Agrégation interne 2018 première épreuve.

Notations, rappels et présentation du problème.

I Résultats préliminaires.

1. Démontrons : $\forall (a,b) \in \mathbb{C}^2$, $\det\left(\begin{bmatrix} a & b \\ -\overline{b} & \overline{a} \end{bmatrix}\right) \in \mathbb{R}_+$.

   Soit $(a,b) \in \mathbb{C}^2$.

$$\begin{aligned} \det\left(\begin{bmatrix} a & b \\ -\overline{b} & \overline{a} \end{bmatrix}\right) &= a\overline{a} - (-\overline{b})b \\ &= |a|^2 + |b|^2 \end{aligned}$$

   donc :

$$\det\left(\begin{bmatrix} a & b \\ -\overline{b} & \overline{a} \end{bmatrix}\right) \geqslant 0.$$

$$\boxed{(1) \text{ est vraie dans le cas } n = 1.}$$

2. (a) Démontrons : $\forall A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{C})$, $\forall v \in \mathbb{C}^n$, $\overline{Av} = \overline{A}\overline{v}$.

   Soient $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{C})$ et $v \in \mathbb{C}^n$.
   Avec les notations usuelles :

$$Av = \left[\sum_{k=1}^{n} a_{i,k} v_k\right]_{1 \leqslant k \leqslant n}$$

   Par définition du conjugué d'une matrice :

$$\overline{Av} = \left[\overline{\sum_{k=1}^{n} a_{i,k} v_k}\right]_{1 \leqslant k \leqslant n}$$

   Par linéarité de la conjugaison :

$$\overline{Av} = \left[\sum_{k=1}^{n} \overline{a_{i,k} v_k}\right]_{1 \leqslant k \leqslant n}$$

Le conjugué d'un produit égalant le produit des conjugués :

$$\overline{Av} = \left[\sum_{k=1}^{n} \overline{a_{i,k}} \cdot \overline{v_k}\right]_{1\leqslant k\leqslant n}$$

Par définition du produit matriciel :

$$\overline{Av} = \overline{A}\,\overline{v}$$

Nous avons démontré que $\forall A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{C})$, $\forall v \in \mathbb{C}^n$, $\overline{Av} = \overline{A}\,\overline{v}$.

(b) Notons φ l'application définie dans l'énoncée.

Démontrons que φ est un automorphisme involutif.

* $(\mathscr{M}_n(\mathbb{C}), +\,, \cdot\,, \times)$ est une $\mathbb{R}-$ algèbre.
* φ est $\mathbb{R}-$linéaire puisque clairement :

  $$\forall \lambda \in \mathbb{C},\, \forall (A,B) \in \mathscr{M}_n(\mathbb{C})^2,\, \overline{\lambda A + B} = \lambda \overline{A} + \overline{B},$$

  par linéarité de la conjugaison et car $\overline{\lambda} = \lambda$. Donc φ est un endomorphisme de $\mathbb{R}-$espace vectoriel.
* φ est un morphisme d'anneau car en plus d'être $\mathbb{R}-$linéaire il vérifie : $\forall (A,B) \in \mathscr{M}_n(\mathbb{C})$, $\overline{A \times B} = \overline{A} \times \overline{B}$. En effet si A et B sont dans $\mathscr{M}_n(\mathbb{C})$ alors

  $$\begin{aligned}\overline{AB} &= \left[\overline{\sum_{k=0}^{n} a_{i,k} b_{k,j}}\right]_{1\leqslant i,j\leqslant n} \\ &= \left[\sum_{k=0}^{n} \overline{a_{i,k}} \cdot \overline{b_{k,j}}\right]_{1\leqslant i,j\leqslant n} \\ &= \overline{A} \times \overline{B}\end{aligned}$$

* Clairement φ est involutive :

  $$\forall A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{C}),\, \overline{\overline{A}} = A.$$

  Et puisque φ est involutive, elle est bijective.

Ainsi φ est un $\mathbb{R}-$morphisme d'algèbre d'une algèbre dans lui-même involutive donc bijective.

$$\boxed{\varphi \text{ est un automorphisme de } \mathbb{R}-\text{algèbres involutif.}}$$

(c) Démontrons que : $\forall A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{C})$, $\det(\overline{A}) = \overline{\det(A)}$.

Il s'agit d'une conséquence du fait que le déterminant est une application n-linéaire et que la conjugaison est un endomorphisme de $\mathbb{C}$.

Soit $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{C})$.

$$\begin{aligned}\det(\overline{A}) &= \sum_{\sigma\in\mathfrak{S}_n} \varepsilon(\sigma)\overline{a_{\sigma(1),1}}\dots\overline{a_{\sigma(n),n}}\\ &= \overline{\sum_{\sigma\in\mathfrak{S}_n} \varepsilon(\sigma)a_{\sigma(1),1}\dots a_{\sigma(n),n}}\\ &= \overline{\det(A)}\end{aligned}$$

(d) Démontrons : $\forall A \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$, $\det(A\overline{A}) \in \mathbb{R}_+^*$.

Soit $A \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$.

$$\begin{aligned}\det(A\overline{A}) &= \det(A)\cdot\det(\overline{A})\\ &= \det(A)\cdot\overline{\det(A)}\\ &= |\det(A)|^2\end{aligned}$$

Et par conséquent : $\det(A\overline{A}) \in \mathbb{R}_+$.
Comme de plus $A \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$, $\det(A) \neq 0$.
Finalement

$$\boxed{\text{nous avons établi : } \forall A \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{C}),\ \det(A\overline{A}) \in \mathbb{R}_+^*.}$$

3. (a) Démontrons : $\forall A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{C})$, $\exists \eta > 0$, $\forall \lambda \in \mathbb{C}$, $0 < |\lambda| < \eta \Rightarrow A - \lambda I_n \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$.

Soit $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{C})$.
$\chi_A(X) = \det(XI_n - A)$ admet au plus n racines distinctes dans $\mathbb{C}$.

Notons η le plus petit module non nul des racines de χ_A s'il existe : autrement dit, s'il existe, $\eta = \min\{|\lambda| \mid \lambda \in \chi_A^{-1}(\{0\}) \setminus \{0\}\}$. Sinon soit $\eta \in \mathbb{R}_+^*$.
Par construction de η si $\lambda \in \mathbb{C}$ est tel que $0 < |\lambda| < \eta$, alors $\chi_A(\lambda) \neq 0$. Autrement dit $\det(\lambda I_n - A) \neq 0$. Ce qui équivaut encore à dire que $\lambda I_n - A$ est inversible.

Nous avons donc établi que, quelque soit $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{C})$, il existe $\eta > 0$ tel que :
$\forall \lambda \in \mathbb{C}$, $0 < |\lambda| < \eta \Rightarrow A - \lambda I_n \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$.

(b) $\mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$ est dense dans $\mathscr{M}_n(\mathbb{C})$ si et seulement si l'adhérence, $\overline{\mathrm{GL}_n(\mathbb{C})}$, de $\mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$ égale $\mathscr{M}_n(\mathbb{C})$.
Puisque $\mathscr{M}_n(\mathbb{C})$ est un espace métrique (en tant qu'espace vectoriel de dimension fini c'est un espace normé) il faut et il suffit de démontrer que tout élément de $\mathscr{M}_n(\mathbb{C})$ est limite d'un suite d'éléments de $\mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$.

Démontrons que, quelque soit $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{C})$, A est limite d'une suite d'éléments de $\mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$.

Soit $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{C})$.
Soit $k \in \mathbb{N}^*$.
Posons $A_k = A - \frac{1}{k} I_n$.
D'après la question précédente il existe η tel que pour tout $k \geqslant \frac{1}{\lfloor \eta \rfloor}$, $A_k \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$.
Ainsi $(A_k)_{k \geqslant \frac{1}{\lfloor \eta \rfloor}}$ est une suite de matrices inversibles et clairement sa limite est A. Il n'y a qu'une seule limite possible toutes les normes étant équivalentes en dimension finie.

$$\overline{\mathrm{GL}_n(\mathbb{C})} = \mathscr{M}_n(\mathbb{C}).$$

4. (a) calculons le produit.

$$\begin{aligned}
&\begin{bmatrix} I_n & 0 \\ \overline{B}A^{-1} & I_n \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} A & B \\ -\overline{B} & \overline{A} \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} I_n \times A + 0 \times (-\overline{B}) & I_n \times B + 0 \times \overline{A} \\ \overline{B}A^{-1} \times A + I_n \times (-\overline{B}) & \overline{B}A^{-1} \times B + I_n \times \overline{A} \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} A & B \\ \overline{B} - \overline{B} & \overline{B}A^{-1}B + \overline{A} \end{bmatrix}
\end{aligned}$$

Finalement

$$\boxed{\begin{bmatrix} I_n & 0 \\ \overline{B}A^{-1} & I_n \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} A & B \\ -\overline{B} & \overline{A} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A & B \\ 0 & \overline{B}A^{-1}B + \overline{A} \end{bmatrix}.}$$

(b) Exhibons une matrice C.

De la question précédente nous déduisons

$$\det\left(\begin{bmatrix} I_n & 0 \\ \overline{B}A^{-1} & I_n \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} A & B \\ -\overline{B} & \overline{A} \end{bmatrix}\right) = \det\left(\begin{bmatrix} A & B \\ 0 & \overline{B}A^{-1}B + \overline{A} \end{bmatrix}\right)$$

Nous remarquons dans le terme de droite le déterminant d'une matrice triangulaire par blocs :

$$\det\left(\begin{bmatrix} I_n & 0 \\ \overline{B}A^{-1} & I_n \end{bmatrix}\right) \cdot \det\left(\begin{bmatrix} A & B \\ -\overline{B} & \overline{A} \end{bmatrix}\right) = \det(A) \cdot \det(\overline{B}A^{-1}B + \overline{A})$$

De même à gauche :

$$\det(I_n) \cdot \det(I_n) \cdot \det\left(\begin{bmatrix} A & B \\ -\overline{B} & \overline{A} \end{bmatrix}\right) = \det(A) \cdot \det\left[\overline{A}(\overline{A}^{-1}\overline{B}A^{-1}B + I_n)\right]$$

Ainsi

$$\begin{aligned} \det\left(\begin{bmatrix} A & B \\ -\overline{B} & \overline{A} \end{bmatrix}\right) &= \det(A) \cdot \det(\overline{A}) \cdot \det(\overline{A}^{-1}\overline{B}A^{-1}B + I_n) \\ &= \det(A) \cdot \overline{\det(A)} \cdot \det(\overline{A^{-1}}\overline{B}A^{-1}B + I_n) \\ &= |\det(A)|^2 \cdot \det(\overline{A^{-1}B}A^{-1}B + I_n) \end{aligned}$$

Par conséquent

$$\boxed{\begin{array}{c} \text{en notant } C = \overline{A^{-1}B} \text{ nous avons bien} \\ \det\left(\begin{bmatrix} A & B \\ -\overline{B} & \overline{A} \end{bmatrix}\right) = |\det(A)|^2 \det(I_n + C\overline{C}). \end{array}}$$

5. Démontrons : (2) $\Rightarrow$ (1).

Supposons que (2) est vraie.

Soit $(A,B) \in \mathscr{M}_n(\mathbb{C})$.
Puisque $\mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$ est dense dans $\mathscr{M}_n(\mathbb{C})$, il existe une suite $(A_k)_{k\in\mathbb{N}} \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{C})^{\mathbb{N}}$ qui converge vers A.
De la question 4.(b), les A_k étant inversibles, nous déduisons que

$$\forall k \in \mathbb{N},\ \det\left(\begin{bmatrix} A_k & B \\ -\overline{B} & \overline{A_k} \end{bmatrix}\right) = |\det(A_k)|^2 \det(I_n + C_k\overline{C_k})$$

avec $C_k = \overline{A_k^{-1}B}$.
Toutes les applications intervenants étant continues nous en déduisons par passage à la limite :

$$\det\left(\begin{bmatrix} A & B \\ -\overline{B} & \overline{A} \end{bmatrix}\right) = |\det(A)|^2 \det(I_n + C\overline{C})$$

avec $C = \overline{A^{-1}B}$.
$|\det(A)|^2 \geqslant 0$ et d'après (2)

$$\forall k \in \mathbb{N},\ \det(I_n + C_k\overline{C_k}) \geqslant 0,$$

et donc en passant à la limite $\det(I_n + C\overline{C}) \geqslant 0$.
Par conséquent $\det\left(\begin{bmatrix} A & B \\ -\overline{B} & \overline{A} \end{bmatrix}\right) \geqslant 0$.

Nous avons démontré que (2) $\Rightarrow$ (1).

Démontrons que (1) $\Rightarrow$ (2).

Supposons que (1) est vraie.
Soit $C \in \mathscr{M}_n(\mathbb{C})$.
En notant $A = I_n$ et $B = \overline{C}$ nous avons $C = \overline{A^{-1}B}$ avec $A \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$. Donc, d'après la question 4.(b),

$$\det(I_n + C\overline{C}) = \frac{1}{|\det(A)|^2}\det\left(\begin{bmatrix} A & B \\ -\overline{B} & \overline{A} \end{bmatrix}\right)$$

Or, d'après (1), $\det\left(\begin{bmatrix} A & B \\ -\overline{B} & \overline{A} \end{bmatrix}\right) \geqslant 0$, donc $\det(I_n + C\overline{C}) \geqslant 0$.

Nous avons démontré que : (1) $\Rightarrow$ (2).

Puisque nous avons vérifié qu'une implication et sa réciproque sont vraie :

$$\boxed{(1) \Leftrightarrow (2).}$$

II Démonstration de (2) dans un cas particulier.

6. (a) Démontrons : $A \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{C}) \Rightarrow \chi_{AB} = \chi_{BA}$.

   * Montrons que, quelque soit $(M,N) \in \mathscr{M}_n(\mathbb{C})$, si M et N sont semblables alors $\chi_M = \chi_N$.
   Soient M et N telles qu'il existe $P \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$ avec $M = PNP^{-1}$.

$$\begin{aligned}
\chi_M(X) &= \det(XI_n - M) \\
&= \det(XI_n - PNP^{-1}) \\
&= \det\left[P(XI_n - N)P^{-1}\right] \\
&= \det(P) \cdot \det(XI_n - N) \cdot \det(P^{-1}) \\
&= \det(XI_n - N) \cdot \det(P) \cdot \det(P)^{-1} \\
&= \det(XI_n - N) \\
&= \chi_N(X)
\end{aligned}$$

   * Montrons que si A est inversible alors AB et BA sont semblables.
   Soit $A \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$.

$$\begin{aligned}
A^{-1}(AB)A &= A^{-1}ABA \\
&= BA
\end{aligned}$$

   Donc $AB \sim BA$.

   Des deux points précédents nous déduisons que

$$\boxed{\text{si } A \text{ est inversible alors } \chi_{AB} = \chi_{BA}.}$$

   (b) Montrons que $\chi_{AB} = \chi_{BA}$.

   Du fait de la densité de $\mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$ dans $\mathscr{M}_n(\mathbb{C})$, nous pouvons affirmer qu'il existe une suite $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ d'éléments de $\mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$ qui converge vers A.

D'après la question précédente :

$$\forall n \in \mathbb{N},\ \det(XI_n - A_k B) = \det(XI_n - BA_k).$$

Donc en passant à la limite et du fait de la continuité du déterminant

$$\det(XI_n - AB) = \det(XI_n - BA).$$

Autrement dit

$$\boxed{\chi_{AB} = \chi_{BA}.}$$

(c) Démontrons que $\chi_{C\overline{C}} = \overline{\chi_{C\overline{C}}}$.

D'après la question précédente :

$$\chi_{C\overline{C}} = \chi_{\overline{C}C}$$

Ce qui équivaut successivement à

$$\chi_{C\overline{C}}(X) = \det(XI_n - \overline{C}C)$$
$$\chi_{C\overline{C}}(X) = \det(\overline{XI_n - C\overline{C}})$$

Ce qui équivaut, d'après la question 2.(c), à

$$\chi_{C\overline{C}}(X) = \overline{\det(XI_n - C\overline{C})}$$
$$\chi_{C\overline{C}} = \overline{\chi_{C\overline{C}}}$$

Par identification deux à deux des coefficients des polynômes nous en déduisons que ces coefficients sont tous réels.

$$\boxed{\chi_{C\overline{C}} \in \mathbb{R}[X].}$$

7. Justifions que $C\overline{C}$ est diagonalisable.

D'après le théorème Cayley-Hamilton, $\chi_{C\overline{C}}$ est un polynôme annulateur, et par construction il est scindé simple donc

$$\boxed{C\overline{C} \text{ est diagonalisable.}}$$

Déterminons la dimension des sous-espaces propres.

Nous savons que $C\overline{C}$ est diagonalisable si et seulement si son polynôme caractéristique est scindé et que la dimension des sous-espaces propres égale la multiplicité des valeurs propres correspondantes. Or, par construction, $\chi_{C\overline{C}}$ est simple donc

$$\boxed{\text{les sous-espaces propres de } C\overline{C} \text{ ont tous une dimension de 1.}}$$

8. (a)

$$\begin{aligned}\overline{C}C\overline{v} &= \overline{C\overline{C}v}\\ &= \overline{\lambda v}\end{aligned}$$

et puisque $\lambda \in \mathbb{R}$

$$\overline{C}C\overline{v} = \lambda\overline{v}$$

$$\boxed{\overline{C}C\overline{v} = \lambda\overline{v}.}$$

(b) Démontrons : $\exists\mu \in \mathbb{C},\ C\overline{v} = \mu v$.

D'après la question précédente :

$$\begin{aligned}C\overline{C}C\overline{v} &= C(\lambda\overline{v})\\ &= \lambda C\overline{v}\end{aligned}$$

Résultat que nous pouvons interpréter en disant que $C\overline{v}$ est un vecteur propre de $C\overline{C}$ pour la valeur propre λ.
Mais, d'après la question (7) le sous-espace propre associé à la valeur propre λ est de dimension 1, donc, nécessairement $\{v\}$ est une base du sous espace-propre et par conséquent :

$$\boxed{\exists\mu \in \mathbb{C},\ C\overline{v} = \mu v.}$$

(c) * D'une part :

$$\begin{aligned}C(\overline{\mu v}) &= \overline{\mu}C\overline{v}\\ &= \overline{\mu}\mu v\\ &= |\mu|^2 v\end{aligned}$$

* D'autre part :

$$\begin{aligned} C(\overline{\mu v}) &= C\left(\overline{C\overline{v}}\right) \\ &= C\overline{C}v \\ &= \lambda v \end{aligned}$$

* Par transitivité :

$$\lambda v = |\mu|^2 v$$

D'où

$$(\lambda - |\mu|^2)v = 0$$

Et puisque $v \neq 0$:

$$\lambda - |\mu|^2 = 0$$

Nous en déduisons, puisque $|\mu| \in \mathbb{R}_+$, que

$$\boxed{\lambda \in \mathbb{R}_+.}$$

9. Démontrons que $\det(I_n + C\overline{C})$.

Réinterprétons la question en :

$$\begin{aligned} \det(I_n + C\overline{C}) &= (-1)^n \det(-I_n - C\overline{C}) \\ &= (-1)^n \chi_{C\overline{C}}(-1) \end{aligned}$$

En notant $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ les n valeurs propres distinctes de $C\overline{C}$, d'après la question 7 :

$$\begin{aligned} \det(I_n + C\overline{C}) &= (-1)^n(-1 - \lambda_1)\ldots(-1 - \lambda_n) \\ &= (1 + \lambda_1)\ldots(1 + \lambda_n) \end{aligned}$$

Puisque $\chi_{C\overline{C}} \in \mathbb{R}[X]$ ses racines sont, soit réelles, soit complexes et conjuguées deux à deux.

Soit λ une valeur propre de $C\overline{C}$.
Si $\lambda \in \mathbb{R}$, alors d'après la question précédente $\lambda \in \mathbb{R}_+$ et donc $1+\lambda \in \mathbb{R}_+$.
Si $\lambda \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$, alors $(1+\lambda)(1+\overline{\lambda}) = (1+\lambda)(\overline{1+\lambda}) = |1+\lambda|^2 \in \mathbb{R}_+$.
Par conséquent : $(1+\lambda_1)\dots(1+\lambda_n) \in \mathbb{R}_+$.

$$\boxed{\det(I_n + C\overline{C}) \in \mathbb{R}_+.}$$

III Résultant de deux polynômes.

10. $(X^k)_{k\in[\![0,r]\!]}$ et $(X^l)_{l\in[\![0,q]\!]}$ sont des bases respectivement de $\mathbb{K}_{r-1}[X]$ et $\mathbb{K}_{q-1}[X]$, donc $\mathscr{B}$ est une famille libre de $\mathbb{K}_{r-1}[X] \times \mathbb{K}_{q-1}[X]$.
Comme de plus $\mathscr{B}$ a $r+q = \dim\left(\mathbb{K}_{r-1}[X] \times \mathbb{K}_{q-1}[X]\right)$ éléments nous pouvons donc conclure

$$\boxed{\mathscr{B} \text{ est une base de } \mathbb{K}_{r-1}[X] \times \mathbb{K}_{q-1}[X].}$$

11. Démontrons que φ est linéaire.

$(\mathbb{K}_{r-1}[X] \times \mathbb{K}_{q-1}[X], +, \cdot)$ (muni des lois induites naturellement par le produit cartésien) et $(\mathbb{K}_{q+r-1}[X], +, \cdot)$ sont des espaces vectoriels.
Soient $\lambda \in \mathbb{K}$, (U,V) et (R,S) dans $\mathbb{K}_{r-1}[X] \times \mathbb{K}_{q-1}[X]$.

$$\begin{aligned}
\varphi\left[\lambda(U,V) + (R,S)\right] &= \varphi\left[(\lambda U + R, \lambda V + S)\right] \\
&= P\left[\lambda U + R\right] + Q\left[\lambda V + S\right] \\
&= \lambda PU + PR + \lambda QV + QS \\
&= \lambda\left[PU + QV\right] + PR + QS \\
&= \lambda\varphi\left[(U,V)\right] + \varphi\left[(S,T)\right]
\end{aligned}$$

$$\boxed{\varphi \text{ est une application } \mathbb{K}\text{-linéaire.}}$$

12. Exprimons $\varphi(\mathscr{B})$ dans $\mathscr{B}_{\text{can}}$.

Soit $l_0 \in [\![0, r-1]\!]$.

$$\begin{aligned}\varphi\left[(X^{l_0},0)\right] &= PX^{l_0}\\ &= \sum_{k=0}^{q-1} a_k X^k X^{l_0}\\ &= \sum_{k=0}^{q-1} a_k X^{k+l_0}\end{aligned}$$

Ce qui correspond bien r premières colonnes de $\mathrm{Syl}(P,Q)$.
Soit $k_0 \in [\![0,q-1]\!]$.

$$\begin{aligned}\varphi\left[(X^{k_0},0)\right] &= PX^{k_0}\\ &= \sum_{l=0}^{r-1} b_k X^k X^{k_0}\\ &= \sum_{l=0}^{r-1} b_k X^{l+k_0}\end{aligned}$$

Ce qui correspond aux q dernières colonnes de $\mathrm{Syl}(P,Q)$.
Finalement

$$\boxed{M = \mathrm{Syl}(P,Q).}$$

13. (a) φ étant un morphisme de groupe additif il est injectif si et seulement si son noyau est réduit à l'élément neutre.

Déterminons $\ker(\varphi)$.

Soit $(U,V) \in \ker(\varphi) \setminus \{0\}$.

$$\begin{aligned}\varphi(U,V) = 0 &\Rightarrow PU + QV = 0\\ &\Rightarrow \left\{\begin{array}{l} P|V\\ Q|U\end{array}\right.\\ &\Rightarrow \exists (V',U')\mathbb{K}[X]^2, \left\{\begin{array}{l} V = PV'\\ U = QU'\end{array}\right.\end{aligned}$$

Par conséquent :

$$\begin{aligned}\varphi(U,V) = 0 &\Rightarrow P(QU') + Q(PV') = 0 \\ &\Rightarrow U' = -V'\end{aligned}$$

Ainsi les éléments de $\ker(\varphi)$ sont nécessairement de la forme $(QW, -PW)$. Puisque $\deg(Q) = r$ et que $QW \in \mathbb{K}_{r-1}[X]$, nécessairement $W = 0$ et donc $(U,V) = (0,0)$.
Autrement dit : $\ker(\varphi) = \{0\}$.

$$\boxed{\varphi \text{ est injectif.}}$$

(b) φ est une application linéaire injective entre espaces vectoriels de dimensions finis elle est donc bijective. Par conséquent le déterminant de la matrice représentant φ relativement aux bases $\mathscr{B}$ et $\mathscr{B}_{\text{can}}$ est non nul.
Autrement dit :

$$\boxed{\text{Res}_{\mathbb{K}}(P,Q) \neq 0.}$$

14. La démarche naturelle qui permet de répondre à la question consiste à procéder par analyse puis synthèse.

Montrons que $\ker(\varphi) \neq \{0\}$.

Supposons par exemple que $q \leqslant r$.
Alors
$$P \wedge Q \neq 1 \Rightarrow \exists W \in \mathbb{K}[X],\ PW = Q.$$

Nous avons alors

$$\begin{aligned}\varphi\left[(W, -1)\right] &= PW - Q \\ &= PW - PW \\ &= 0\end{aligned}$$

Donc $(W, -1) \in \ker(\varphi)$.

$$\boxed{\varphi \text{ n'est pas injective.}}$$

Et puisque M est une matrice représentant φ :

$$\boxed{\mathrm{Res}_{\mathbb{K}}(P,Q) \neq 0.}$$

15. Calculons $\Delta(P)$.

$$\begin{aligned} P(X) &= aX^2 + bX + c \\ P'(X) &= 2aX + b \end{aligned}$$

Donc : $q = 2$ et $r = 1$ et

$$\mathrm{Res}_{\mathbb{K}}(P,P') = \begin{vmatrix} a & 2a & 0 \\ b & b & 2a \\ c & 0 & b \end{vmatrix}$$

En usant de la règle de Sarus :

$$\begin{aligned} &= a \cdot b \cdot b + b \cdot 0 \cdot 0 + 2a \cdot 2a \cdot c - c \cdot b \cdot 0 - 0 \cdot 2a \cdot a - b \cdot 2a \cdot b \\ &= -ab^2 + 4a^2c \end{aligned}$$

D'où, a étant non nul puisque P est de degré deux :

$$\begin{aligned} \Delta(P) &= \frac{(-1)^{\frac{2(2-1)}{2}}}{a} \mathrm{Res}_{\mathbb{K}}(P,P') \\ &= \frac{-1}{a}\left(-ab^2 + 4a^2c\right) \\ &= b^2 - 4ac \end{aligned}$$

Ainsi

$$\boxed{\Delta(P) = b^2 - 4ac.}$$

16. D'après le théorème de d'Alembert-Gauss (théorème fondamental de l'algèbre) P est scindé sur $\mathbb{C}$.

Montrons que P est simple si et seulement si $\Delta(P) \neq 0$.

Dire que P est simple équivaut successivement à dire que :

- les racines de P sont de multiplicité 1,
- quelque soit la racine λ de P, $P'(\lambda) \neq 0$,
- $P \wedge P' = 1$,
- (d'après la conclusion aimablement fournie par l'énoncé) $\mathrm{Res}_{\mathbb{K}}(P,P') \neq 0$,
- $\Delta(P) \neq 0$.

P est scindé simple si et seulement si $\Delta(P) \neq 0$.

IV Quelques résultats sur les fonctions polynomiales à plusieurs variables.

17. (a) Pour $d \in \mathbb{N}^*$ notons $\mathscr{P}_d$: « Quelque soient $P : \mathbb{C}^d \to \mathbb{C}$ polynomiale et $I_1, \ldots, I_d$ des parties infinies de $\mathbb{C}$, si $I_1 \times \cdots \times I_d \subset Z_P$, alors $P = 0$ ».

Démontrons par récurrence sur d que $\mathscr{P}_d$ est vraie.

* Démontrons que $\mathscr{P}_1$ est vraie.
Soient $P : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ et I_1 une partie infinie de $\mathbb{C}$ telle que pour tout $x \in I_1$, $P(x) = 0$.
P admet donc $\deg(P) + 1$ racines distinctes donc P est divisible par un polynôme de degré strictement supérieur, nécessairement $P = 0$.
Ainsi $\mathscr{P}_1$ est vraie.

* Soit $d \in \mathbb{N}^*$. Supposons que $\mathscr{P}_d$ est vraie et démontrons qu'alors $\mathscr{P}_{d+1}$ est vraie.

Soient $P : \mathbb{C}^{d+1} \to \mathbb{C}$ une fonction polynomiale avec, pour tout $(x_1, \ldots, x_{d+1}) \in \mathbb{C}^{d+1}$,

$$P(x_1, \ldots, x_{d+1}) = \sum_{(k_1,\ldots,k_{d+1}) \in S_{d+1}} a_{(k_1,\ldots,k_{d+1})} x_1^{k_1} \ldots x_{d+1}^{k_{d+1}},$$

et $I_1, \ldots, I_{d+1}$ des parties infinies de $\mathbb{C}$ telles que $I_1 \times \ldots I_{d+1} \subset Z_P$.

Notons $S_{d+1} = S_d \times S$ avec $S_d \subset \mathbb{N}^d$ et $S \subset \mathbb{N}$, et pour tout $k_{d+1} \in S$, $P_{k_{d+1}}(x_1, \ldots, x_d) = a_{(k_1,\ldots,k_{d+1})} x_1^{k_1} \ldots x_d^{k_d}$.

Soit $(x_1, \ldots, x_d) \in I_1 \times \ldots I_d$.

Puisque pour tout $x_{d+1} \in I_{d+1}$,

$$\begin{aligned} P(x_1,\dots x_{d+1}) &= \sum_{\substack{d+1\in S\\(k_1,\dots,k_d)\in S_d}} a_{(k_1,\dots,k_{d+1})}x_1^{k_1}\dots x_{d+1}^{k_{d+1}} \\ &= \sum_{k_{d+1}\in S} x_{d+1}^{k_{d+1}} \sum_{(k_1,\dots,k_d)\in S_d} a_{(k_1,\dots,k_{d+1})}x_1^{k_1}\dots x_d^{k_d} \\ &= \sum_{k_{d+1}\in S} x_{d+1}^{k_{d+1}} P_{k_{d+1}}(x_1,\dots x_d) \end{aligned}$$

D'après le cas $d=1$ nous en déduisons que $P_{k_{d+1}}(x_1,\dots x_d)=0$ pour tout $k_{d+1}\in S$.

Soit $k_{d+1}\in S$.
Nous avons établi que quelque soit $(x_1,\dots,x_d)\in I_1\times\dots I_d$, $P_{k_{d+1}}(x_1,\dots x_d) = 0$.
D'après l'hypothèse de récurrence, nous en déduisons que $P_{k_{d+1}}=0$.
Et donc que $P=0$.
Autrement dit $\mathscr{P}_{n+1}$ est vraie.

Nous avons établi par récurrence sur d que $\mathscr{P}_d$ est vraie quelque soit $d\in\mathbb{N}^*$.

(b) Montrons que Z_P est un fermé d'intérieur vide.

* P est une application continue est $\{0\}$ est un fermé de $\mathbb{C}$ donc $Z_P = P^{-1}(\{0\})$ est un fermé de $\mathbb{C}^d$.
* Notons π_k la k-ième projection.
  D'après la question précédente si $P\neq 0$ alors il existe $k_0\in[\![1,d]\!]$ tel que $\pi_{k_0}(Z_P)$ soit fini donc d'intérieur vide. Donc $\mathring{Z}_P=\emptyset$

Ainsi Z_P est un fermé d'intérieur vide.

$\mathbb{C}\setminus Z_P$ est le complémentaire de Z_P et Z_P est un fermé donc $\mathbb{C}^d\setminus Z_P$ est un ouvert.

De plus :

$$\mathring{Z}_P=\emptyset$$

Donc en passant au complémentaire, nous en déduisons successivement :

$$\complement_{\mathbb{C}^d} \mathring{Z_P} = \complement_{\mathbb{C}^d} \emptyset$$
$$\overline{\complement_{\mathbb{C}^d} Z_P} = \mathbb{C}^d$$
$$\overline{\mathbb{C}^d \setminus Z_P} = \mathbb{C}^d$$

Autrement dit $\mathbb{C}^d \setminus Z_P$ est dense dans $\mathbb{C}^d$.

$\mathbb{C}^d \setminus Z_P$ est un ouvert dense dans $\mathbb{C}^d$.

18. $\mathscr{M}_n(\mathbb{K})$ et $\mathbb{C}^{n^2}$ étant isomorphes (par construction des matrices) nous nous autoriserons à les confondre.
Notons $\psi : \begin{cases} \mathbb{C}^{n^2} & \to & \mathbb{C} \\ M & \mapsto & \Delta\left(\chi_{M\overline{M}}\right) \end{cases}$.
ψ est une application polynomiale (le déterminant étant une forme n-linéaire) et non nulle (par exemple en considérant une matrice diagonale de termes diagonaux tous distincts). Donc, d'après la question précédente $\mathbb{C}^{n^2} \setminus \psi^{-1}(\{0\})$ est un ouvert dense dans $\mathbb{C}^{n^2}$.
Or d'après la question III.16 $\mathbb{C}^{n^2} \setminus \psi^{-1}(\{0\}) = \Omega$, donc

Ω est un ouvert dense dans $\mathbb{M}_n(\mathbb{C})$.

19. Soit $C \in \mathscr{M}_n(\mathbb{C})$.
$\mathscr{M}_n(\mathbb{C})$ est un espace métrique (puisque c'est un espace vectoriel de dimension finie) et Ω est dense dans cet ensemble, donc il existe une suite $(C_n)_{n\in\mathbb{N}}$ d'éléments de $\mathscr{M}_n(\mathbb{C})$ qui converge vers C.
D'après la partie II :

$$\forall n \in \mathbb{N},\ \det(I_n + C_n\overline{C_n}) \geqslant 0.$$

L'application déterminant étant continue, nous en déduisons par passage à la limite

$$\det(I_n + C\overline{C}) \geqslant 0.$$

(ii) est vraie.

20. (a) Démontrons : $\forall C \in \mathscr{M}_n(\mathbb{C})$, $\forall \lambda \in \mathbb{R}_+$, $\det(\lambda I_n + C\overline{C}) \geqslant 0$.

Soient $C \in \mathscr{M}_n(\mathbb{C})$ et $\lambda \in \mathbb{R}_+^*$ (si $\lambda = 0$ le résultat est trivial).
En appliquant le résultat de la question précédente à la matrice $\frac{1}{\lambda^{\frac{1}{2}}}C$.

$$\det\left[I_n + \left(\frac{1}{\lambda^{\frac{1}{2}}}C\right)\left(\frac{1}{\lambda^{\frac{1}{2}}}\overline{C}\right)\right] \geqslant 0$$

Puisque $\lambda^n \geqslant 0$:

$$\lambda^n \det\left[I_n + \left(\frac{1}{\lambda^{\frac{1}{2}}}C\right)\left(\frac{1}{\lambda^{\frac{1}{2}}}\overline{C}\right)\right] \geqslant 0$$

puisque le déterminant est une forme n-linéaire :

$$\det\left(\lambda I_n + C\overline{C}\right) \geqslant 0$$

$$\boxed{\text{Quelque soient } C \in \mathscr{M}_n(\mathbb{C}) \text{ et } \lambda \in \mathbb{R}_+ \ \det(\lambda I_n + C\overline{C}) \geqslant 0.}$$

(b) Soient M est une matrice telle qu'il existe $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ vérifiant $M = A^2$ et λ une valeur propre réelle strictement négative de M.

Montrons que λ est de multiplicité paire.

Soit $k \in \mathbb{N}^*$ la multiplicité de λ.
Puisque $\chi_M(\lambda) = \dots \chi_M^{(k-1)}(\lambda) = 0$, d'après la formule de Taylor à l'ordre k : $\chi_M(x) \underset{x \to \lambda}{\sim} \frac{\chi_M^{(k)}(\lambda)}{k!}(x - \lambda)^k$. Donc χ_M change de signe au voisinage de λ si et seulement si k est impaire.

Or si $-x \in V$ alors

$$\begin{aligned}
\chi_M(-x) &= \det(-xI_n - M) \\
&= (-1)^n \det(xI_n + A^2) \\
&= (-1)^n \det(xI_n + A\overline{A})
\end{aligned}$$

donc, d'après la question précédente,

$$(-1)^n \chi_M(-x) \geqslant 0.$$

Ainsi nécessairement k est paire.

> Dans le cas $M = A^2$, les valeurs propres réelles strictement négatives sont de multiplicité paire.

(c) Notons $M = \mathrm{e}^H$ avec $H \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$.

Alors $M = \left(\mathrm{e}^{\frac{1}{2}H}\right)^2$. D'après la question précédente nous pouvons donc affirmer que les valeurs propres réelles strictement négatives de M sont de multiplicité paire.

Comme de plus $\mathrm{e}^H \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$, $0 \notin \mathrm{Sp}_{\mathbb{C}}\left(\mathrm{e}^H\right)$.

Nous pouvons donc conclure

> si $M = \mathrm{e}^H$ avec $H \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$, alors les valeurs propres négatives de M sont de multiplicité paire.

V Autre manière d'introduire le résultat.

21. Démontrons que quo_D et rem_D sont des endomorphismes.

Les deux applications sont bien du $\mathbb{R}$-espace vectoriel $\mathbb{K}[X]$ dans lui-même.
Soient $\lambda \in \mathbb{R}$, $(U,V) \in \mathbb{R}[X]^2$.
Par construction

$$\begin{cases} U = D\mathrm{quo}_D(U) + \mathrm{rem}_D(U) \\ V = D\mathrm{quo}_D(V) + \mathrm{rem}_D(V) \end{cases}$$

avec $\deg(\mathrm{rem}_D(U)) < \deg(D)$ et $\deg(\mathrm{rem}_D(V)) < \deg(D)$.
Donc

$$\lambda U + V = D\left[\lambda \mathrm{quo}_D(U) + \mathrm{quo}_D(V)\right] + \mathrm{rem}_D(U) + \mathrm{rem}_D(V).$$

avec $\deg(\lambda \mathrm{rem}_D(U) + \mathrm{rem}_D(V)) < \deg(D)$.
Par conséquent

$$\begin{cases} \mathrm{quo}_D(\lambda U + V) = \lambda \mathrm{quo}_D(U) + \mathrm{quo}_D(V) \\ \mathrm{rem}_D(\lambda U + V) = \lambda \mathrm{rem}_D(U) + \mathrm{rem}_D(V) \end{cases}$$

Autrement dit

> rem_D et quo_D sont des endomorphisme de $\mathbb{K}[X]$.

Démontrons que rem_D est un projecteur.

$$\mathrm{rem}_D(U) = D \times 0 + \mathrm{rem}_D(U)$$

avec $\deg\left[\mathrm{rem}_D(U)\right] < \deg(D)$, donc

$$\mathrm{rem}_D\left[\mathrm{rem}_D(U)\right] = \mathrm{rem}_D(U).$$

Puisque $\mathrm{rem}_D \circ \mathrm{rem}_D = \mathrm{rem}_D$ l'endomorphisme rem_D est un projecteur.

Clairement $\ker(\mathrm{rem}_D)$ est l'idéal engendré par D et $\mathrm{Im}(\mathrm{rem}_D)$ est $\mathbb{K}_{\deg(D)-1}[X]$.

rem_D est la projection sur $\mathbb{K}_{\deg(D)-1}[X]$ parallèlement à (D).

22. Montrons que E est un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension r.

Nous avons démontré à la question précédente que rem_Q est une application linéaire dont le noyau est (Q) par conséquent E est une bien un espace vectoriel muni des lois induites par celles de $\mathbb{K}[X]$.
Comme de plus $\mathrm{Im}(\mathrm{rem}_Q) = \mathbb{K}_{r-1}[X]$, d'après le théorème de factorisation des applications linaires $E = \mathbb{K}[X]/(Q)$ est isomorphe à $\mathbb{K}_{r-1}[X]$. Notons $\varphi_1 : E \to \mathbb{K}_{r-1}[X]$ cet isomorphisme d'espaces vectoriels. En particulier E est de dimension r.

E est donc $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension r.

Montrons que $\mathscr{B}_0$ est une base de E.

Puisque φ^{-1} est un isomorphisme l'image de la base canonique $(1,X,\ldots,X^{r-1})$ par φ^{-1} est une base de E. Autrement dit

$\mathscr{B}_0$ est une base de E.

23. (a) Il est clair que f est une endomorphisme de $\mathbb{K}$-espace vectoriel.

Démontrons par conditions nécessaire et suffisante que f est bijectif si et seulement si $P \wedge Q = 1$.

* Nous devons démontrer que si f est bijectif alors $P \wedge Q = 1$.
Pour cela, démontrons la contraposée : si P et Q ne sont pas premiers entre eux alors f n'est pas bijectif.

Si $Q|P$ alors $\overline{P} = \overline{0}$ et f est donc l'application nulle et n'est donc pas bijective et la question est réglée. Il reste à étudier le cas alternatif.
Supposons donc qu'il existe $(H,K_1,K_2) \in (\mathbb{K}[X] \setminus \{0\})^3$ tel que :

$$\begin{cases} P = HK_1 \\ Q = HK_2 \end{cases}$$

avec $\deg(K_2) < \deg(Q)$.
Alors

$$\begin{aligned} f(\overline{K_2}) &= \overline{PK_2} \\ &= \overline{HK_1K_2} \\ &= \overline{HK_2} \cdot \overline{K_1} \\ &= \overline{Q} \cdot \overline{K_1} \\ &= \overline{0} \end{aligned}$$

Donc $\overline{K_2} \neq \overline{0}$ (puisque $K_2 \neq 0$ et $\deg(K_2) < \deg(Q)$) et pourtant $f(\overline{K_2}) = 0$. Par conséquent $\ker(f)$ n'est pas réduit à $\overline{0}$. Autrement dit f n'est pas injectif et donc, *a fortiori*, pas bijectif.

* Supposons que $P \wedge Q = 1$ et démontrons que f est bijectif.
Démontrons que $\ker(f) = \{\overline{0}\}$.
Soit $U \in \mathbb{K}[X]$ tel que $f(\overline{U}) = \overline{0}$.
Ainsi $\overline{PU} = \overline{0}$. Donc

$$\exists V \in \mathbb{K}[X],\ PU = VQ.$$

Puisque par hypothèse $P \wedge Q = 1$, d'après le théorème de Gauss, $Q|U$ et donc $\overline{U} = \overline{0}$.
Puisque $\ker(f) = \{\overline{0}\}$, f est injectif, et comme de plus, E est de dimension finie, f est bijectif.

$$\boxed{f \text{ est un automorphisme si et seulement si } P \wedge Q = 1.}$$

(b) Déterminons $\mathcal{M}_{\mathscr{B}_0}(f)$.

Soit $j \in [\![0,r-1]\!]$.

$$\begin{aligned} f(\overline{X^j}) &= \overline{PX^j} \\ &= \overline{QU_j + R_j} \\ &= \overline{R_j} \end{aligned}$$

Les colonnes de $\mathcal{M}_{\mathscr{B}_0}(f)$ étant formées des coordonnées des images des vecteurs de $\mathscr{B}_0$ dans cette même base nous pouvons donc conclure :

$$\boxed{\mathcal{M}_{\mathscr{B}_0}(f) = \tilde{R}.}$$

24. (a) Nous avions déjà établi que rem_Q et quo_Q sont des endomorphismes de $\mathbb{K}[X]$ il est donc aisé de démontré que $\tilde{f}$ est une application linéaire de $\mathbb{K}_{q+r-1}[X]$ dans $\mathbb{K}[X]$.
Comme de plus

$$\begin{cases} \deg(P) = q \\ \deg(Q) = r \\ \deg(\mathrm{rem}_Q(S)) \leqslant r-1 \\ \deg(\mathrm{quo}_Q(S)) \leqslant \deg(S) - \deg(Q) \end{cases}$$

nous en déduisons que

$$\deg\left[P \times \mathrm{rem}_Q(S) + Q \times \mathrm{quo}_Q(S)\right] \leqslant q + r - 1.$$

Et par conséquent

$$\boxed{\text{l'endomorphisme } \tilde{f} \text{ est bien défini.}}$$

(b) Déterminons $\tilde{f}(U+QV)$.

$\tilde{f}$ étant linéaire

$$\tilde{f}(U+QV) = \tilde{f}(U) + \tilde{f}(QV)$$

Puisque $U \in \mathbb{K}_{r-1}[X]$, $\mathrm{quo}_Q(U) = 0$ et $\mathrm{rem}_Q(U) = U$, d'où

$$\tilde{f}(U+QV) = PU + \tilde{f}(QV)$$

Puisque $\mathrm{quo}_Q(QV) = V$ et $\mathrm{rem}_Q(QV) = 0$

$$\tilde{f}(U+QV) = PU + QV$$

$$\boxed{\tilde{f} = PU + QV.}$$

(c) La famille $\mathscr{B}_1$ est une famille de $q+r-1$ polynômes échelonnée en degré de $\mathbb{K}_{q+r-1}[X]$ donc

$$\boxed{\mathscr{B}_1 \text{ est une base de } \mathbb{K}_{q+r-1}[X].}$$

(d) Déterminons $\mathcal{M}_{\mathscr{B}_1}(\tilde{f})$.

Soit $(i,j) \in [\![0,r-1]\!] \times [\![0,q-1]\!]$.
D'après la question précédente

$$\tilde{f}(QX^j) = QX^j$$

et

$$\tilde{f}(X^i) = PX^i$$

En reprenant les notations de la question 23 :

$$\tilde{f}(X^i) = QU_i + R_i$$

En notant $U_i = \sum_{s=0}^{q-1} u_{s,i}X^s$ et $R_i = \sum_{s=0}^{r-1} R_{s,i}X^s$:

$$\tilde{f}(X^i) = \sum_{s=0}^{q-1} u_{s,i}QX^s + \sum_{l=0}^{r-1} R_{l,i}X^l$$

Donc en notant $U = [(U_{s,0})_{s\in[\![0,q-1]\!]}, \ldots, (U_{s,r-1})_{s\in[\![0,q-1]\!]}]$ nous obtenons la matrice par blocs :

$$\boxed{\mathcal{M}_{\mathscr{B}_1}(\tilde{f}) = \begin{bmatrix} \tilde{R} & 0 \\ U & I_q \end{bmatrix}.}$$

Démontrons que : $\det(\tilde{f}) = \det(f)$.

$\mathcal{M}_{\mathscr{B}_1}(\tilde{f})$ est triangulaire par blocs inférieure donc

$$\begin{aligned} \det\left(\mathcal{M}_{\mathscr{B}_1}(\tilde{f})\right) &= \det(\tilde{R}) \times \det(I_q) \\ &= \det(R) \end{aligned}$$

Donc, d'après la question 23 :

$$\det\left(\mathcal{M}_{\mathscr{B}_1}(\tilde{f})\right) = \det(f)$$

Enfin, nous avons bien

$$\boxed{\det(\tilde{f}) = \det(f).}$$

25. (a) Soit $(U,V) \in \mathbb{K}_{r-1}[X] \times \mathbb{K}_{q-1}[X]$.

Par construction de ξ :

$$\begin{aligned}
&\xi(U + X^r V) \\
&= \xi(U) + \xi(X^r V) \\
&= P \times \mathrm{rem}_{X^r}(U) + Q \times \mathrm{quo}_{X^r}(U) + P \times \mathrm{rem}_{X^r}(X^r V) + Q \times \mathrm{quo}_{X^r}(X^r V)
\end{aligned}$$

Puisque $\deg(U) \leqslant r-1$:

$$\xi(U + X^r V) = PU + P \times \mathrm{rem}_{X^r}(X^r V) + Q \times \mathrm{quo}_{X^r}(X^r V)$$

Puisque $X^r V$ est divible par X^r :

$$\xi(U + X^r V) = PU + QV$$

De même :

$$\psi(U + X^r V) = U + QV$$

$$\boxed{\forall (U,V) \in \mathbb{K}_{r-1}[X] \times \mathbb{K}_{q-1}[X],\ \begin{cases} \xi(U + X^r V) = PU + QV \\ \psi(U + X^r V) = U + QV \end{cases}}$$

(b) Déterminons $\mathcal{M}_{\mathscr{B}_{\mathrm{can}}}(\xi)$.

Soit $l \in [\![0, r-1]\!]$.
D'après la question précédente :

$$\begin{aligned}\xi(X^l) &= PX^l \\ &= \sum_{k=0}^{q} a_k X^{k+l}\end{aligned}$$

Soit $k \in [\![0,q-1]\!]$.
D'après la question précédente :

$$\begin{aligned}\xi(X^{r+k}) &= \xi(X^r \cdot X^k) \\ &= QX^k \\ &= \sum_{l=0}^{r} b_l X^{l+K}\end{aligned}$$

Nous en déduisons que

$$\boxed{\mathcal{M}_{\mathscr{B}_{\mathrm{can}}}(\xi) = \mathrm{Syl}(P,Q).}$$

Déterminons $\mathcal{M}_{\mathscr{B}_{\mathrm{can}}}(\psi)$.

En procédant de même, en utilisant le résultat de la question précédente :

$$\mathcal{M}_{\mathscr{B}_{\text{can}}}(\psi)=\begin{array}{c}\begin{array}{cc}\overbrace{\hspace{5cm}}^{r} & \overbrace{\hspace{4cm}}^{q}\end{array}\\ \left[\begin{array}{ccccc|cccc}
1 & 0 & \cdots & \cdots & 0 & b_0 & 0 & \cdots & 0\\
0 & 1 & \ddots & & \vdots & b_1 & b_0 & \ddots & \vdots\\
\vdots & 0 & 1 & \ddots & \vdots & \vdots & b_1 & \ddots & 0\\
\vdots & \vdots & \ddots & \ddots & 0 & \vdots & \ddots & \ddots & b_0\\
0 & \vdots & & \ddots & 1 & \vdots & & \ddots & b_1\\
0 & 0 & \ddots & & 0 & b_r & \ddots & & \vdots\\
\vdots & \ddots & \ddots & & \vdots & 0 & \ddots & \ddots & \vdots\\
0 & \cdots & \cdots & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & b_r
\end{array}\right]\end{array}$$

(c) Justifions que ψ est un automorphisme.

D'après l'énoncé ψ est un endomorphisme. De plus $\det(\psi) = \det\left(\mathcal{M}_{\mathscr{B}_{\text{can}}}(\psi)\right)$.
Or, d'après la question précédente $\mathcal{M}_{\mathscr{B}_{\text{can}}}(\psi)$ est triangulaire supérieure donc $\det\left(\mathcal{M}_{\mathscr{B}_{\text{can}}}(\psi)\right) = b_r^q$.
Par construction $b_r \neq 0$ puisque $\deg(Q) = r$, donc $\deg(\psi) \neq 0$.

$$\boxed{\psi \text{ est un automorphisme.}}$$

(d) Démontrons que $\xi = \tilde{f} \circ \psi$.

Soit $S \in \mathbb{K}_{q+r-1}[X]$.

$$\tilde{f} \circ \psi(S) = \tilde{f}\left[\operatorname{rem}_{X^r}(S) + Q \times \operatorname{quo}_{X^r}(S)\right]$$

Puisque $\tilde{f}$ est linéaire :

$$\tilde{f} \circ \psi(S) = \tilde{f}\left[\operatorname{rem}_{X^r}(S)\right] + \tilde{f}\left[Q \times \operatorname{quo}_{X^r}(S)\right]$$

Puisque $\operatorname{rem}_{X^r}(S) \in \mathbb{K}_{r-1}[X]$:

$$\tilde{f} \circ \psi(S) = P \times \operatorname{rem}_{X^r}(S) + \tilde{f}\left[Q \times \operatorname{quo}_{X^r}(S)\right]$$

Enfin :

$$\tilde{f} \circ \psi(S) = P \times \operatorname{rem}_{X^r}(S) + Q \times \operatorname{quo}_{X^r}(S)$$

Autrement dit :

$$\tilde{f} \circ \psi(S) = \xi(S)$$

Ainsi

$$\boxed{\xi = \tilde{f} \circ \psi.}$$

Puisque ψ est un automorphisme nous en déduisons

$$\xi \circ \psi^{-1} = \tilde{f} \circ \psi \circ \psi^{-1}.$$

Autrement dit

$$\boxed{\tilde{f} = \xi \circ \psi.}$$

26. Démontrons que : $\operatorname{Res}_{\mathbb{K}}(P,Q) = b_r^q \det(f)$.

D'après la question précédente, et puisque les espaces considérés sont tous de dimension finie,

$$\det(\xi) = \det \tilde{f} \cdot \det(\psi).$$

Or

* $\det(\xi) = \det\left[\mathcal{M}_{\mathscr{B}_{\text{can}}}(\xi)\right] = \det\left[\operatorname{Syl}(P,Q)\right] = \operatorname{Res}(P,Q)$,
* $\det(\tilde{f}) = \det(f)$,
* et $\det(\psi) = \det\left[\mathcal{M}_{\mathscr{B}_{\text{can}}}(\psi)\right] = b_r^q$ car $\mathcal{M}_{\mathscr{B}_{\text{can}}}(\psi)$ est triangulaire supérieure donc son déterminant égale le produit de ses coefficients diagonaux,

donc

$$\operatorname{Res}(P,Q) = \det(f) \cdot b_r^q.$$

Finalement

$$\boxed{\operatorname{Res}_{\mathbb{K}}(P,Q) = b_r^q \det(f).}$$

VI Autre preuve de l'assertion (1).

27. (a) Démontrons que $\begin{bmatrix} B & A \\ D & C \end{bmatrix}$ et $\begin{bmatrix} A & B \\ DC & D \end{bmatrix}$ sont semblables.

Soit $g : \left\{ \begin{array}{ccc} \mathscr{M}_{2n,1}(\mathbb{C}) & \to & \mathscr{M}_{2n,1}(\mathbb{C}) \\ X & \mapsto & \begin{bmatrix} A & B \\ C & D \end{bmatrix} X \end{array} \right.$.

$\begin{bmatrix} A & B \\ C & D \end{bmatrix}$ est la matrice représentative de g dans la base canonique

$$(E_{1,1}, E_{2,1}, \ldots, E_{2n,1})$$

de $\mathscr{M}_{2n,1}(\mathbb{C})$.

Clairement $(E_{n+1,1}, \ldots, E_{2n,1}, E_{1,1}, \ldots, E_{n,1})$ est aussi une base de $\mathscr{M}_{2n,1}(\mathbb{C})$, et la matrice représentative de g dans cette base est $\begin{bmatrix} D & C \\ B & A \end{bmatrix}$.

Ces deux matrices représentant un même endomorphisme sont donc semblables.

$$\boxed{\begin{bmatrix} D & C \\ B & A \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} A & B \\ C & D \end{bmatrix}.}$$

(b) Comme précédemment, nous pouvons remarquer que $\begin{bmatrix} A & B \\ C & D \end{bmatrix}$ est la matrice de g dans la base canonique et $\begin{pmatrix} A & -B \\ -C & D \end{pmatrix}$ est celle g dans la base $(E_{1,1}, \ldots, E_{n,1}, -E_{n+1,1}, \ldots, -E_{2n,1})$.

$$\boxed{\begin{pmatrix} A & -B \\ -C & D \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix}.}$$

28. D'après la question 28.(b)

$$\begin{bmatrix} A & B \\ -\overline{B} & \overline{A} \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} A & -B \\ \overline{B} & \overline{A} \end{bmatrix}$$

D'après la question 28.(a)

$$\begin{bmatrix} A & B \\ -\overline{B} & \overline{A} \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} \overline{A} & \overline{B} \\ -B & A \end{bmatrix}$$

Autrement dit $M = \begin{bmatrix} A & B \\ -\overline{B} & \overline{A} \end{bmatrix}$ est semblable à sa conjuguée. Nous en déduisons que leur polynômes caractéristiques sont égaux : $\chi_M = \chi_{\overline{M}}$. Or d'après la question 2.(c) $\chi_{\overline{M}} = \overline{\chi_M}$ donc $\chi_M = \overline{\chi_M}$. Par conséquent

$$\boxed{\text{le polynôme caractéristique de } \begin{bmatrix} A & B \\ -\overline{B} & \overline{A} \end{bmatrix} \text{ est dans } \mathbb{R}[X].}$$

29. (a) Il est clair que θ est un endomorphisme $\mathbb{R}$-linéaire de $\mathbb{C}^n \times \mathbb{C}^n$.

Démontrons que θ commute avec tout endomorphisme de matrice $\begin{bmatrix} A & B \\ -\overline{B} & \overline{A} \end{bmatrix}$.

Soit u un endomorphisme dont la matrice dans la base canonique de $\mathbb{C}^n \times \mathbb{C}^n$ est $\begin{bmatrix} A & B \\ -\overline{B} & \overline{A} \end{bmatrix}$.

Soit $\begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix} \in \mathbb{C}^n \times \mathbb{C}^n$.

*

$$\begin{aligned} u \circ \theta \left[\begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix} \right] &= u \left[\begin{pmatrix} -\overline{Y} \\ \overline{X} \end{pmatrix} \right] \\ &= \begin{bmatrix} A & B \\ -\overline{B} & \overline{A} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} -\overline{Y} \\ \overline{X} \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} -A\overline{Y} + B\overline{X} \\ \overline{BY} + \overline{AX} \end{bmatrix} \end{aligned}$$

*

$$\begin{aligned} \theta \circ u \left[\begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix} \right] &= \theta \left[\begin{pmatrix} AX + BY \\ -\overline{B}X + \overline{A}Y \end{pmatrix} \right] \\ &= \begin{pmatrix} -\overline{-\overline{B}X + \overline{A}Y} \\ \overline{AX + BY} \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} B\overline{X} - A\overline{Y} \\ \overline{AX} + \overline{BY} \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Ainsi

$$\forall \begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix} \in \mathbb{C}^n \times \mathbb{C}^n,\ u \circ \theta \left[\begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix} \right] = \theta \circ u \left[\begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix} \right].$$

Autrement dit

$$\boxed{\theta \text{ et } u \text{ commutent.}}$$

(b) Clairement

$$\boxed{\theta \circ \theta = -\mathrm{Id}_{\mathbb{C}^n \times \mathbb{C}^n}.}$$

(c) Montrons que $\{v,\theta(v)\}$ est libre.

Soient $\alpha,\beta \in \mathbb{C}$ tels que

$$\alpha v + \beta \theta(v) = 0.$$

Notons $v = \begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix}$.

Donc

$$\begin{cases} \alpha X - \beta \overline{Y} & = & 0 & \qquad L_1 \\ \alpha Y + \beta \overline{X} & = & 0 & \qquad L_2 \end{cases}$$

Nous en déduisons successivement :

$$\begin{cases} \overline{\alpha}\overline{X} - \overline{\beta} Y & = & 0 & \qquad L_1 \leftarrow \overline{L_1} \\ \alpha Y + \beta \overline{X} & = & 0 & \end{cases}$$

$$\begin{cases} -\beta\overline{\alpha}\overline{X} + \beta\overline{\beta} Y & = & 0 & \qquad L_1 \leftarrow -\beta L_1 \\ \overline{\alpha}\alpha Y + \overline{\alpha}\beta \overline{X} & = & 0 & \qquad L_2 \leftarrow \overline{\alpha} L_2 \end{cases}$$

Nous en déduisons en sommant L_1 et L_2 :

$$\left(\alpha\overline{\alpha} + \beta\overline{\beta}\right) Y = 0.$$

De $v \neq 0$ (et donc $Y \neq 0$) nous déduisons enfin

$$|\alpha|^2 + |\beta|^2 = 0,$$

et $\alpha = \beta = 0$.

Nous avons établi que si $\alpha v + \beta\theta(v) = 0$ alors $\alpha = \beta = 0$.

$$\boxed{v \text{ et } \theta(v) \text{ sont linéairement indépendants sur } \mathbb{C}.}$$

Montrons que $\mathrm{Vect}_{\mathbb{C}}\left(v,\theta(v)\right)$ est stable par θ.

Soit $w \in \text{Vect}_{\mathbb{C}}(v,\theta(v))$.
Puisque $(v,\theta(v))$ est une base de $\text{Vect}_{\mathbb{C}}(v,\theta(v))$, il existe $(\alpha,\beta) \in \mathbb{C}^2$ tel que : $w = \alpha v + \beta\theta(v)$.
Donc

$$\theta(w) = \overline{\alpha}\theta(v) + \overline{\beta}\theta \circ \theta(v)$$

Puisque $\theta \circ \theta = -Id$:

$$\theta(w) = \overline{\alpha}\theta(v) - \overline{\beta}v$$

Par conséquent $\theta(w) \in \text{Vect}_{\mathbb{C}}(v,\theta(v))$.

$$\boxed{\theta\left[\text{Vect}_{\mathbb{C}}(v,\theta(v))\right] \subset \text{Vect}_{\mathbb{C}}(v,\theta(v)).}$$

(d) Soit $w \in E \cap \text{Vect}_{\mathbb{C}}(v,\theta(v))$.
Puisque $w \in \text{Vect}_{\mathbb{C}}(v,\theta(v))$ et que, d'après la question précédente $\{v,\theta(v)\}$ est une base de $\text{Vect}_{\mathbb{C}}(v,\theta(v))$, il existe $\alpha,\beta \in \mathbb{C}$ tels que $w = \alpha v + \beta\theta(v)$.
Par conséquent

$$\begin{aligned}\theta(w) &= \overline{\alpha}\theta(v) + \overline{\beta}\theta \circ \theta(v)\\ &= \overline{\alpha}\theta(v) - \overline{\beta}v\end{aligned}$$

nous en déduisons

$$\begin{aligned}\overline{\beta}w + \alpha\theta(w) &= \alpha\overline{\beta}v + |\beta|^2\theta(v) + |\alpha|^2\theta(v) - \alpha\overline{\beta}v\\ &= (|\alpha|^2 + |\beta|^2)v\end{aligned}$$

E étant stable par θ, $\overline{\beta}w + \alpha\theta(w) \in E$. Or $v \notin E$ donc nécessairement $\alpha = \beta = 0$ et par conséquent $w = 0$.
Autrement dit

$$\boxed{E \cap \text{Vect}_{\mathbb{C}}(v,\theta(v)) = \{0\}.}$$

30. (a) D'après la question 28 le polynôme caractéristique de $\begin{bmatrix} A & B \\ -\overline{B} & \overline{A} \end{bmatrix}$ est dans $\mathbb{R}[X]$ et puisque λ en est une racine nécessairement $\overline{\lambda}$ en est également une.

$$\boxed{\overline{\lambda} \text{ est aussi une valeur propre de } \begin{bmatrix} A & B \\ -\overline{B} & \overline{A} \end{bmatrix}.}$$

Démontrons que $\theta(E'_\lambda) \subset E'_{\overline{\lambda}}$.

Soit $x \in E'_\lambda$. Démontrons que $\theta(x) \in E'_{\overline{\lambda}}$.

En notant u un endomorphisme de $\mathbb{C}^n \times \mathbb{C}^n$ dont la matrice est $\begin{bmatrix} A & B \\ -\overline{B} & \overline{A} \end{bmatrix}$ et m_λ la multiplicité de λ dans le polynôme minimal de u. Rappelons que $\chi_u \in \mathbb{R}[X]$ donc $m_\lambda = m_{\overline{\lambda}}$.

Puisque θ et u (ou tout polynôme de u) commutent et puisque $\theta(\lambda y) = \overline{\lambda}\theta(y)$:

$$\begin{aligned}(u - \overline{\lambda} Id)^{m_{\overline{\lambda}}} \circ \theta(x) &= \theta \circ (u - \lambda Id)^{m_\lambda}(x) \\ &= \theta(0) \\ &= 0\end{aligned}$$

Ainsi $\theta(x) \in E'_{\overline{\lambda}}$ et donc $\theta(E'_\lambda) \subset E'_{\overline{\lambda}}$.

Démontrons que $E'_{\overline{\lambda}} \subset \theta(E'_\lambda)$.

Nous démontrerions comme précédemment que $\theta(E'_{\overline{\lambda}}) \subset E'_\lambda$.
Donc $\theta \circ \theta(E'_{\overline{\lambda}}) \subset \theta(E'_\lambda)$.
Or $\theta \circ \theta(E'_\lambda) = -Id(E'_\lambda) = E'_\lambda$ donc $E'_{\overline{\lambda}} \subset \theta(E'_\lambda)$.

$$\boxed{E'_{\overline{\lambda}} = \theta\left(E'_\lambda\right).}$$

(b) Soit $v_1 \in E'_\lambda \setminus \{0\}$.
D'après la question 29.(c) $(v_1,\theta(v_1))$ est une base de $F_1 = \text{Vect}_{\mathbb{C}}\left(v_1,\theta(v_1)\right)$.
D'après la question précédente, puisque $\lambda \in \mathbb{R}$, $\theta(E'_\lambda) = E'_\lambda$ et donc $\theta(v_1) \in E'_\lambda$. Par conséquent $F_1 \subset E_\lambda$.

De deux choses l'une soit $F_1 = E'_\lambda$ (et la question est réglée) soit il existe $v_2 \in E'_\lambda \setminus F_1$.

Alors comme précédemment notons $F_2 = \mathrm{Vect}_{\mathbb{C}}(v_2, \theta(v_2)) \subset E'_\lambda$. D'après la question 29.(c) F_1 est stable par θ, donc, d'après la question 29.(d) $F_1 \cap F_2 = \{0\}$. Nous en déduisons : $F_1 \oplus F_2 \subset E'_\lambda$.

De deux choses l'une soit $F_1 \oplus F_2 = E'_\lambda$ (et la question est réglée) soit il existe $v_3 \in E'_\lambda \setminus F_1 \oplus F_2$. Et nous réitérons : $F_1 \oplus F_2 \oplus F_3 \subset E'_\lambda$.

En réitérant un nombre nécessairement fini de fois (la dimension est finie) nous établissons que E'_λ est somme directe de sous-espaces vectoriels de dimension deux. Donc

$$\boxed{\dim_{\mathbb{C}} E'_\lambda \text{ est paire.}}$$

31. $\mathbb{C}$ étant algébriquement clos son déterminant est le produit de ses valeurs propres répétées avec leur multiplicité algébrique.
D'après la question précédente le produit des valeurs propres réelles est positif puisque la multiplicité algébrique de chacune d'entre elle est paire.
D'après la question 28 le polynôme caractéristique de $\begin{bmatrix} A & B \\ -\overline{B} & \overline{A} \end{bmatrix}$ est à coefficients réels donc les valeurs propres complexes non réelles sont conjuguées deux à deux et leur produit est par conséquent positif.

$$\boxed{\forall (A,B) \in \mathscr{M}_n(\mathbb{C})^2,\ \det\left(\begin{bmatrix} A & B \\ -\overline{B} & \overline{A} \end{bmatrix}\right) \in \mathbb{R}_+.}$$