ est paire.

31. Démontrer que : $\forall (A, B) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})^2, \det \left(\begin{bmatrix} A & B \\ -\bar{B} & A \end{bmatrix} \right) \in \mathbb{R}_+$.