Agrégation interne 2018 première épreuve.

Durée : 6 heures.

L'usage de tout ouvrage de référence et de tout matériel électronique (y compris la calculatrice) est rigoureusement interdit.

Notations, rappels et présentation du problème.

- On note $\mathbb{N}$, $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$, $\mathbb{R}$ et $\mathbb{C}$ les ensembles de nombres usuels : entiers naturels, entiers relatifs, nombres rationnels, nombres réels et nombres complexes.
- Dans tout le problème, n est un entier naturel non nul fixé et $\mathbb{K}$ désigne un corps égal à $\mathbb{Q}$, $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.
- Si A est une partie de B (i.e. $A \subset B$), on note $B - A$ le complémentaire de A dans B .
- Si p et q sont deux entiers relatifs, on pose $\llbracket p, q \rrbracket = \{k \in \mathbb{Z} \mid p \leq k \leq q\}$.
- $\mathbb{K}[X]$ désigne l'ensemble des polynômes à une indéterminée et à coefficients dans $\mathbb{K}$; pour tout entier naturel d , on note $\mathbb{K}_d[X]$ l'ensemble des éléments de $\mathbb{K}[X]$ de degré inférieur ou égal à d .
- Si P et Q sont deux polynômes, on note $P \wedge Q$ le p.g.c.d. de P et Q ; par définition, lorsqu'il n'est pas nul, ce polynôme est unitaire.
- On identifie $\mathbb{K}^n$ avec le $\mathbb{K}$ -espace vectoriel $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K})$ des matrices colonnes de taille n .
- $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ et $\text{GL}_n(\mathbb{K})$ désignent respectivement l'ensemble des matrices carrées de taille n et l'ensemble des matrices carrées inversibles de taille n à coefficients dans $\mathbb{K}$; $(\mathcal{M}_n(\mathbb{K}), +, \cdot, \times)$ est une $\mathbb{K}$ -algèbre, i.e. $(\mathcal{M}_n(\mathbb{K}), +, \cdot)$ est un $\mathbb{K}$ -espace vectoriel et $(\mathcal{M}_n(\mathbb{K}), +, \times)$ est un anneau; $(\text{GL}_n(\mathbb{K}), \times)$ un groupe.
- $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ est naturellement muni d'une structure de $\mathbb{R}$ -algèbre par restriction de la loi externe aux nombres réels.
- Si E est un $\mathbb{K}$ -espace vectoriel, on note $\mathcal{L}(E)$ l'ensemble des endomorphismes de E .
- Si $u \in \mathcal{L}(E)$ et si $\mathcal{B}$ est une base de E , on note $\mathcal{M}_{\mathcal{B}}(u)$ la matrice de u relativement à la base $\mathcal{B}$.
- Soit $A = [a_{i,j}]_{1 \leq i, j \leq n} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. Le déterminant de A est noté $\det(A)$ ou

$$\begin{vmatrix} a_{1,1} & \cdots & a_{1,n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n,1} & \cdots & a_{n,n} \end{vmatrix}$$

- Pour tout $v = (x_i)_{1 \leq i \leq n} \in \mathbb{C}^n$, on pose $\bar{v} = (\bar{x}_i)_{1 \leq i \leq n}$.

- Pour toute matrice $A = [a_{i,j}]_{1 \leq i,j \leq n} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$, on note $\bar{A}$ la matrice $[\bar{a}_{i,j}]_{1 \leq i,j \leq n}$.
- Pour toute matrice $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, on note $\chi_A = \det(XI_n - A)$ le polynôme caractéristique de A (I_n désigne la matrice unité de taille n). Ce polynôme est unitaire de degré n .
- Si E désigne un ensemble quelconque, on dit qu'une application $f : E \rightarrow E$ est involutive lorsque $f \circ f = \text{Id}_E$.

L'objectif du problème est d'établir l'assertion (1) suivante :

$$\forall (A,B) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})^2, \det \left(\begin{bmatrix} A & B \\ -\bar{B} & \bar{A} \end{bmatrix} \right) \in \mathbb{R}_+. \quad (1)$$

Pour cela, on commencera par montrer que cette assertion est équivalente à l'assertion (2) :

$$\forall C \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C}), \det (I_n + C\bar{C}) \in \mathbb{R}_+. \quad (2)$$

Une démonstration directe sera proposée en dernière partie.

I Résultats préliminaires.

On fixe deux matrices A et B , éléments de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$.

1. Démontrez l'assertion (1) dans le cas où $n = 1$.

Démontrons : $\forall (a,b) \in \mathbb{C}^2, \det \left(\begin{bmatrix} a & b \\ -\bar{b} & \bar{a} \end{bmatrix} \right) \in \mathbb{R}_+.$

Soit $(a,b) \in \mathbb{C}^2$.

$$\begin{aligned} \det \left(\begin{bmatrix} a & b \\ -\bar{b} & \bar{a} \end{bmatrix} \right) &= a\bar{a} - (-\bar{b})b \\ &= |a|^2 + |b|^2 \end{aligned}$$

donc :

$$\det \left(\begin{bmatrix} a & b \\ -\bar{b} & \bar{a} \end{bmatrix} \right) \geq 0.$$

(1) est vraie dans le cas $n = 1$.

2. Étude de la conjugaison dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$.(a) Montrer que, pour tout $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ et tout $v \in \mathbb{C}^n$, $\overline{Av} = \overline{A}\overline{v}$.Démontrons : $\forall A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C}), \forall v \in \mathbb{C}^n, \overline{Av} = \overline{A}\overline{v}$.Soient $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ et $v \in \mathbb{C}^n$.

Avec les notations usuelles :

$$Av = \left[\sum_{k=1}^n a_{i,k} v_k \right]_{1 \leq i \leq n}$$

Par définition du conjugué d'une matrice :

$$\overline{Av} = \left[\sum_{k=1}^n \overline{a_{i,k} v_k} \right]_{1 \leq i \leq n}$$

Par linéarité de la conjugaison :

$$\overline{Av} = \left[\sum_{k=1}^n \overline{a_{i,k}} \overline{v_k} \right]_{1 \leq i \leq n}$$

Le conjugué d'un produit égalant le produit des conjugués :

$$\overline{Av} = \left[\sum_{k=1}^n \overline{a_{i,k}} \cdot \overline{v_k} \right]_{1 \leq i \leq n}$$

Par définition du produit matriciel :

$$\overline{Av} = \overline{A}\overline{v}$$

Nous avons démontré que $\forall A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C}), \forall v \in \mathbb{C}^n, \overline{Av} = \overline{A}\overline{v}$.

(b) Montrer que l'application : $\begin{cases} \mathcal{M}_n(\mathbb{C}) & \rightarrow \mathcal{M}_n(\mathbb{C}) \\ A & \mapsto \overline{A} \end{cases}$ est un automorphisme de $\mathbb{R}$ -algèbre involutif.Notons φ l'application définie dans l'énoncée.Démontrons que φ est un automorphisme involutif.

* $(\mathcal{M}_n(\mathbb{C}), +, \cdot, \times)$ est une $\mathbb{R}$ -algèbre.

* φ est $\mathbb{R}$ -linéaire puisque clairement :

$$\forall \lambda \in \mathbb{C}, \forall (A, B) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})^2, \overline{\lambda A + B} = \lambda \overline{A} + \overline{B},$$

par linéarité de la conjugaison et car $\overline{\bar{\lambda}} = \lambda$. Donc φ est un endomorphisme de $\mathbb{R}$ -espace vectoriel.

* φ est un morphisme d'anneau car en plus d'être $\mathbb{R}$ -linéaire il vérifie : $\forall (A, B) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C}), \overline{A \times B} = \overline{A} \times \overline{B}$. En effet si A et B sont dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ alors

$$\begin{aligned} \overline{AB} &= \left[\sum_{k=0}^n \overline{a_{i,k} b_{k,j}} \right]_{1 \leq i, j \leq n} \\ &= \left[\sum_{k=0}^n \overline{a_{i,k}} \cdot \overline{b_{k,j}} \right]_{1 \leq i, j \leq n} \\ &= \overline{A} \times \overline{B} \end{aligned}$$

* Clairement φ est involutive :

$$\forall A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C}), \overline{\overline{A}} = A.$$

Et puisque φ est involutive, elle est bijective.

Ainsi φ est un $\mathbb{R}$ -morphisme d'algèbre d'une algèbre dans lui-même involutive donc bijective.

φ est un automorphisme de $\mathbb{R}$ -algèbres involutif.

(c) Monter que, pour tout $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C}), \det(\overline{A}) = \overline{\det(A)}$.

Démontrons que : $\forall A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C}), \det(\overline{A}) = \overline{\det(A)}$.

Il s'agit d'une conséquence du fait que le déterminant est une application n -linéaire et que la conjugaison est un endomorphisme de $\mathbb{C}$.

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$.

$$\begin{aligned} \det(\overline{A}) &= \sum_{\sigma \in \mathfrak{S}_n} \varepsilon(\sigma) \overline{a_{\sigma(1),1}} \dots \overline{a_{\sigma(n),n}} \\ &= \overline{\sum_{\sigma \in \mathfrak{S}_n} \varepsilon(\sigma) a_{\sigma(1),1} \dots a_{\sigma(n),n}} \\ &= \overline{\det(A)} \end{aligned}$$

(d) En déduire que, pour tout $A \in \text{GL}_n(\mathbb{C})$, $\det(A\bar{A}) \in \mathbb{R}_+^*$.

Démontrons : $\forall A \in \text{GL}_n(\mathbb{C})$, $\det(A\bar{A}) \in \mathbb{R}_+^*$.

Soit $A \in \text{GL}_n(\mathbb{C})$.

$$\begin{aligned}\det(A\bar{A}) &= \det(A) \cdot \det(\bar{A}) \\ &= \det(A) \cdot \overline{\det(A)} \\ &= |\det(A)|^2\end{aligned}$$

Et par conséquent : $\det(A\bar{A}) \in \mathbb{R}_+$.

Comme de plus $A \in \text{GL}_n(\mathbb{C})$, $\det(A) \neq 0$.

Finalement

nous avons établi : $\forall A \in \text{GL}_n(\mathbb{C})$, $\det(A\bar{A}) \in \mathbb{R}_+^*$.

3. Densité de $\text{GL}_n(\mathbb{C})$.

(a) Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$. Montrer qu'il existe $\eta > 0$ tel que :

$$\forall \lambda \in \mathbb{C}, 0 < |\lambda| < \eta \Rightarrow A - \lambda I_n \in \text{GL}_n(\mathbb{C}).$$

Démontrons : $\forall A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$, $\exists \eta > 0$, $\forall \lambda \in \mathbb{C}$, $0 < |\lambda| < \eta \Rightarrow A - \lambda I_n \in \text{GL}_n(\mathbb{C})$.

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$.

$\chi_A(X) = \det(XI_n - A)$ admet au plus n racines distinctes dans $\mathbb{C}$.

Notons η le plus petit module non nul des racines de χ_A s'il existe : autrement dit, s'il existe, $\eta = \min\{|\lambda| \mid \lambda \in \chi_A^{-1}(\{0\}) \setminus \{0\}\}$. Sinon soit $\eta \in \mathbb{R}_+^*$.

Par construction de η si $\lambda \in \mathbb{C}$ est tel que $0 < |\lambda| < \eta$, alors $\chi_A(\lambda) \neq 0$. Autrement dit $\det(\lambda I_n - A) \neq 0$. Ce qui équivaut encore à dire que $\lambda I_n - A$ est inversible.

Nous avons donc établi que, quelque soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$, il existe $\eta > 0$ tel que :

$$\forall \lambda \in \mathbb{C}, 0 < |\lambda| < \eta \Rightarrow A - \lambda I_n \in \text{GL}_n(\mathbb{C}).$$

(b) En déduire que $\text{GL}_n(\mathbb{C})$ est dense dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$.

$\text{GL}_n(\mathbb{C})$ est dense dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ si et seulement si l'adhérence, $\overline{\text{GL}_n(\mathbb{C})}$, de $\text{GL}_n(\mathbb{C})$ égale $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$.

Puisque $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ est un espace métrique (en tant qu'espace vectoriel de dimension fini c'est un espace normé) il faut et il suffit de démontrer que tout élément de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ est limite d'une suite d'éléments de $\text{GL}_n(\mathbb{C})$.

Démontrons que, quelque soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$, A est limite d'une suite d'éléments de $\text{GL}_n(\mathbb{C})$.

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$.

Soit $k \in \mathbb{N}^*$.

Posons $A_k = A - \frac{1}{k}I_n$.

D'après la question précédente il existe η tel que pour tout $k \geq \frac{1}{\eta}$, $A_k \in \text{GL}_n(\mathbb{C})$.

Ainsi $(A_k)_{k \geq \frac{1}{\eta}}$ est une suite de matrices inversibles et clairement sa limite est A . Il n'y a qu'une seule limite possible toutes les normes étant équivalentes en dimension finie.

$$\overline{\text{GL}_n(\mathbb{C})} = \mathcal{M}_n(\mathbb{C}).$$

4. On suppose dans cette question que A est inversible.

(a) Calculer $\begin{bmatrix} I_n & 0 \\ \overline{B}A^{-1} & I_n \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} A & B \\ -\overline{B} & \overline{A} \end{bmatrix}$.

calculons le produit.

$$\begin{aligned} & \begin{bmatrix} I_n & 0 \\ \overline{B}A^{-1} & I_n \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} A & B \\ -\overline{B} & \overline{A} \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} I_n \times A + 0 \times (-\overline{B}) & I_n \times B + 0 \times \overline{A} \\ \overline{B}A^{-1} \times A + I_n \times (-\overline{B}) & \overline{B}A^{-1} \times B + I_n \times \overline{A} \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} A & B \\ \overline{B} - \overline{B} & \overline{B}A^{-1}B + \overline{A} \end{bmatrix} \end{aligned}$$

Finalement

$$\begin{bmatrix} I_n & 0 \\ \overline{B}A^{-1} & I_n \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} A & B \\ -\overline{B} & \overline{A} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A & B \\ 0 & \overline{B}A^{-1}B + \overline{A} \end{bmatrix}.$$

(b) En déduire qu'il existe une matrice $C \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ à déterminer telle que :

$$\det \left(\begin{bmatrix} A & B \\ -\overline{B} & \overline{A} \end{bmatrix} \right) = |\det(A)|^2 \det(I_n + C\overline{C}).$$

Exhibons une matrice C .

De la question précédente nous déduisons

$$\det \left(\begin{bmatrix} I_n & 0 \\ \overline{B}A^{-1} & I_n \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} A & B \\ -\overline{B} & \overline{A} \end{bmatrix} \right) = \det \left(\begin{bmatrix} A & B \\ 0 & \overline{B}A^{-1}B + \overline{A} \end{bmatrix} \right)$$

Nous remarquons dans le terme de droite le déterminant d'une matrice triangulaire par blocs :

$$\det \left(\begin{bmatrix} I_n & 0 \\ \overline{B}A^{-1} & I_n \end{bmatrix} \right) \cdot \det \left(\begin{bmatrix} A & B \\ -\overline{B} & \overline{A} \end{bmatrix} \right) = \det(A) \cdot \det(\overline{B}A^{-1}B + \overline{A})$$

De même à gauche :

$$\det(I_n) \cdot \det(I_n) \cdot \det \left(\begin{bmatrix} A & B \\ -\overline{B} & \overline{A} \end{bmatrix} \right) = \det(A) \cdot \det[\overline{A}(\overline{A}^{-1}\overline{B}A^{-1}B + I_n)]$$

Ainsi

$$\begin{aligned} \det \left(\begin{bmatrix} A & B \\ -\overline{B} & \overline{A} \end{bmatrix} \right) &= \det(A) \cdot \det(\overline{A}) \cdot \det(\overline{A}^{-1}\overline{B}A^{-1}B + I_n) \\ &= \det(A) \cdot \overline{\det(A)} \cdot \det(\overline{A}^{-1}\overline{B}A^{-1}B + I_n) \\ &= |\det(A)|^2 \cdot \det(\overline{A}^{-1}\overline{B}A^{-1}B + I_n) \end{aligned}$$

Par conséquent

$$\text{en notant } C = \overline{A^{-1}B} \text{ nous avons bien } \det \left(\begin{bmatrix} A & B \\ -\overline{B} & \overline{A} \end{bmatrix} \right) = |\det(A)|^2 \det(I_n + C\overline{C}).$$

5. Montrer que (1) et (2) sont équivalentes.

Démontrons : (2) $\Rightarrow$ (1).

Supposons que (2) est vraie.

Soit $(A, B) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$.

Puisque $\text{GL}_n(\mathbb{C})$ est dense dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$, il existe une suite $(A_k)_{k \in \mathbb{N}} \in \text{GL}_n(\mathbb{C})^{\mathbb{N}}$ qui converge vers A .

De la question 4.(b), les A_k étant inversibles, nous déduisons que

$$\forall k \in \mathbb{N}, \det \left(\begin{bmatrix} A_k & B \\ -\overline{B} & A_k \end{bmatrix} \right) = |\det(A_k)|^2 \det(I_n + C_k \overline{C_k})$$

avec $C_k = \overline{A_k^{-1} B}$.

Toutes les applications intervenants étant continues nous en déduisons par passage à la limite :

$$\det \left(\begin{bmatrix} A & B \\ -\overline{B} & A \end{bmatrix} \right) = |\det(A)|^2 \det(I_n + C \overline{C})$$

avec $C = \overline{A^{-1} B}$.

$|\det(A)|^2 \geq 0$ et d'après (2)

$$\forall k \in \mathbb{N}, \det(I_n + C_k \overline{C_k}) \geq 0,$$

et donc en passant à la limite $\det(I_n + C \overline{C}) \geq 0$.

Par conséquent $\det \left(\begin{bmatrix} A & B \\ -\overline{B} & A \end{bmatrix} \right) \geq 0$.

Nous avons démontré que (2) $\Rightarrow$ (1).

Démontrons que (1) $\Rightarrow$ (2).

Supposons que (1) est vraie.

Soit $C \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$.

En notant $A = I_n$ et $B = \overline{C}$ nous avons $C = \overline{A^{-1} B}$ avec $A \in \text{GL}_n(\mathbb{C})$. Donc, d'après la question 4.(b),

$$\det(I_n + C \overline{C}) = \frac{1}{|\det(A)|^2} \det \left(\begin{bmatrix} A & B \\ -\overline{B} & A \end{bmatrix} \right)$$

Or, d'après (1), $\det \left(\begin{bmatrix} A & B \\ -\overline{B} & A \end{bmatrix} \right) \geq 0$, donc $\det(I_n + C \overline{C}) \geq 0$.

Nous avons démontré que : (1) $\Rightarrow$ (2).

Puisque nous avons vérifié qu'une implication et sa réciproque sont vraie :

$$(1) \Leftrightarrow (2).$$

II Démonstration de (2) dans un cas particulier.

On considère : $\Omega = \{C \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C}) \mid \chi_{C\bar{C}} \text{ est un polynôme scindé à racines simples}\}$.
Soit $C \in \Omega$.

6. Soit $(A, B) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})^2$.

(a) Montrer que si A est inversible, $\chi_{AB} = \chi_{BA}$.

Indication : on pourra montrer que AB et BA sont semblables.

Démontrons : $A \in \text{GL}_n(\mathbb{C}) \Rightarrow \chi_{AB} = \chi_{BA}$.

* Montrons que, quelque soit $(M, N) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$, si M et N sont semblables alors $\chi_M = \chi_N$.

Soient M et N telles qu'il existe $P \in \text{GL}_n(\mathbb{C})$ avec $M = PNP^{-1}$.

$$\begin{aligned} \chi_M(X) &= \det(XI_n - M) \\ &= \det(XI_n - PNP^{-1}) \\ &= \det [P(XI_n - N)P^{-1}] \\ &= \det(P) \cdot \det(XI_n - N) \cdot \det(P^{-1}) \\ &= \det(XI_n - N) \cdot \det(P) \cdot \det(P)^{-1} \\ &= \det(XI_n - N) \\ &= \chi_N(X) \end{aligned}$$

* Montrons que si A est inversible alors AB et BA sont semblables.
Soit $A \in \text{GL}_n(\mathbb{C})$.

$$\begin{aligned} A^{-1}(AB)A &= A^{-1}ABA \\ &= BA \end{aligned}$$

Donc $AB \sim BA$.

Des deux points précédents nous déduisons que

$$\text{si } A \text{ est inversible alors } \chi_{AB} = \chi_{BA}.$$

(b) Montrer que $\chi_{AB} = \chi_{BA}$.

Indication : on pourra utiliser la question 3.(b).

Montrons que $\chi_{AB} = \chi_{BA}$.

Du fait de la densité de $\text{GL}_n(\mathbb{C})$ dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$, nous pouvons affirmer qu'il existe une suite $(A_n)_{n \in \mathbb{N}}$ d'éléments de $\text{GL}_n(\mathbb{C})$ qui converge vers A .

D'après la question précédente :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \det(XI_n - A_n B) = \det(XI_n - B A_n).$$

Donc en passant à la limite et du fait de la continuité du déterminant

$$\det(XI_n - AB) = \det(XI_n - BA).$$

Autrement dit

$$\chi_{AB} = \chi_{BA}.$$

(c) Montrer que $\chi_{C\bar{C}} \in \mathbb{R}[X]$.

Démontrons que $\chi_{C\bar{C}} = \overline{\chi_{C\bar{C}}}$.

D'après la question précédente :

$$\chi_{C\bar{C}} = \chi_{\bar{C}C}$$

Ce qui équivaut successivement à

$$\chi_{C\bar{C}}(X) = \det(XI_n - \bar{C}C)$$

$$\chi_{C\bar{C}}(X) = \overline{\det(XI_n - C\bar{C})}$$

Ce qui équivaut, d'après la question 2.(c), à

$$\chi_{C\bar{C}}(X) = \overline{\det(XI_n - C\bar{C})}$$

$$\chi_{C\bar{C}} = \overline{\chi_{C\bar{C}}}$$

Par identification deux à deux des coefficients des polynômes nous en déduisons que ces coefficients sont tous réels.

$$\chi_{C\bar{C}} \in \mathbb{R}[X].$$

7. Montrer que $C\bar{C}$ est diagonalisable. Que dire de la dimension des sous-espaces propres.

Justifions que $C\bar{C}$ est diagonalisable.

D'après le théorème Cayley-Hamilton, $\chi_{C\bar{C}}$ est un polynôme annulateur, et par construction il est scindé simple donc

$$C\bar{C} \text{ est diagonalisable.}$$

Déterminons la dimension des sous-espaces propres.

Nous savons que $C\bar{C}$ est diagonalisable si et seulement si son polynôme caractéristique est scindé et que la dimension des sous-espaces propres égale la multiplicité des valeurs propres correspondantes. Or, par construction, $\chi_{C\bar{C}}$ est simple donc

$$\text{les sous-espaces propres de } C\bar{C} \text{ ont tous une dimension de 1.}$$

8. Soient λ une valeur propre *réelle* de $C\bar{C}$ et $v \in \mathbb{C}^n$ un vecteur propre associé.
- (a) Montrer que $\bar{C}Cv = \lambda\bar{v}$.

$$\begin{aligned} \bar{C}Cv &= \overline{C\bar{C}v} \\ &= \overline{\lambda v} \end{aligned}$$

et puisque $\lambda \in \mathbb{R}$

$$\bar{C}Cv = \lambda\bar{v}$$

$$\bar{C}C\bar{v} = \lambda\bar{v}.$$

(b) En calculant $C\overline{C}C\overline{v}$, montrer qu'il existe $\mu \in \mathbb{C}$ tel que $C\overline{v} = \mu v$.

Démontrons : $\exists \mu \in \mathbb{C}, C\overline{v} = \mu v$.

D'après la question précédente :

$$\begin{aligned} C\overline{C}C\overline{v} &= C(\lambda\overline{v}) \\ &= \lambda C\overline{v} \end{aligned}$$

Résultat que nous pouvons interpréter en disant que $C\overline{v}$ est un vecteur propre de $C\overline{C}$ pour la valeur propre λ .

Mais, d'après la question (7) le sous-espace propre associé à la valeur propre λ est de dimension 1, donc, nécessairement $\{v\}$ est une base du sous espace-propre et par conséquent :

$$\exists \mu \in \mathbb{C}, C\overline{v} = \mu v.$$

(c) Calculer $C(\overline{\mu v})$ de deux manières différentes. En déduire que $\lambda \in \mathbb{R}_+$.

* D'une part :

$$\begin{aligned} C(\overline{\mu v}) &= \overline{\mu} C\overline{v} \\ &= \overline{\mu} \mu v \\ &= |\mu|^2 v \end{aligned}$$

* D'autre part :

$$\begin{aligned} C(\overline{\mu v}) &= C(\overline{Cv}) \\ &= C\overline{C}v \\ &= \lambda v \end{aligned}$$

* Par transitivité :

$$\lambda v = |\mu|^2 v$$

D'où

$$(\lambda - |\mu|^2)v = 0$$

Et puisque $v \neq 0$:

$$\lambda - |\mu|^2 = 0$$

Nous en déduisons, puisque $|\mu| \in \mathbb{R}_+$, que

$$\lambda \in \mathbb{R}_+.$$

9. Montrer que $\det(I_n + C\bar{C}) \in \mathbb{R}_+$.

Démontrons que $\det(I_n + C\bar{C})$.

Réinterprétons la question en :

$$\begin{aligned} \det(I_n + C\bar{C}) &= (-1)^n \det(-I_n - C\bar{C}) \\ &= (-1)^n \chi_{C\bar{C}}(-1) \end{aligned}$$

En notant $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ les n valeurs propres distinctes de $C\bar{C}$, d'après la question 7 :

$$\begin{aligned} \det(I_n + C\bar{C}) &= (-1)^n (-1 - \lambda_1) \dots (-1 - \lambda_n) \\ &= (1 + \lambda_1) \dots (1 + \lambda_n) \end{aligned}$$

Puisque $\chi_{C\bar{C}} \in \mathbb{R}[X]$ ses racines sont, soit réelles, soit complexes et conjuguées deux à deux.

Soit λ une valeur propre de $C\bar{C}$.

Si $\lambda \in \mathbb{R}$, alors d'après la question précédente $\lambda \in \mathbb{R}_+$ et donc $1 + \lambda \in \mathbb{R}_+$.

Si $\lambda \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$, alors $(1 + \lambda)(1 + \bar{\lambda}) = (1 + \lambda)\overline{(1 + \lambda)} = |1 + \lambda|^2 \in \mathbb{R}_+$.

Par conséquent : $(1 + \lambda_1) \dots (1 + \lambda_n) \in \mathbb{R}_+$.

$$\det(I_n + C\bar{C}) \in \mathbb{R}_+.$$

III Résultant de deux polynômes.

Soit $(q, r) \in (\mathbb{N}^*)^2$ un couple d'entiers naturels non nuls.

Soient $P = \sum_{k=0}^q a_k X^k \in \mathbb{K}_q[X]$ un polynôme de degré q et $Q = \sum_{l=0}^r b_l X^l \in \mathbb{K}_r[X]$ un polynôme de degré r .

On pose :

$$\text{Res}_{\mathbb{K}}(P,Q) = \left(\begin{array}{cccc|cccc} & \overbrace{\hspace{2cm}}^r & & & & \overbrace{\hspace{2cm}}^q & & & & \\ a_0 & 0 & \cdots & 0 & b_0 & 0 & \cdots & 0 & & \\ a_1 & a_0 & & & b_1 & b_0 & & & & \\ & a_1 & a_0 & & & & & & 0 & \\ & & a_1 & a_0 & & & & & b_0 & \\ & & & & & & & & & b_1 \\ a_q & & & & a_0 & & & & & \\ 0 & a_q & & & a_1 & b_r & & & & \\ & & & & & 0 & & & & \\ & & & & & & & & & \\ 0 & & & 0 & a_q & 0 & & & 0 & b_r \end{array} \right) \in \mathbb{K}$$

$\text{Res}_{\mathbb{K}}(P,Q)$ est appelé résultant de P et Q . C'est le déterminant d'une matrice carrée de taille $q+r$, appelée matrice de Sylvester et notée $\text{Syl}(P,Q)$.

On pose $\mathcal{B} = ((1,0),(X,0),\dots,(X^{r-1},0),(0,1),(0,X),\dots,(0,X^{q-1}))$ et $\mathcal{B}_{\text{can}} = (X^k)_{0 \leq k \leq q+r-1}$.

On considère enfin l'application $\varphi : \begin{cases} \mathbb{K}_{r-1}[X] \times \mathbb{K}_{q-1}[X] & \rightarrow \mathbb{K}_{q+r-1}[X] \\ (U,V) & \mapsto PU + QV \end{cases}$.

10. Montrer que $\mathcal{B}$ est une base de $\mathbb{K}_{r-1}[X] \times \mathbb{K}_{q-1}[X]$.

$(X^k)_{k \in [0,r]}$ et $(X^l)_{l \in [0,q]}$ sont des bases respectivement de $\mathbb{K}_{r-1}[X]$ et $\mathbb{K}_{q-1}[X]$, donc $\mathcal{B}$ est une famille libre de $\mathbb{K}_{r-1}[X] \times \mathbb{K}_{q-1}[X]$.

Comme de plus $\mathcal{B}$ a $r+q = \dim(\mathbb{K}_{r-1}[X] \times \mathbb{K}_{q-1}[X])$ éléments nous pouvons donc conclure

$\mathcal{B}$ est une base de $\mathbb{K}_{r-1}[X] \times \mathbb{K}_{q-1}[X]$.

11. Montrer que φ est une application linéaire.

Démontrons que φ est linéaire.

$(\mathbb{K}_{r-1}[X] \times \mathbb{K}_{q-1}[X], +, \cdot)$ (muni des lois induites naturellement par le produit cartésien) et $(\mathbb{K}_{q+r-1}[X], +, \cdot)$ sont des espaces vectoriels. Soient $\lambda \in \mathbb{K}$, (U, V) et (R, S) dans $\mathbb{K}_{r-1}[X] \times \mathbb{K}_{q-1}[X]$.

$$\begin{aligned} \varphi[\lambda(U, V) + (R, S)] &= \varphi[(\lambda U + R, \lambda V + S)] \\ &= P[\lambda U + R] + Q[\lambda V + S] \\ &= \lambda PU + PR + \lambda QV + QS \\ &= \lambda[PU + QV] + PR + QS \\ &= \lambda\varphi[(U, V)] + \varphi[(R, S)] \end{aligned}$$

φ est une application $\mathbb{K}$ -linéaire.

12. Expliciter sa matrice M relativement aux bases $\mathcal{B}$ et $\mathcal{B}_{\text{can}}$.

Exprimons $\varphi(\mathcal{B})$ dans $\mathcal{B}_{\text{can}}$.

Soit $l_0 \in \llbracket 0, r-1 \rrbracket$.

$$\begin{aligned} \varphi[(X^{l_0}, 0)] &= PX^{l_0} \\ &= \sum_{k=0}^{q-1} a_k X^k X^{l_0} \\ &= \sum_{k=0}^{q-1} a_k X^{k+l_0} \end{aligned}$$

Ce qui correspond bien r premières colonnes de $\text{Syl}(P, Q)$.

Soit $k_0 \in \llbracket 0, q-1 \rrbracket$.

$$\begin{aligned} \varphi[(X^{k_0}, 0)] &= PX^{k_0} \\ &= \sum_{l=0}^{r-1} b_l X^l X^{k_0} \\ &= \sum_{l=0}^{r-1} b_l X^{l+k_0} \end{aligned}$$

Ce qui correspond aux q dernières colonnes de $\text{Syl}(P, Q)$.

Finalement

$$M = \text{Syl}(P, Q).$$

13. On suppose que $P \wedge Q = 1$.(a) Montrer que φ est injective.

φ étant un morphisme de groupe additif il est injectif si et seulement si son noyau est réduit à l'élément neutre.

Déterminons $\ker(\varphi)$.Soit $(U, V) \in \ker(\varphi) \setminus \{0\}$.

$$\begin{aligned} \varphi(U, V) = 0 &\Rightarrow PU + QV = 0 \\ &\Rightarrow \begin{cases} P|V \\ Q|U \end{cases} \\ &\Rightarrow \exists (V', U') \in \mathbb{K}[X]^2, \begin{cases} V = PV' \\ U = QU' \end{cases} \end{aligned}$$

Par conséquent :

$$\begin{aligned} \varphi(U, V) = 0 &\Rightarrow P(QU') + Q(PV') = 0 \\ &\Rightarrow U' = -V' \end{aligned}$$

Ainsi les éléments de $\ker(\varphi)$ sont nécessairement de la forme $(QW, -PW)$. Puisque $\deg(Q) = r$ et que $QW \in \mathbb{K}_{r-1}[X]$, nécessairement $W = 0$ et donc $(U, V) = (0, 0)$.

Autrement dit : $\ker(\varphi) = \{0\}$.
$$\varphi \text{ est injectif.}$$
(b) En déduire que $\text{Res}_{\mathbb{K}}(P, Q) \neq 0$.

φ est une application linéaire injective entre espaces vectoriels de dimensions finies elle est donc bijective. Par conséquent le déterminant de la matrice représentant φ relativement aux bases $\mathcal{B}$ et $\mathcal{B}_{\text{can}}$ est non nul.

Autrement dit :

$$\text{Res}_{\mathbb{K}}(P, Q) \neq 0.$$

14. On suppose que $P \wedge Q \neq 1$.

Montrer que φ n'est pas injective, puis que $\text{Res}_{\mathbb{K}}(P, Q) \neq 0$.

La démarche naturelle qui permet de répondre à la question consiste à procéder par analyse puis synthèse.

Montrons que $\ker(\varphi) \neq \{0\}$.

Supposons par exemple que $q \leq r$.

Alors

$$P \wedge Q \neq 1 \Rightarrow \exists W \in \mathbb{K}[X], PW = Q.$$

Nous avons alors

$$\begin{aligned} \varphi[(W, -1)] &= PW - Q \\ &= PW - PW \\ &= 0 \end{aligned}$$

Donc $(W, -1) \in \ker(\varphi)$.

φ n'est pas injective.

Et puisque M est une matrice représentant φ :

$$\text{Res}_{\mathbb{K}}(P, Q) \neq 0.$$

Ainsi on a démontré que : $P \wedge Q = 1$ si et seulement si $\text{Res}_{\mathbb{K}}(P, Q) \neq 0$.

On pose $\Delta(P) = \frac{(-1)^{\frac{q(q-1)}{2}}}{a_q} \text{Res}_{\mathbb{K}}(P, P')$, où P' désigne le polynôme dérivé de P . $\Delta(P)$ est appelé discriminant de P .

15. On suppose ici que P est de degré 2 et on pose $P = aX^2 + bX + c$. Calculer $\Delta(P)$.

Calculons $\Delta(P)$.

$$\begin{aligned} P(X) &= aX^2 + bX + c \\ P'(X) &= 2aX + b \end{aligned}$$

Donc : $q = 2$ et $r = 1$ et

$$\text{Res}_{\mathbb{K}}(P, P') = \begin{vmatrix} a & 2a & 0 \\ b & b & 2a \\ c & 0 & b \end{vmatrix}$$

En usant de la règle de Sarus :

$$\begin{aligned} &= a \cdot b \cdot b + b \cdot 0 \cdot 0 + 2a \cdot 2a \cdot c - c \cdot b \cdot 0 - 0 \cdot 2a \cdot a - b \cdot 2a \cdot b \\ &= -ab^2 + 4a^2c \end{aligned}$$

D'où, a étant non nul puisque P est de degré deux :

$$\begin{aligned} \Delta(P) &= \frac{(-1)^{\frac{2(2-1)}{2}}}{a} \text{Res}_{\mathbb{K}}(P, P') \\ &= \frac{-1}{a} (-ab^2 + 4a^2c) \\ &= b^2 - 4ac \end{aligned}$$

Ainsi

$$\Delta(P) = b^2 - 4ac.$$

16. On suppose ici que $\mathbb{K} = \mathbb{C}$ et par conséquent que $P \in \mathbb{C}[X]$. Montrer que P est scindé à racines simples si et seulement si $\Delta(P) \neq 0$.

D'après le théorème de d'Alembert-Gauss (théorème fondamental de l'algèbre) P est scindé sur $\mathbb{C}$.

Montrons que P est simple si et seulement si $\Delta(P) \neq 0$.

Dire que P est simple équivaut successivement à dire que :

- les racines de P sont de multiplicité 1,
- quelque soit la racine λ de P , $P'(\lambda) \neq 0$,
- $P \wedge P' = 1$,
- (d'après la conclusion aimablement fournie par l'énoncé) $\text{Res}_{\mathbb{K}}(P, P') \neq 0$,
- $\Delta(P) \neq 0$.

P est scindé simple si et seulement si $\Delta(P) \neq 0$.

IV Quelques résultats sur les fonctions polynomiales à plusieurs variables.

Soit d un entier naturel non nul.

On dit qu'une fonction $P : \mathbb{C}^d \rightarrow \mathbb{C}$ est polynomiale lorsqu'il existe une partie finie S de $\mathbb{N}^d$ et une famille $(a_k)_{k \in S}$ de nombres complexes telles que :

$$\forall (x_1, x_2, \dots, x_d) \in \mathbb{C}^d, P(x_1, x_2, \dots, x_d) = \sum_{(k_1, \dots, k_d) \in S} a_{(k_1, \dots, k_d)} x_1^{k_1} x_2^{k_2} \dots x_d^{k_d}.$$

Soit P une fonction polynomiale.

En reprenant les notations précédentes, on pose :

$$Z_P = \{(x_k)_{1 \leq k \leq d} \in \mathbb{C}^d \mid P(x_1, x_2, \dots, x_d) = 0\}.$$

17. (a) Soient $I_1, I_2, \dots, I_d$ des parties infinies de $\mathbb{C}$. On suppose que $I_1 \times I_2 \times \dots \times I_d \subset Z_P$. Montrer que P est la fonction polynomiale nulle, *i.e.* que tous ses coefficients sont nuls.

Indication : on pourra procéder par récurrence sur d .

Pour $d \in \mathbb{N}^*$ notons $\mathcal{P}_d$: « Quelque soient $P : \mathbb{C}^d \rightarrow \mathbb{C}$ polynomiale et $I_1, \dots, I_d$ des parties infinies de $\mathbb{C}$, si $I_1 \times \dots \times I_d \subset Z_P$, alors $P = 0$ ».

Démontrons par récurrence sur d que $\mathcal{P}_d$ est vraie.

* Démontrons que $\mathcal{P}_1$ est vraie.

Soient $P : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ et I_1 une partie infinie de $\mathbb{C}$ telle que pour tout $x \in I_1$, $P(x) = 0$.

P admet donc $\deg(P) + 1$ racines distinctes donc P est divisible par un polynôme de degré strictement supérieur, nécessairement $P = 0$.

Ainsi $\mathcal{P}_1$ est vraie.

* Soit $d \in \mathbb{N}^*$. Supposons que $\mathcal{P}_d$ est vraie et démontrons qu'alors $\mathcal{P}_{d+1}$ est vraie.

Soient $P : \mathbb{C}^{d+1} \rightarrow \mathbb{C}$ une fonction polynomiale avec, pour tout $(x_1, \dots, x_{d+1}) \in \mathbb{C}^{d+1}$,

$$P(x_1, \dots, x_{d+1}) = \sum_{(k_1, \dots, k_{d+1}) \in S_{d+1}} a_{(k_1, \dots, k_{d+1})} x_1^{k_1} \dots x_{d+1}^{k_{d+1}},$$

et $I_1, \dots, I_{d+1}$ des parties infinies de $\mathbb{C}$ telles que $I_1 \times \dots \times I_{d+1} \subset Z_P$.

Notons $S_{d+1} = S_d \times S$ avec $S_d \subset \mathbb{N}^d$ et $S \subset \mathbb{N}$, et pour tout $k_{d+1} \in S$, $P_{k_{d+1}}(x_1, \dots, x_d) = a_{(k_1, \dots, k_{d+1})} x_1^{k_1} \dots x_d^{k_d}$.

Soit $(x_1, \dots, x_d) \in I_1 \times \dots \times I_d$.

Puisque pour tout $x_{d+1} \in I_{d+1}$,

$$\begin{aligned} P(x_1, \dots, x_{d+1}) &= \sum_{\substack{d+1 \in S \\ (k_1, \dots, k_d) \in S_d}} a_{(k_1, \dots, k_{d+1})} x_1^{k_1} \dots x_{d+1}^{k_{d+1}} \\ &= \sum_{k_{d+1} \in S} x_{d+1}^{k_{d+1}} \sum_{(k_1, \dots, k_d) \in S_d} a_{(k_1, \dots, k_{d+1})} x_1^{k_1} \dots x_d^{k_d} \\ &= \sum_{k_{d+1} \in S} x_{d+1}^{k_{d+1}} P_{k_{d+1}}(x_1, \dots, x_d) \end{aligned}$$

D'après le cas $d = 1$ nous en déduisons que $P_{k_{d+1}}(x_1, \dots, x_d) = 0$ pour tout $k_{d+1} \in S$.

Soit $k_{d+1} \in S$.

Nous avons établi que quelque soit $(x_1, \dots, x_d) \in I_1 \times \dots \times I_d$, $P_{k_{d+1}}(x_1, \dots, x_d) = 0$.

D'après l'hypothèse de récurrence, nous en déduisons que $P_{k_{d+1}} = 0$.

Et donc que $P = 0$.

Autrement dit $\mathcal{P}_{n+1}$ est vraie.

Nous avons établi par récurrence sur d que $\mathcal{P}_d$ est vraie quelque soit $d \in \mathbb{N}^*$.

- (b) En déduire que si $P \neq 0$, alors Z_P est un fermé d'intérieur vide, puis que $\mathbb{C}^d \setminus Z_P$ est un ouvert dense dans $\mathbb{C}^d$.

Montrons que Z_P est un fermé d'intérieur vide.

* P est une application continue est $\{0\}$ est un fermé de $\mathbb{C}$ donc $Z_P = P^{-1}(\{0\})$ est un fermé de $\mathbb{C}^d$.

* Notons π_k la k -ième projection.

D'après la question précédente si $P \neq 0$ alors il existe $k_0 \in \llbracket 1, d \rrbracket$ tel que $\pi_{k_0}(Z_P)$ soit fini donc d'intérieur vide. Donc $\overset{\circ}{Z}_P = \emptyset$

Ainsi Z_P est un fermé d'intérieur vide.

$\mathbb{C} \setminus Z_P$ est le complémentaire de Z_P et Z_P est un fermé donc $\mathbb{C}^d \setminus Z_P$ est un ouvert.

De plus :

$$\overset{\circ}{Z}_P = \emptyset$$

Donc en passant au complémentaire, nous en déduisons successivement :

$$\begin{aligned} \mathbb{C}_{\mathbb{C}^d} \overset{\circ}{Z}_P &= \mathbb{C}_{\mathbb{C}^d} \emptyset \\ \overline{\mathbb{C}_{\mathbb{C}^d} \overset{\circ}{Z}_P} &= \mathbb{C}^d \\ \overline{\mathbb{C}^d \setminus Z_P} &= \mathbb{C}^d \end{aligned}$$

Autrement dit $\mathbb{C}^d \setminus Z_P$ est dense dans $\mathbb{C}^d$.

$\mathbb{C}^d \setminus Z_P$ est un ouvert dense dans $\mathbb{C}^d$.

On rappelle que $\Omega = \{C \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C}) \mid \chi_{C\bar{C}} \text{ est un polynôme scindé à racines simples}\}$.

18. À l'aide du discriminant, montrer que Ω est un ouvert dense de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$.

$\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ et $\mathbb{C}^{n^2}$ étant isomorphes (par construction des matrices) nous nous autoriserons à les confondre.

Notons $\psi : \begin{cases} \mathbb{C}^{n^2} & \rightarrow & \mathbb{C} \\ M & \mapsto & \Delta(\chi_{M\bar{M}}) \end{cases}$.

ψ est une application polynomiale (le déterminant étant une forme n -linéaire) et non nulle (par exemple en considérant une matrice diagonale de termes diagonaux tous distincts). Donc, d'après la question précédente $\mathbb{C}^{n^2} \setminus \psi^{-1}(\{0\})$ est un ouvert dense dans $\mathbb{C}^{n^2}$.

Or d'après la question III.16 $\mathbb{C}^{n^2} \setminus \psi^{-1}(\{0\}) = \Omega$, donc

Ω est un ouvert dense dans $\mathbb{M}_n(\mathbb{C})$.

19. Démontrer l'assertion (2).

Indication : on pourra utiliser les résultats de la partie II.

Soit $C \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$.

$\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ est un espace métrique (puisque c'est un espace vectoriel de dimension finie) et Ω est dense dans cet ensemble, donc il existe une suite $(C_n)_{n \in \mathbb{N}}$ d'éléments de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ qui converge vers C .

D'après la partie II :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \det(I_n + C_n \overline{C_n}) \geq 0.$$

L'application déterminant étant continue, nous en déduisons par passage à la limite

$$\det(I_n + C \overline{C}) \geq 0.$$

(ii) est vraie.

20. (a) Montrer plus généralement que, pour tout $C \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$, on a :

$$\forall \lambda \in \mathbb{R}_+, \det(\lambda I_n + C \overline{C}) \geq 0.$$

Démontrons : $\forall C \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C}), \forall \lambda \in \mathbb{R}_+, \det(\lambda I_n + C \overline{C}) \geq 0$.

Soient $C \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ et $\lambda \in \mathbb{R}_+^*$ (si $\lambda = 0$ le résultat est trivial).

En appliquant le résultat de la question précédente à la matrice $\frac{1}{\lambda^{\frac{1}{2}}} C$.

$$\det \left[I_n + \left(\frac{1}{\lambda^{\frac{1}{2}}} C \right) \left(\frac{1}{\lambda^{\frac{1}{2}}} \overline{C} \right) \right] \geq 0$$

Puisque $\lambda^n \geq 0$:

$$\lambda^n \det \left[I_n + \left(\frac{1}{\lambda^{\frac{1}{2}}} C \right) \left(\frac{1}{\lambda^{\frac{1}{2}}} \overline{C} \right) \right] \geq 0$$

puisque le déterminant est une forme n -linéaire :

$$\det(\lambda I_n + C \overline{C}) \geq 0$$

Quelque soient $C \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ et $\lambda \in \mathbb{R}_+ \det(\lambda I_n + C \overline{C}) \geq 0$.

- (b) En déduire que si M est une matrice telle qu'il existe $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ vérifiant $M = A^2$, alors les valeurs propres réelles strictement négatives de M sont de multiplicité paire.

Soient M est une matrice telle qu'il existe $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ vérifiant $M = A^2$ et λ une valeur propre réelle strictement négative de M .

Montrons que λ est de multiplicité paire.

Soit $k \in \mathbb{N}^*$ la multiplicité de λ .

Puisque $\chi_M(\lambda) = \dots \chi_M^{(k-1)}(\lambda) = 0$, d'après la formule de Taylor à l'ordre k : $\chi_M(x) \underset{x \rightarrow \lambda}{\sim} \frac{\chi_M^{(k)}(\lambda)}{k!} (x - \lambda)^k$. Donc χ_M change de signe au voisinage de λ si et seulement si k est impaire.

Or si $-x \in V$ alors

$$\begin{aligned} \chi_M(-x) &= \det(-xI_n - M) \\ &= (-1)^n \det(xI_n + A^2) \\ &= (-1)^n \det(xI_n + A\bar{A}) \end{aligned}$$

donc, d'après la question précédente,

$$(-1)^n \chi_M(-x) \geq 0.$$

Ainsi nécessairement k est paire.

Dans le cas $M = A^2$, les valeurs propres réelles strictement négatives sont de multiplicité paire.

- (c) En déduire que si $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ est l'image d'une matrice réelle par l'application exponentielle alors les valeurs propres réelles négatives de M sont de multiplicité paire.

Notons $M = e^H$ avec $H \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

Alors $M = \left(e^{\frac{1}{2}H}\right)^2$. D'après la question précédente nous pouvons donc affirmer que les valeurs propres réelles strictement négatives de M sont de multiplicité paire.

Comme de plus $e^H \in \text{GL}_n(\mathbb{R})$, $0 \notin \text{Sp}_{\mathbb{C}}(e^H)$.

Nous pouvons donc conclure

si $M = e^H$ avec $H \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, alors les valeurs propres négatives de M sont de multiplicité paire.

V Autre manière d'introduire le résultat.

Soit $D \in \mathbb{K}[X]$ tel que $D \neq 0$.

Pour tout polynôme U , on note $\text{quo}_D(U)$ (*resp.* $\text{rem}_D(U)$) le quotient (*resp.* le reste) de la division euclidienne de U par D .

21. Montrer que quo_D et rem_D sont des endomorphismes de $\mathbb{K}[X]$ et que rem_D est un projecteur dont on donnera les éléments caractéristiques.

Démontrons que quo_D et rem_D sont des endomorphismes.

Les deux applications sont bien du $\mathbb{R}$ -espace vectoriel $\mathbb{K}[X]$ dans lui-même.

Soient $\lambda \in \mathbb{R}$, $(U, V) \in \mathbb{R}[X]^2$.

Par construction

$$\begin{cases} U = D\text{quo}_D(U) + \text{rem}_D(U) \\ V = D\text{quo}_D(V) + \text{rem}_D(V) \end{cases}$$

avec $\deg(\text{rem}_D(U)) < \deg(D)$ et $\deg(\text{rem}_D(V)) < \deg(D)$.

Donc

$$\lambda U + V = D[\lambda\text{quo}_D(U) + \text{quo}_D(V)] + \text{rem}_D(U) + \text{rem}_D(V).$$

avec $\deg(\lambda\text{rem}_D(U) + \text{rem}_D(V)) < \deg(D)$.

Par conséquent

$$\begin{cases} \text{quo}_D(\lambda U + V) = \lambda\text{quo}_D(U) + \text{quo}_D(V) \\ \text{rem}_D(\lambda U + V) = \lambda\text{rem}_D(U) + \text{rem}_D(V) \end{cases}$$

Autrement dit

rem_D et quo_D sont des endomorphisme de $\mathbb{K}[X]$.

Démontrons que rem_D est un projecteur.

$$\text{rem}_D(U) = D \times 0 + \text{rem}_D(U)$$

avec $\deg[\text{rem}_D(U)] < \deg(D)$, donc

$$\text{rem}_D[\text{rem}_D(U)] = \text{rem}_D(U).$$

Puisque $\text{rem}_D \circ \text{rem}_D = \text{rem}_D$ l'endomorphisme rem_D est un projecteur.

Clairement $\ker(\text{rem}_D)$ est l'idéal engendré par D et $\text{Im}(\text{rem}_D)$ est $\mathbb{K}_{\deg(D)-1}[X]$.

rem_D est la projection sur $\mathbb{K}_{\deg(D)-1}[X]$ parallèlement à (D) .

On reprend les notations de la partie III. On note (Q) l'idéal engendré par Q et on pose $E = \mathbb{K}[X]/(Q)$. Pour tout $U \in \mathbb{K}[X]$, on note $\overline{U}$ la classe de U modulo Q .

22. Montrer que E est un $\mathbb{K}$ -espace vectoriel de dimension r et que $\mathcal{B}_0 = (1, \overline{X}, \dots, \overline{X}^{r-1})$ en est une base.

Montrons que E est un $\mathbb{K}$ -espace vectoriel de dimension r .

Nous avons démontré à la question précédente que rem_Q est une application linéaire dont le noyau est (Q) par conséquent E est une bien un espace vectoriel muni des lois induites par celles de $\mathbb{K}[X]$.

Comme de plus $\text{Im}(\text{rem}_Q) = \mathbb{K}_{r-1}[X]$, d'après le théorème de factorisation des applications linéaires $E = \mathbb{K}[X]/(Q)$ est isomorphe à $\mathbb{K}_{r-1}[X]$. Notons $\varphi_1 : E \rightarrow \mathbb{K}_{r-1}[X]$ cet isomorphisme d'espaces vectoriels. En particulier E est de dimension r .

E est donc $\mathbb{K}$ -espace vectoriel de dimension r .

Montrons que $\mathcal{B}_0$ est une base de E .

Puisque φ_1^{-1} est un isomorphisme l'image de la base canonique $(1, X, \dots, X^{r-1})$ par φ_1^{-1} est une base de E . Autrement dit

$\mathcal{B}_0$ est une base de E .

23. On considère l'endomorphisme : $f : \begin{cases} E & \rightarrow E \\ \overline{U} & \mapsto \overline{PU} \end{cases}$.

D'après le théorème de division euclidienne, pour tout $j \in \llbracket 0, r-1 \rrbracket$, il existe un unique couple (U_j, R_j) appartenant à $\mathbb{K}[X]^2$ tel que $X^j P = QU_j + R_j$ et $\deg(R_j) \leq r-1$.

On note $\tilde{R}$ la matrice de la famille $(R_0, R_1, \dots, R_{r-1})$ relativement à la base canonique de $\mathbb{K}_{r-1}[X]$.

- (a) Montrer que f est un automorphisme de l'espace vectoriel E si et seulement si $P \wedge Q = 1$.

Il est clair que f est une endomorphisme de $\mathbb{K}$ -espace vectoriel.

Démontrons par conditions nécessaire et suffisante que f est bijectif si et seulement si $P \wedge Q = 1$.

* Nous devons démontrer que si f est bijectif alors $P \wedge Q = 1$.

Pour cela, démontrons la contraposée : si P et Q ne sont pas premiers entre eux alors f n'est pas bijectif.

Si $Q|P$ alors $\overline{P} = \overline{0}$ et f est donc l'application nulle et n'est donc pas bijective et la question est réglée. Il reste à étudier le cas alternatif.

Supposons donc qu'il existe $(H, K_1, K_2) \in (\mathbb{K}[X] \setminus \{0\})^3$ tel que :

$$\begin{cases} P = HK_1 \\ Q = HK_2 \end{cases}$$

avec $\deg(K_2) < \deg(Q)$.

Alors

$$\begin{aligned} f(\overline{K_2}) &= \overline{PK_2} \\ &= \overline{HK_1K_2} \\ &= \overline{HK_2} \cdot \overline{K_1} \\ &= \overline{Q} \cdot \overline{K_1} \\ &= \overline{0} \end{aligned}$$

Donc $\overline{K_2} \neq \overline{0}$ (puisque $K_2 \neq 0$ et $\deg(K_2) < \deg(Q)$) et pourtant $f(\overline{K_2}) = \overline{0}$. Par conséquent $\ker(f)$ n'est pas réduit à $\overline{0}$. Autrement dit f n'est pas injectif et donc, *a fortiori*, pas bijectif.

* Supposons que $P \wedge Q = 1$ et démontrons que f est bijectif.

Démontrons que $\ker(f) = \{\overline{0}\}$.

Soit $U \in \mathbb{K}[X]$ tel que $f(\overline{U}) = \overline{0}$.

Ainsi $\overline{PU} = \overline{0}$. Donc

$$\exists V \in \mathbb{K}[X], PU = VQ.$$

Puisque par hypothèse $P \wedge Q = 1$, d'après le théorème de Gauss, $Q|U$ et donc $\overline{U} = \overline{0}$.

Puisque $\ker(f) = \{\overline{0}\}$, f est injectif, et comme de plus, E est de dimension finie, f est bijectif.

f est un automorphisme si et seulement si $P \wedge Q = 1$.

(b) Exprimer la matrice $\mathcal{M}_{\mathcal{B}_0}(f)$ de f relativement à la base $\mathcal{B}_0$ à l'aide de $\tilde{R}$.

Déterminons $\mathcal{M}_{\mathcal{B}_0}(f)$.

Soit $j \in \llbracket 0, r-1 \rrbracket$.

$$\begin{aligned} f(\overline{X^j}) &= \overline{PX^j} \\ &= \overline{QU_j + R_j} \\ &= \overline{R_j} \end{aligned}$$

Les colonnes de $\mathcal{M}_{\mathcal{B}_0}(f)$ étant formées des coordonnées des images des vecteurs de $\mathcal{B}_0$ dans cette même base nous pouvons donc conclure :

$$\mathcal{M}_{\mathcal{B}_0}(f) = \tilde{R}.$$

24. On considère l'endomorphisme

$$\tilde{f} : \begin{cases} \mathbb{K}_{q+r-1}[X] & \rightarrow \mathbb{K}_{q+r-1}[X] \\ S & \mapsto P \times \text{rem}_Q(S) + Q \times \text{quo}_Q(S) \end{cases} .$$

(a) Montrer que l'endomorphisme $\tilde{f}$ est bien défini.

Nous avons déjà établi que rem_Q et quo_Q sont des endomorphismes de $\mathbb{K}[X]$ il est donc aisé de démontrer que $\tilde{f}$ est une application linéaire de $\mathbb{K}_{q+r-1}[X]$ dans $\mathbb{K}[X]$.

Comme de plus

$$\begin{cases} \deg(P) = q \\ \deg(Q) = r \\ \deg(\text{rem}_Q(S)) \leq r-1 \\ \deg(\text{quo}_Q(S)) \leq \deg(S) - \deg(Q) \end{cases}$$

nous en déduisons que

$$\deg [P \times \text{rem}_Q(S) + Q \times \text{quo}_Q(S)] \leq q + r - 1.$$

Et par conséquent

l'endomorphisme $\tilde{f}$ est bien défini.

(b) Pour tout $(U, V) \in \mathbb{K}_{r-1}[X] \times \mathbb{K}_{q-1}[X]$, expliciter $\tilde{f}(U + QV)$.

Déterminons $\tilde{f}(U + QV)$.

$\tilde{f}$ étant linéaire

$$\tilde{f}(U + QV) = \tilde{f}(U) + \tilde{f}(QV)$$

Puisque $U \in \mathbb{K}_{r-1}[X]$, $\text{quo}_Q(U) = 0$ et $\text{rem}_Q(U) = U$, d'où

$$\tilde{f}(U + QV) = PU + \tilde{f}(QV)$$

Puisque $\text{quo}_Q(QV) = V$ et $\text{rem}_Q(QV) = 0$

$$\tilde{f}(U + QV) = PU + QV$$

$$\tilde{f} = PU + QV.$$

(c) Montrer que la famille $\mathcal{B}_1 = (1, X, X^2, \dots, X^{r-1}, Q, XQ, \dots, X^{q-1}Q)$ est une base de $\mathbb{K}_{q+r-1}[X]$.

La famille $\mathcal{B}_1$ est une famille de $q+r-1$ polynômes échelonnée en degré de $\mathbb{K}_{q+r-1}[X]$ donc

$$\mathcal{B}_1 \text{ est une base de } \mathbb{K}_{q+r-1}[X].$$

(d) À l'aide de la matrice $\mathcal{M}_{\mathcal{B}_1}(\tilde{f})$, montrer que $\det(\tilde{f}) = \det(f)$.

Déterminons $\mathcal{M}_{\mathcal{B}_1}(\tilde{f})$.

Soit $(i, j) \in \llbracket 0, r-1 \rrbracket \times \llbracket 0, q-1 \rrbracket$.

D'après la question précédente

$$\tilde{f}(QX^j) = QX^j$$

et

$$\tilde{f}(X^i) = PX^i$$

En reprenant les notations de la question 23 :

$$\tilde{f}(X^i) = QU_i + R_i$$

En notant $U_i = \sum_{s=0}^{q-1} u_{s,i}X^s$ et $R_i = \sum_{s=0}^{r-1} R_{s,i}X^s$:

$$\tilde{f}(X^i) = \sum_{s=0}^{q-1} u_{s,i}QX^s + \sum_{l=0}^{r-1} R_{l,i}X^l$$

Donc en notant $U = [(U_{s,0})_{s \in [0, q-1]}, \dots, (U_{s, r-1})_{s \in [0, q-1]}]$ nous obtenons la matrice par blocs :

$$\mathcal{M}_{\mathcal{B}_1}(\tilde{f}) = \begin{bmatrix} \tilde{R} & 0 \\ U & I_q \end{bmatrix}.$$

Démontrons que : $\det(\tilde{f}) = \det(f)$.

$\mathcal{M}_{\mathcal{B}_1}(\tilde{f})$ est triangulaire par blocs inférieure donc

$$\begin{aligned} \det(\mathcal{M}_{\mathcal{B}_1}(\tilde{f})) &= \det(\tilde{R}) \times \det(I_q) \\ &= \det(R) \end{aligned}$$

Donc, d'après la question 23 :

$$\det(\mathcal{M}_{\mathcal{B}_1}(\tilde{f})) = \det(f)$$

Enfin, nous avons bien

$$\det(\tilde{f}) = \det(f).$$

25. On considère maintenant les endomorphismes :

$$\xi : \begin{cases} \mathbb{K}_{q+r-1}[X] & \rightarrow \mathbb{K}_{q+r-1}[X] \\ S & \mapsto P \times \text{rem}_{X^r}(S) + Q \times \text{quo}_{X^r}(S) \end{cases}$$

et

$$\psi : \begin{cases} \mathbb{K}_{q+r-1}[X] & \rightarrow \mathbb{K}_{q+r-1}[X] \\ S & \mapsto \text{rem}_{X^r}(S) + Q \times \text{quo}_{X^r}(S) \end{cases}$$

On note $\mathcal{B}_{\text{can}}$ la base canonique de $\mathbb{K}_{q+r-1}[X]$.

- (a) Pour tout $(U, V) \in \mathbb{K}_{r-1}[X] \times \mathbb{K}_{q-1}[X]$, expliciter $\xi(U + X^r V)$ et $\psi(U + X^r V)$.

Soit $(U, V) \in \mathbb{K}_{r-1}[X] \times \mathbb{K}_{q-1}[X]$.

Par construction de ξ :

$$\begin{aligned} & \xi(U + X^r V) \\ &= \xi(U) + \xi(X^r V) \\ &= P \times \text{rem}_{X^r}(U) + Q \times \text{quo}_{X^r}(U) + P \times \text{rem}_{X^r}(X^r V) + Q \times \text{quo}_{X^r}(X^r V) \end{aligned}$$

Puisque $\deg(U) \leq r - 1$:

$$\xi(U + X^r V) = PU + P \times \text{rem}_{X^r}(X^r V) + Q \times \text{quo}_{X^r}(X^r V)$$

Puisque $X^r V$ est divisible par X^r :

$$\xi(U + X^r V) = PU + QV$$

De même :

$$\psi(U + X^r V) = U + QV$$

$$\forall (U, V) \in \mathbb{K}_{r-1}[X] \times \mathbb{K}_{q-1}[X], \begin{cases} \xi(U + X^r V) = PU + QV \\ \psi(U + X^r V) = U + QV \end{cases}$$

- (b) Déterminer $\mathcal{M}_{\mathcal{B}_{\text{can}}}(\xi)$ et $\mathcal{M}_{\mathcal{B}_{\text{can}}}(\psi)$.

Déterminons $\mathcal{M}_{\mathcal{B}_{\text{can}}}(\xi)$.

Soit $l \in \llbracket 0, r - 1 \rrbracket$.

D'après la question précédente :

$$\begin{aligned} \xi(X^l) &= PX^l \\ &= \sum_{k=0}^q a_k X^{k+l} \end{aligned}$$

Soit $k \in \llbracket 0, q-1 \rrbracket$.

D'après la question précédente :

$$\begin{aligned} \xi(X^{r+k}) &= \xi(X^r \cdot X^k) \\ &= QX^k \\ &= \sum_{l=0}^r b_l X^{l+k} \end{aligned}$$

Nous en déduisons que

$$\mathcal{M}_{\mathcal{B}_{\text{can}}}(\xi) = \text{Syl}(P, Q).$$

Déterminons $\mathcal{M}_{\mathcal{B}_{\text{can}}}(\psi)$.

En procédant de même, en utilisant le résultat de la question précédente :

$$\mathcal{M}_{\mathcal{B}_{\text{can}}}(\psi) = \begin{bmatrix} \overbrace{\begin{array}{ccc} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & & \\ \vdots & & \ddots & \\ 0 & & & 1 \\ 0 & & & & 0 \\ \vdots & & & & \vdots \\ 0 & & & & 0 \end{array}}^r & \overbrace{\begin{array}{ccc} b_0 & 0 & \dots & 0 \\ b_1 & b_0 & & \\ \vdots & & \ddots & \\ b_r & & & \\ 0 & & & \\ \vdots & & & \\ 0 & & & & b_r \end{array}}^q \end{bmatrix}$$

(c) Montrer que ψ est un automorphisme.

Justifions que ψ est un automorphisme.

D'après l'énoncé ψ est un endomorphisme. De plus $\det(\psi) = \det(\mathcal{M}_{\mathcal{B}_{\text{can}}}(\psi))$. Or, d'après la question précédente $\mathcal{M}_{\mathcal{B}_{\text{can}}}(\psi)$ est triangulaire supérieure donc $\det(\mathcal{M}_{\mathcal{B}_{\text{can}}}(\psi)) = b_r^q$.

Par construction $b_r \neq 0$ puisque $\deg(Q) = r$, donc $\deg(\psi) \neq 0$.

ψ est un automorphisme.

(d) Exprimer $\tilde{f}$ en fonction de ξ et ψ .

Démontrons que $\xi = \tilde{f} \circ \psi$.

Soit $S \in \mathbb{K}_{q+r-1}[X]$.

$$\tilde{f} \circ \psi(S) = \tilde{f}[\text{rem}_{X^r}(S) + Q \times \text{quo}_{X^r}(S)]$$

Puisque $\tilde{f}$ est linéaire :

$$\tilde{f} \circ \psi(S) = \tilde{f}[\text{rem}_{X^r}(S)] + \tilde{f}[Q \times \text{quo}_{X^r}(S)]$$

Puisque $\text{rem}_{X^r}(S) \in \mathbb{K}_{r-1}[X]$:

$$\tilde{f} \circ \psi(S) = P \times \text{rem}_{X^r}(S) + \tilde{f}[Q \times \text{quo}_{X^r}(S)]$$

Enfin :

$$\tilde{f} \circ \psi(S) = P \times \text{rem}_{X^r}(S) + Q \times \text{quo}_{X^r}(S)$$

Autrement dit :

$$\tilde{f} \circ \psi(S) = \xi(S)$$

Ainsi

$$\xi = \tilde{f} \circ \psi.$$

Puisque ψ est un automorphisme nous en déduisons

$$\xi \circ \psi^{-1} = \tilde{f} \circ \psi \circ \psi^{-1}.$$

Autrement dit

$$\tilde{f} = \xi \circ \psi.$$

26. Montrer que : $\text{Res}_{\mathbb{K}}(P,Q) = b_r^q \det(f)$.

Démontrons que : $\text{Res}_{\mathbb{K}}(P,Q) = b_r^q \det(f)$.

D'après la question précédente, et puisque les espaces considérés sont tous de dimension finie,

$$\det(\xi) = \det \tilde{f} \cdot \det(\psi).$$

Or

$$* \det(\xi) = \det [\mathcal{M}_{\mathcal{B}_{\text{can}}}(\xi)] = \det [\text{Syl}(P,Q)] = \text{Res}(P,Q),$$

$$* \det(\tilde{f}) = \det(f),$$

* et $\det(\psi) = \det [\mathcal{M}_{\mathcal{B}_{\text{can}}}(\psi)] = b_r^q$ car $\mathcal{M}_{\mathcal{B}_{\text{can}}}(\psi)$ est triangulaire supérieure donc son déterminant égale le produit de ses coefficients diagonaux,

donc

$$\text{Res}(P,Q) = \det(f) \cdot b_r^q.$$

Finalement

$$\text{Res}_{\mathbb{K}}(P,Q) = b_r^q \det(f).$$

VI Autre preuve de l'assertion (1).

27. Soient $A, B, C, D \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$.

(a) Démontrer que les matrices $\begin{bmatrix} D & C \\ B & A \end{bmatrix}$ et $\begin{bmatrix} A & B \\ C & D \end{bmatrix}$ sont semblables.

Démontrons que $\begin{bmatrix} B & A \\ D & C \end{bmatrix}$ et $\begin{bmatrix} A & B \\ DC & D \end{bmatrix}$ sont semblables.

$$\text{Soit } g : \begin{cases} \mathcal{M}_{2n,1}(\mathbb{C}) & \rightarrow \mathcal{M}_{2n,1}(\mathbb{C}) \\ X & \mapsto \begin{bmatrix} A & B \\ C & D \end{bmatrix} X \end{cases}.$$

$\begin{bmatrix} A & B \\ C & D \end{bmatrix}$ est la matrice représentative de g dans la base canonique

$$(E_{1,1}, E_{2,1}, \dots, E_{2n,1})$$

de $\mathcal{M}_{2n,1}(\mathbb{C})$.

Clairement $(E_{n+1,1}, \dots, E_{2n,1}, E_{1,1}, \dots, E_{n,1})$ est aussi une base de $\mathcal{M}_{2n,1}(\mathbb{C})$,

et la matrice représentative de g dans cette base est $\begin{bmatrix} D & C \\ B & A \end{bmatrix}$.

Ces deux matrices représentant un même endomorphisme sont donc semblables.

$$\begin{bmatrix} D & C \\ B & A \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} A & B \\ C & D \end{bmatrix}.$$

- (b) Démontrer que les matrices $\begin{bmatrix} A & -B \\ -C & D \end{bmatrix}$ et $\begin{bmatrix} A & B \\ C & D \end{bmatrix}$ sont semblables.

Comme précédemment, nous pouvons remarquer que $\begin{bmatrix} A & B \\ C & D \end{bmatrix}$ est la matrice de g dans la base canonique et $\begin{pmatrix} A & -B \\ -C & D \end{pmatrix}$ est celle de g dans la base $(E_{1,1}, \dots, E_{n,1}, -E_{n+1,1}, \dots, -E_{2n,1})$.

$$\begin{pmatrix} A & -B \\ -C & D \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix}.$$

28. Soient $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$.

Démontrer que le polynôme caractéristique de $\begin{bmatrix} A & B \\ -\overline{B} & \overline{A} \end{bmatrix}$ est dans $\mathbb{R}[X]$.

D'après la question 28.(b)

$$\begin{bmatrix} A & B \\ -\overline{B} & \overline{A} \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} A & -B \\ \overline{B} & \overline{A} \end{bmatrix}$$

D'après la question 28.(a)

$$\begin{bmatrix} A & B \\ -\overline{B} & \overline{A} \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} \overline{A} & \overline{B} \\ -B & A \end{bmatrix}$$

Autrement dit $M = \begin{bmatrix} A & B \\ -\overline{B} & \overline{A} \end{bmatrix}$ est semblable à sa conjuguée. Nous en déduisons que leur polynômes caractéristiques sont égaux : $\chi_M = \chi_{\overline{M}}$. Or d'après la question 2.(c) $\chi_{\overline{M}} = \overline{\chi_M}$ donc $\chi_M = \overline{\chi_M}$. Par conséquent

le polynôme caractéristique de $\begin{bmatrix} A & B \\ -\overline{B} & \overline{A} \end{bmatrix}$ est dans $\mathbb{R}[X]$.

29. On considère le $\mathbb{C}$ -espace vectoriel $\mathbb{C}^n \times \mathbb{C}^n$ dont on écrira les éléments sous la forme : $\begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix}$ avec $(X, Y) \in \mathbb{C}^n \times \mathbb{C}^n$.

$$\text{Soit } \theta : \begin{cases} \mathbb{C}^n \times \mathbb{C}^n & \rightarrow \mathbb{C}^n \times \mathbb{C}^n \\ \begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix} & \mapsto \begin{pmatrix} -\bar{Y} \\ \bar{X} \end{pmatrix} \end{cases}.$$

(a) Démontrer que θ est une application $\mathbb{R}$ -linéaire et que θ commute avec tous les endomorphismes de $\mathbb{C}^n \times \mathbb{C}^n$ de matrice $\begin{bmatrix} A & B \\ -\bar{B} & \bar{A} \end{bmatrix}$ dans la base canonique de $\mathbb{C}^n \times \mathbb{C}^n$.

Il est clair que θ est un endomorphisme $\mathbb{R}$ -linéaire de $\mathbb{C}^n \times \mathbb{C}^n$.

Démontrons que θ commute avec tout endomorphisme de matrice $\begin{bmatrix} A & B \\ -\bar{B} & \bar{A} \end{bmatrix}$.

Soit u un endomorphisme dont la matrice dans la base canonique de $\mathbb{C}^n \times \mathbb{C}^n$ est $\begin{bmatrix} A & B \\ -\bar{B} & \bar{A} \end{bmatrix}$.

Soit $\begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix} \in \mathbb{C}^n \times \mathbb{C}^n$.

*

$$\begin{aligned} u \circ \theta \left[\begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix} \right] &= u \left[\begin{pmatrix} -\bar{Y} \\ \bar{X} \end{pmatrix} \right] \\ &= \begin{bmatrix} A & B \\ -\bar{B} & \bar{A} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} -\bar{Y} \\ \bar{X} \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} -A\bar{Y} + B\bar{X} \\ \bar{B}\bar{Y} + \bar{A}\bar{X} \end{bmatrix} \end{aligned}$$

*

$$\begin{aligned} \theta \circ u \left[\begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix} \right] &= \theta \left[\begin{pmatrix} AX + BY \\ -\bar{B}X + \bar{A}Y \end{pmatrix} \right] \\ &= \begin{pmatrix} -\overline{-\bar{B}X + \bar{A}Y} \\ \overline{AX + BY} \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} B\bar{X} - A\bar{Y} \\ \bar{A}\bar{X} + \bar{B}\bar{Y} \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Ainsi

$$\forall \begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix} \in \mathbb{C}^n \times \mathbb{C}^n, u \circ \theta \left[\begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix} \right] = \theta \circ u \left[\begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix} \right].$$

Autrement dit

$$\theta \text{ et } u \text{ commutent.}$$

(b) Que vaut $\theta \circ \theta$?

Clairement

$$\theta \circ \theta = -\text{Id}_{\mathbb{C}^n \times \mathbb{C}^n}.$$

(c) Soit $v \in \mathbb{C}^n \times \mathbb{C}^n$ non nul. Démontrer que v et $\theta(v)$ sont linéairement indépendants (sur $\mathbb{C}$) et que $\text{Vect}_{\mathbb{C}}(v, \theta(v))$ est stable par θ (où $\text{Vect}_{\mathbb{C}}(v, \theta(v))$ désigne le sous-espace vectoriel de $\mathbb{C}^n \times \mathbb{C}^n$ engendré par v et $\theta(v)$).

Montrons que $\{v, \theta(v)\}$ est libre.

Soient $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$ tels que

$$\alpha v + \beta \theta(v) = 0.$$

Notons $v = \begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix}$.

Donc

$$\begin{cases} \alpha X - \beta \bar{Y} = 0 & L_1 \\ \alpha Y + \beta \bar{X} = 0 & L_2 \end{cases}$$

Nous en déduisons successivement :

$$\begin{cases} \bar{\alpha} \bar{X} - \bar{\beta} Y = 0 & L_1 \leftarrow \bar{L}_1 \\ \alpha Y + \beta \bar{X} = 0 & \end{cases}$$

$$\begin{cases} -\beta \bar{\alpha} \bar{X} + \beta \bar{\beta} Y = 0 & L_1 \leftarrow -\beta L_1 \\ \bar{\alpha} \alpha Y + \bar{\alpha} \beta \bar{X} = 0 & L_2 \leftarrow \bar{\alpha} L_2 \end{cases}$$

Nous en déduisons en sommant L_1 et L_2 :

$$(\alpha \bar{\alpha} + \beta \bar{\beta}) Y = 0.$$

De $v \neq 0$ (et donc $Y \neq 0$) nous déduisons enfin

$$|\alpha|^2 + |\beta|^2 = 0,$$

et $\alpha = \beta = 0$.

Nous avons établi que si $\alpha v + \beta \theta(v) = 0$ alors $\alpha = \beta = 0$.

v et $\theta(v)$ sont linéairement indépendants sur $\mathbb{C}$.

Montrons que $\text{Vect}_{\mathbb{C}}(v, \theta(v))$ est stable par θ .

Soit $w \in \text{Vect}_{\mathbb{C}}(v, \theta(v))$.

Puisque $(v, \theta(v))$ est une base de $\text{Vect}_{\mathbb{C}}(v, \theta(v))$, il existe $(\alpha, \beta) \in \mathbb{C}^2$ tel que : $w = \alpha v + \beta \theta(v)$.

Donc

$$\theta(w) = \bar{\alpha}\theta(v) + \bar{\beta}\theta \circ \theta(v)$$

Puisque $\theta \circ \theta = -Id$:

$$\theta(w) = \bar{\alpha}\theta(v) - \bar{\beta}v$$

Par conséquent $\theta(w) \in \text{Vect}_{\mathbb{C}}(v, \theta(v))$.

$$\theta[\text{Vect}_{\mathbb{C}}(v, \theta(v))] \subset \text{Vect}_{\mathbb{C}}(v, \theta(v)).$$

- (d) Soit E un sous-espace vectoriel de $\mathbb{C}^n \times \mathbb{C}^n$ stable par θ et soit $v \notin E$.
Démontrer que $E \cap \text{Vect}_{\mathbb{C}}(v, \theta(v)) = \{0\}$.

Soit $w \in E \cap \text{Vect}_{\mathbb{C}}(v, \theta(v))$.

Puisque $w \in \text{Vect}_{\mathbb{C}}(v, \theta(v))$ et que, d'après la question précédente $\{v, \theta(v)\}$ est une base de $\text{Vect}_{\mathbb{C}}(v, \theta(v))$, il existe $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$ tels que $w = \alpha v + \beta \theta(v)$.

Par conséquent

$$\begin{aligned} \theta(w) &= \bar{\alpha}\theta(v) + \bar{\beta}\theta \circ \theta(v) \\ &= \bar{\alpha}\theta(v) - \bar{\beta}v \end{aligned}$$

nous en déduisons

$$\begin{aligned} \bar{\beta}w + \alpha\theta(w) &= \alpha\bar{\beta}v + |\beta|^2\theta(v) + |\alpha|^2\theta(v) - \alpha\bar{\beta}v \\ &= (|\alpha|^2 + |\beta|^2)v \end{aligned}$$

E étant stable par θ , $\bar{\beta}w + \alpha\theta(w) \in E$. Or $v \notin E$ donc nécessairement $\alpha = \beta = 0$ et par conséquent $w = 0$.

Autrement dit

$$E \cap \text{Vect}_{\mathbb{C}}(v, \theta(v)) = \{0\}.$$

30. Soient $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$.

Soit $\lambda \in \mathbb{C}$ une valeur propre de $\begin{bmatrix} A & B \\ -\bar{B} & A \end{bmatrix}$.

On désigne par E_λ le sous-espace propre associé et par E'_λ le sous-espace caractéristique associé.

(a) Démontrer que $\bar{\lambda}$ est aussi une valeur propre de $\begin{bmatrix} A & B \\ -\bar{B} & A \end{bmatrix}$ et que :
 $\theta(E'_\lambda) = E'_{\bar{\lambda}}$.

D'après la question 28 le polynôme caractéristique de $\begin{bmatrix} A & B \\ -\bar{B} & A \end{bmatrix}$ est dans $\mathbb{R}[X]$ et puisque λ en est une racine nécessairement $\bar{\lambda}$ en est également une.

$$\bar{\lambda} \text{ est aussi une valeur propre de } \begin{bmatrix} A & B \\ -\bar{B} & A \end{bmatrix}.$$

Démontrons que $\theta(E'_\lambda) \subset E'_{\bar{\lambda}}$.

Soit $x \in E'_\lambda$. Démontrons que $\theta(x) \in E'_{\bar{\lambda}}$.

En notant u un endomorphisme de $\mathbb{C}^n \times \mathbb{C}^n$ dont la matrice est $\begin{bmatrix} A & B \\ -\bar{B} & A \end{bmatrix}$ et m_λ la multiplicité de λ dans le polynôme minimal de u . Rappelons que $\chi_u \in \mathbb{R}[X]$ donc $m_\lambda = m_{\bar{\lambda}}$.

Puisque θ et u (ou tout polynôme de u) commutent et puisque $\theta(\lambda y) = \bar{\lambda}\theta(y)$:

$$\begin{aligned} (u - \bar{\lambda}Id)^{m_{\bar{\lambda}}} \circ \theta(x) &= \theta \circ (u - \lambda Id)^{m_\lambda}(x) \\ &= \theta(0) \\ &= 0 \end{aligned}$$

Ainsi $\theta(x) \in E'_\lambda$ et donc $\theta(E'_\lambda) \subset E'_\lambda$.

Démontrons que $E'_\lambda \subset \theta(E'_\lambda)$.

Nous démontrerions comme précédemment que $\theta(E'_\lambda) \subset E'_\lambda$.

Donc $\theta \circ \theta(E'_\lambda) \subset \theta(E'_\lambda)$.

Or $\theta \circ \theta(E'_\lambda) = -Id(E'_\lambda) = E'_\lambda$ donc $E'_\lambda \subset \theta(E'_\lambda)$.

$$E'_\lambda = \theta(E'_\lambda).$$

(b) Démontrer que si $\lambda \in \mathbb{R}$ alors $\dim_{\mathbb{C}} E'_\lambda$ est paire.

Soit $v_1 \in E'_\lambda \setminus \{0\}$.

D'après la question 29.(c) $(v_1, \theta(v_1))$ est une base de $F_1 = \text{Vect}_{\mathbb{C}}(v_1, \theta(v_1))$.

D'après la question précédente, puisque $\lambda \in \mathbb{R}$, $\theta(E'_\lambda) = E'_\lambda$ et donc $\theta(v_1) \in E'_\lambda$. Par conséquent $F_1 \subset E'_\lambda$.

De deux choses l'une soit $F_1 = E'_\lambda$ (et la question est réglée) soit il existe $v_2 \in E'_\lambda \setminus F_1$.

Alors comme précédemment notons $F_2 = \text{Vect}_{\mathbb{C}}(v_2, \theta(v_2)) \subset E'_\lambda$. D'après la question 29.(c) F_1 est stable par θ , donc, d'après la question 29.(d) $F_1 \cap F_2 = \{0\}$. Nous en déduisons : $F_1 \oplus F_2 \subset E'_\lambda$.

De deux choses l'une soit $F_1 \oplus F_2 = E'_\lambda$ (et la question est réglée) soit il existe $v_3 \in E'_\lambda \setminus F_1 \oplus F_2$. Et nous réitérons : $F_1 \oplus F_2 \oplus F_3 \subset E'_\lambda$.

En réitérant un nombre nécessairement fini de fois (la dimension est finie) nous établissons que E'_λ est somme directe de sous-espaces vectoriels de dimension deux. Donc

$$\dim_{\mathbb{C}} E'_\lambda \text{ est paire.}$$

31. Démontrer que : $\forall (A, B) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})^2$, $\det \left(\begin{bmatrix} A & B \\ -B & A \end{bmatrix} \right) \in \mathbb{R}_+$.

$\mathbb{C}$ étant algébriquement clos son déterminant est le produit de ses valeurs propres répétées avec leur multiplicité algébrique.

D'après la question précédente le produit des valeurs propres réelles est positif puisque la multiplicité algébrique de chacune d'entre elle est paire.

D'après la question 28 le polynôme caractéristique de $\begin{bmatrix} A & B \\ -B & A \end{bmatrix}$ est à coefficients réels donc les valeurs propres complexes non réelles sont conjuguées deux à deux et leur produit est par conséquent positif.

$$\forall (A, B) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})^2, \det \left(\begin{bmatrix} A & B \\ -\overline{B} & A \end{bmatrix} \right) \in \mathbb{R}_+.$$