MINISTÈRE
DE L'ÉDUCATION
NATIONALE

Liberté • Égalité • Fraternité
RÉPUBLIQUE FRANÇAISE

EAE MAT 2

SESSION 2018

AGREGATION
CONCOURS EXTERNE

Section : MATHÉMATIQUES

COMPOSITION D'ANALYSE ET PROBABILITÉS

Durée : 6 heures

L'usage de tout ouvrage de référence, de tout dictionnaire et de tout matériel électronique (y compris la calculatrice) est rigoureusement interdit.

Dans le cas où un(e) candidat(e) repère ce qui lui semble être une erreur d'énoncé, il (elle) le signale très lisiblement sur sa copie, propose la correction et poursuit l'épreuve en conséquence.

De même, si cela vous conduit à formuler une ou plusieurs hypothèses, il vous est demandé de la (ou les) mentionner explicitement.

NB : ***La copie que vous rendrez ne devra, conformément au principe d'anonymat, comporter aucun signe distinctif, tel que nom, signature, origine, etc. Si le travail qui vous est demandé comporte notamment la rédaction d'un projet ou d'une note, vous devrez impérativement vous abstenir de signer ou de l'identifier.***

Tournez la page S.V.P.

INFORMATION AUX CANDIDATS

Vous trouverez ci-après les codes nécessaires vous permettant de compléter les rubriques figurant en en-tête de votre copie.

Ces codes doivent être reportés sur chacune des copies que vous remettrez.

Concours	Section/option	Epreuve	Matière
EAE	1300A	102	2678

Les calculatrices, téléphones, tablettes, ordinateurs et autres appareils électroniques similaires, ainsi que les documents sont interdits.

La qualité de la rédaction sera un facteur important d'appréciation des copies. On invite donc les candidats à produire des raisonnements clairs, complets et concis.

Les candidats peuvent utiliser les résultats énoncés dans les questions ou parties précédentes, en veillant dans ce cas à préciser la référence du résultat utilisé.

Notations

— Soit N un entier naturel non-nul. Pour $a = (a_1, ..., a_N)$ et $b = (b_1, ..., b_N)$ des vecteurs de $\mathbf{R}^N$, on note $a \cdot b = \sum_{j=1}^N a_j b_j$ le produit scalaire euclidien et $||a|| = \sqrt{\sum_{j=1}^N |a_j|^2}$ la norme associée. On notera $B(0, R)$ la boule fermée de $\mathbf{R}^N$ définie par $\{x \in \mathbf{R}^N, \ ||x|| \leq R\}$.

— Pour $1 \leq p < \infty$, on désigne par $L^p(\mathbf{R}^N)$ l'ensemble des (classes de) fonctions f définies sur $\mathbf{R}^N$, à valeurs dans $\overline{\mathbf{R}} = \mathbf{R} \cup \{-\infty, +\infty\}$ ou dans $\mathbf{C}$, telles que $x \mapsto |f(x)|^p$ est intégrable (au sens de la mesure de LEBESGUE). On note $L^\infty(\mathbf{R}^N)$ l'ensemble des (classes de) fonctions f définies sur $\mathbf{R}^N$, à valeurs dans $\overline{\mathbf{R}}$ ou dans $\mathbf{C}$, pour lesquelles il existe $C > 0$ tel que $|f(x)| \leq C$ est satisfait pour presque tout $x \in \mathbf{R}^N$ (au sens de la mesure de LEBESGUE).

— Pour f une fonction définie sur $\mathbf{R}^N$, à valeurs dans $\overline{\mathbf{R}}$ ou dans $\mathbf{C}$, on désigne par $\mathrm{supp}(f)$ son *support* : $\mathrm{supp}(f) = \mathbf{R}^N \setminus \mathcal{O}$ où $\mathcal{O}$ est la réunion de tous les ouverts sur lesquels f est nulle presque partout. En particulier, pour presque tout $x \notin \mathrm{supp}(f)$, on a $f(x) = 0$.

— Pour f une fonction de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbf{R}^N$, on note, pour $i \in \{1, ..., N\}$, $\frac{\partial f}{\partial x_i}$ la dérivée de f par par rapport à sa $i^{\text{ème}}$ variable.

— Pour tout borélien $B \subset \mathbf{R}^N$, on note $\mathrm{mes}(B) = \int_B \mathrm{d}x$ sa mesure et on désigne par $\mathbf{1}_B$ la fonction caractéristique de cet ensemble B : $\mathbf{1}_B(x)$ vaut 1 si $x \in B$ et vaut 0 si $x \notin B$.

— Soit f une fonction intégrable sur $\mathbf{R}^N$. On définit **sa transformée de FOURIER** par

$$\widehat{f} : \xi \in \mathbf{R}^N \longmapsto \widehat{f}(\xi) = \int_{\mathbf{R}^N} e^{-ix\cdot\xi} f(x) \ \mathrm{d}x.$$

— Soit f une fonction mesurable sur $[0, \infty[$, on définit **sa transformée de LAPLACE** par

$$z \in \mathbf{C} \mapsto L(f)(z) = \int_0^\infty e^{-zt} f(t) \ \mathrm{d}t, \qquad \text{(L)}$$

là où elle est bien définie.

Le sujet débute par trois questions préliminaires qui serviront dans la suite du problème mais qui peuvent être traitées de manière indépendante. L'objectif de la partie II est d'établir des propriétés de la transformée de LAPLACE et d'en déduire une résolution d'équations différentielles. Les parties suivantes sont centrées sur la transformée de FOURIER, des propriétés fondamentales sont établies dans les parties III et IV et les parties suivantes V, VI et VII sont consacrées à l'étude d'un espace de HILBERT et des propriétés topologiques de suites de fonctions dans cet espace de HILBERT. Les parties sont généralement indépendantes ; en cas de besoin, on pourra admettre les résultats établis par certaines questions pour aborder les parties suivantes.

Rappels

On rappelle ici quelques définitions utiles et des énoncés qui pourront être exploités ***sans démonstration*** *tout au long du sujet.*

— L'ensemble des fonctions de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbf{R}^N$ à support compact, noté $\mathcal{C}_c^\infty(\mathbf{R}^N)$, est dense dans $L^1(\mathbf{R}^N)$.

— Soient E, F deux espaces vectoriels normés. Soit $D \subset E$ et soit $\mathcal{F}$ une famille de fonctions définies sur D à valeurs dans $(F, \|.\|_F)$.
On dit que la famille $\mathcal{F}$ est *équibornée* si et seulement s'il existe $K > 0$ tel que pour tout $f \in \mathcal{F}$ et tout $x \in D$, on a $\|f(x)\|_F \leq K$.
On dit que la famille $\mathcal{F}$ est *équicontinue* sur D si et seulement si pour tout $\epsilon > 0$, il existe $\eta > 0$ tel que pour tous $x, y \in D$, si $||x - y||_E \leq \eta$ alors, quel que soit $f \in \mathcal{F}$, on a $\|f(x) - f(y)\|_F \leq \epsilon$.

— **Théorème d'Arzela-Ascoli**
Soit $D \subset \mathbf{R}^N$ un ensemble *compact* et $\mathcal{F}$ une famille de fonctions continues sur D à valeurs dans $\mathbf{C}$ telle que
- $\mathcal{F}$ est équicontinue,
- pour tout $x \in D$, l'ensemble $\{f(x),\ f \in \mathcal{F}\}$ est relativement compact dans $\mathbf{C}$.

Alors $\mathcal{F}$ est relativement compacte dans l'ensemble des fonctions continues sur D à valeurs dans $\mathbf{C}$, noté $(\mathcal{C}(D, \mathbf{C}), \|\cdot\|_\infty)$, muni de la norme $||f||_\infty = \sup_{x \in D} |f(x)|$.

— **Théorème d'inversion de la transformée de Fourier**
Pour toute fonction $f \in L^1(\mathbf{R}^N)$ telle que $\widehat{f} \in L^1(\mathbf{R}^N)$, on a, pour presque tout $x \in \mathbf{R}^N$,

$$f(x) = \frac{1}{(2\pi)^N} \int_{\mathbf{R}^N} e^{ix\cdot\xi} \widehat{f}(\xi)\, \mathrm{d}\xi.$$

— **Théorème de Plancherel**
La restriction de la transformée de Fourier à $L^1(\mathbf{R}^N) \cap L^2(\mathbf{R}^N)$ se prolonge en un isomorphisme de $L^2(\mathbf{R}^N)$ sur $L^2(\mathbf{R}^N)$, que l'on note encore $f \mapsto \widehat{f}$, et pour toutes fonctions $f, g \in L^2(\mathbf{R}^N)$ on a

$$\int_{\mathbf{R}^N} f(x)\overline{g(x)}\, \mathrm{d}x = \frac{1}{(2\pi)^N} \int_{\mathbf{R}^N} \widehat{f}(\xi)\overline{\widehat{g}(\xi)}\, \mathrm{d}\xi.$$

Il s'ensuit que, pour tout $f \in L^2(\mathbf{R}^N)$,

$$||f||_{L^2}^2 = \frac{1}{(2\pi)^N} ||\widehat{f}||_{L^2}^2.$$

— **Convolution et transformée de Fourier**
Pour f et g deux éléments de $L^1(\mathbf{R}^N)$, on pose

$$x \in \mathbf{R}^N \longmapsto f * g(x) = \int_{\mathbf{R}^N} f(x - t) g(t)\, \mathrm{d}t$$

qui définit une fonction de $L^1(\mathbf{R}^N)$. On a alors, pour tout $\xi \in \mathbf{R}^N$, $\widehat{f * g}(\xi) = \widehat{f}(\xi)\widehat{g}(\xi)$.

I Exercices préliminaires

Cette partie est consacrée à trois résultats généraux et indépendants entre eux. Lorsqu'ils seront utiles dans la suite du problème, une référence claire y sera faite. Le troisième exercice est plus exigeant techniquement et n'intervient que dans la Partie VII du problème.

1. Soit $g \in \mathcal{C}^0([0,1],\mathbf{R})$ telle que $\int_0^1 u^n g(u)\,du = 0$ pour tout $n \in \mathbf{N}$. Montrer que g est l'application nulle.
2. Soit $f \in L^1(\mathbf{R}^N)$. Montrer que $\widehat{f}$ est une fonction bien définie, continue et bornée sur $\mathbf{R}^N$.
3. Soit D un ensemble *compact* de $\mathbf{R}^N$. On considère une suite de fonctions $\big(u_n\big)_{n\in\mathbf{N}}$ définies sur D et à valeurs réelles qui vérifie les trois propriétés suivantes

   i) pour tout $n \in \mathbf{N}$, la fonction u_n est continue sur D,
   ii) pour tout $n \in \mathbf{N}$ et tout $x \in D$, on a $0 \leq u_{n+1}(x) \leq u_n(x)$,
   iii) pour tout $x \in D$, on a $\lim\limits_{n\to\infty} u_n(x) = u(x)$, où la fonction u est continue sur D.

   Montrer que $(u_n)_{n\in\mathbf{N}}$ converge vers u *uniformément* sur D.

II Autour de la transformée de LAPLACE

1. Soit f une fonction mesurable sur $[0,\infty[$ à valeurs dans $\mathbf{C}$. On note

$$\Lambda(f) = \{s \in \mathbf{R} \text{ tel que } t \mapsto |f(t)|e^{-st} \in L^1([0,+\infty[)\}.$$

   Montrer que si $s \in \Lambda(f)$ alors pour tout $s' > s$, $s' \in \Lambda(f)$. En déduire que si l'ensemble $\Lambda(f)$ est non vide, alors c'est un intervalle non borné à droite.

   On appelle alors *abscisse de sommabilité* de f, l'élément $\sigma(f)$ appartenant à $\overline{\mathbf{R}}$ défini par

$$\sigma(f) = \inf\big(\Lambda(f)\big).$$

   On s'intéresse à la transformée de LAPLACE (L) de f.

   On note Σ l'ensemble des fonctions mesurables qui admettent une abscisse de sommabilité dans $\mathbf{R} \cup \{-\infty\}$:

2. Montrer que $L(f)$ est bien définie sur le demi-plan $P_{\sigma(f)} = \{z \in \mathbf{C}, \mathrm{Re}(z) > \sigma(f)\}$.
3. Montrer que $L(f)$ est une fonction holomorphe sur $P_{\sigma(f)}$ et exprimer les dérivées $n^{\text{èmes}}$ de $L(f)$ sous forme d'intégrales puis sous forme de transformées de LAPLACE.
4. On suppose f de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[0,\infty[$ et on désigne par $\sigma(f')$ l'abscisse de sommabilité de f', qu'on supposera finie. On pose $\beta = \max(\sigma(f),\sigma(f'))$ et on note $P_\beta = \{z \in \mathbf{C}, \mathrm{Re}(z) > \beta\}$. Montrer que, pour tout $z \in P_\beta$, on a $L(f')(z) = zL(f)(z) - f(0)$.
5. Déterminer les abscisses de sommabilité et transformées de LAPLACE (lorsque cela est possible) des fonctions suivantes. Le cas échéant, on justifiera que ces transformées de LAPLACE sont prolongeables en des fonctions méromorphes sur $\mathbf{C}$ en précisant le ou les pôles de ces fonctions.
   (a) $t \mapsto \sin(\omega t)$, avec $\omega \in \mathbf{R}$.
   (b) $t \mapsto \cos(\omega t)$, avec $\omega \in \mathbf{R}$.
   (c) $t \mapsto t\sin(\omega t)$, avec $\omega \in \mathbf{R}$.
   (d) $t \mapsto e^{t^2}$.

6. L'objectif de cette section est de démontrer que la transformée de LAPLACE est une application injective sur le sous-ensemble $\Sigma' = \{f : [0,+\infty[\mapsto \mathbf{C}$, continue, $\sigma(f) < +\infty\}$ de Σ.

   (a) Soit $f \in \Sigma'$. Soient $x \in \mathbf{R}$ tel que $x > \sigma(f)$ et $a > 0$.
   Pour $t \geq 0$, on pose $h(t) = \int_0^t e^{-xu} f(u)\, du$. Montrer que

$$L(f)(x+a) = a \int_0^{+\infty} e^{-at} h(t)\ dt.$$

   (b) On suppose, de plus, que $L(f) = 0$.

      i. Montrer que pour tout $n \in \mathbf{N}$, l'intégrale $\int_0^1 u^n\, h(-\ln(u))\, du$ existe et vaut 0.

      ii. Conclure en se servant de la question 1 de la partie I.

7. On considère le problème

$$\textbf{(P1)} \qquad y'' + y = 2\cos(t), \quad y(0) = 0, \quad y'(0) = 1.$$

   (a) Justifier l'existence, sans calcul, d'une unique solution f_1 définie sur $\mathbf{R}_+$ de **(P1)**.

   (b) On suppose que $\sigma(f_1)$ et $\sigma(f_1')$ sont finis. Justifier que la transformée de LAPLACE de f_1 vérifie, pour un certain $\beta \in \overline{\mathbf{R}}$ que l'on ne cherchera pas à déterminer, la relation suivante pour tout $z \in P_\beta$

$$L(f_1)(z) = \frac{2z}{(z^2+1)^2} + \frac{1}{z^2+1}.$$

   (c) En déduire l'expression de la solution f_1.

III Transformée de FOURIER en dimension 1

1. Un premier exemple.
   Soit $b \in]0,+\infty[$. On pose $f_b = \mathbf{1}_{[-b,b]}$.

   (a) Déterminer la transformée de FOURIER de f_b.

   (b) A-t-on $\widehat{f_b}$ dans $L^1(\mathbf{R})$?

2. Un deuxième exemple.
   Soit $a > 0$. On considère les fonctions $f_a : x \in \mathbf{R} \mapsto e^{-ax^2}$ (définie sur $\mathbf{R}$) et $g_a : z \in \mathbf{C} \mapsto e^{-az^2}$ (définie sur $\mathbf{C}$).

   (a) Vérifier que $f_a \in L^1(\mathbf{R})$.

   (b) En considérant la fonction g_a et un contour fermé adéquat établir qu'on a, pour tout $\xi \in \mathbf{R}$,

$$\int_{\mathbf{R}} e^{-(\sqrt{a}x + i\frac{\xi}{2\sqrt{a}})^2}\ dx = \frac{1}{\sqrt{a}} \int_{\mathbf{R}} e^{-u^2}\ du.$$

   (c) En déduire l'expression de $\widehat{f_a}$.
   [Indication : on pourra utiliser, sans démonstration, l'égalité $\int_{\mathbf{R}} e^{-u^2}\ du = \sqrt{\pi}$.]

   (d) Montrer que $\widehat{f_a}$ admet également une transformée de FOURIER et l'exprimer en fonction de f_a.

3. Soit $K : x \in \mathbf{R} \mapsto e^{-|x|}$. Montrer que K admet une transformée de FOURIER et la déterminer.

4. On considère le problème **(P2)** : $y'' - y = f$.
On note $\mathscr{S}(\mathbf{R})$ l'ensemble des fonctions g indéfiniment dérivables sur $\mathbf{R}$ et telles que pour tous entiers $\alpha, \beta \in \mathbf{N}$, on a
$$p_{\alpha,\beta}(g) = \sup_{x\in\mathbf{R}} |x^\alpha g^{(\beta)}(x)| < +\infty.$$
(a) On suppose dans cette question que $f \in \mathscr{S}(\mathbf{R})$.
i. Soit y une solution de **(P2)** qui admet une transformée de FOURIER, notée $\widehat{y}$. Montrer que pour tout $\xi \in \mathbf{R}$, on a $\widehat{y}(\xi) = -\frac{\widehat{f}(\xi)}{1+\xi^2}$.
ii. En utilisant les résultats de la question 3 de cette partie et les résultats rappelés en début de sujet, montrer que **(P2)** admet une unique solution $y \in \mathscr{S}(\mathbf{R})$.
(b) On suppose maintenant que $f \in L^2(\mathbf{R})$.
i. On introduit la fonction définie par $g : \xi \in \mathbf{R} \longmapsto g(\xi) = -\frac{\widehat{f}(\xi)}{1+\xi^2}$. Montrer qu'il existe un unique $y \in L^2(\mathbf{R})$ tel que $\widehat{y} = g$.
ii. Montrer que y est une solution faible de $y'' - y = f$, c'est à dire qui vérifie, pour toute fonction $\varphi \in \mathcal{C}_c^\infty(\mathbf{R})$, la relation
$$\int_{\mathbf{R}} y(x)(-\varphi(x) + \varphi''(x))\, \mathrm{d}x = \int_{\mathbf{R}} f(x)\varphi(x)\, \mathrm{d}x.$$

IV Transformée de FOURIER en dimension 2

1. Soit $a > 0$. On note $h : x = (x_1, x_2) \in \mathbf{R}^2 \mapsto \exp\left(-a(x_1^2 + x_2^2)\right)$.
Montrer que $h \in L^1(\mathbf{R}^2)$ et déterminer sa transformée de FOURIER.
[Indication : on pourra se servir de la question 2 de la partie III.]
2. Soit f une fonction de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbf{R}^2$ à support compact.
(a) Montrer que $\frac{\partial f}{\partial x_1}$ admet une transformée de FOURIER et que pour tout $\xi = (\xi_1, \xi_2) \in \mathbf{R}^2$ on a
$$\widehat{\frac{\partial f}{\partial x_1}}(\xi) = i\xi_1 \widehat{f}(\xi)$$
(b) En déduire qu'il existe $C_f > 0$, dépendant de f, telle que pour tout $\xi \in \mathbf{R}^2 \setminus \{0\}$ on a $|\widehat{f}(\xi)| \leq \frac{C_f}{||\xi||}$.
3. Montrer que si $f \in L^1(\mathbf{R}^2)$ alors on a $\lim_{||\xi|| \to +\infty} \widehat{f}(\xi) = 0$.
4. Montrer que si $f \in L^1(\mathbf{R}^2)$ alors $\widehat{f}$ est uniformément continue.
[Indication : on pourra utiliser la question 2 de la partie I.]

V Etude d'un espace de HILBERT

Dans toute la suite, α désigne un réel positif ou nul. *On désigne par H^α l'ensemble des fonctions $f : \mathbf{R}^2 \to \overline{\mathbf{R}}$ de $L^2(\mathbf{R}^2)$ telles que*
$$||f||_{H^\alpha}^2 := \int_{\mathbf{R}^2} (1 + ||\xi||^{2\alpha})\, |\widehat{f}(\xi)|^2\, \mathrm{d}\xi < \infty.$$

Tournez la page S.V.P.

1. Soit $(h_n)_{n\in\mathbf{N}}$ une suite de vecteurs de $\mathbf{R}^2$ qui tend vers 0 lorsque n tend vers $+\infty$. Montrer que $\left(g_n : x \mapsto e^{-ix\cdot h_n} - 1\right)_{n\in\mathbf{N}}$ converge uniformément vers la fonction nulle sur $B(0,R)$, pour tout réel $0 < R < \infty$.
2. Déterminer l'ensemble des réels $\alpha \geq 0$ tels que l'intégrale

$$\int_{\mathbf{R}^2} \frac{\mathrm{d}\xi}{1 + ||\xi||^{2\alpha}}$$

soit finie.

Les questions 3, 4 et 5 sont indépendantes.

3. Soit $f \in H^\alpha$ avec $\alpha > 1$.
   (a) Montrer que $\widehat{f} \in L^1(\mathbf{R}^2)$.
   (b) En déduire que f admet un représentant continu et borné, c'est-à-dire est égale presque partout à une fonction continue et bornée.
   [Indication : on pourra utiliser, sans plus de justification, le fait que, si $f \in L^1_{\mathrm{loc}}(\mathbf{R}^2)$ vérifie $\int_{\mathbf{R}^2} f(x)\varphi(x)\,\mathrm{d}x = 0$ pour tout $\varphi \in C_c^\infty(\mathbf{R}^2)$, alors f est nulle presque partout. On pourra également exploiter le résultat de la question 2 de la partie I.]
4. Soit $\alpha > 0$. L'objectif est de montrer que H^α est un espace de HILBERT.
   (a) Justifier que H^α et $\|\cdot\|_{H^\alpha}$ définissent un espace préhilbertien.
   (b) Soit $(f_n)_{n\in\mathbf{N}}$ une suite de Cauchy de H^α.
      i. Montrer que $(f_n)_{n\in\mathbf{N}}$ admet une limite, qu'on notera g, dans $L^2(\mathbf{R}^2)$.
      ii. Montrer que $g \in H^\alpha$.
      [Indication : on pourra[1] remarquer d'abord qu'il existe une constante $C > 0$ telle que, pour tout $0 < R < \infty$, on a $\int_{B(0,R)}(1 + ||\xi||^{2\alpha})|\widehat{g}(\xi)|^2\mathrm{d}\xi \leq C$.]
      iii. Conclure que H^α est un espace de HILBERT.
5. Soit $\left(f_n\right)_{n\in\mathbf{N}}$ une suite bornée dans $L^2(\mathbf{R}^2)$ (c'est-à-dire qu'il existe $A > 0$ tel que pour tout $n \in \mathbf{N}$ on a $\|f_n\|_{L^2} \leq A$) et telle qu'il existe $0 < M < \infty$ vérifiant $\mathrm{supp}(f_n) \subset B(0,M)$ pour tout $n \in \mathbf{N}$.
   (a) Montrer que, pour tout $0 < R < \infty$, la suite $\left(\widehat{f_n}\right)_{n\in\mathbf{N}}$ est équibornée et équicontinue sur $B(0,R)$.
   (b) On suppose de plus que $\left(f_n\right)_{n\in\mathbf{N}}$ est bornée dans H^α pour $\alpha > 0$. En déduire que l'ensemble $\left\{\widehat{f_n},\ n \in \mathbf{N}\right\}$ est relativement compact dans $L^2(\mathbf{R}^2)$.
   (c) En conclure, sous les hypothèses du b), que l'ensemble $\left\{f_n,\ n \in \mathbf{N}\right\}$ est relativement compact dans $L^2(\mathbf{R}^2)$.

VI Une propriété de régularisation

Dans cette partie on s'intéresse à une suite de fonctions $f_n : (x,k) \in \mathbf{R}^2 \times \mathbf{R}^2 \mapsto f_n(x,k) \in \mathbf{R}$ qui vérifie

$$\textbf{(H1)} \quad \sup_{n\in\mathbf{N}} \int_{\mathbf{R}^2\times\mathbf{R}^2} |f_n(x,k)|^2\,\mathrm{d}k\,\mathrm{d}x = M_0 < \infty,$$

$$\textbf{(H2)} \quad \sup_{n\in\mathbf{N}} \int_{\mathbf{R}^2\times\mathbf{R}^2} |k\cdot\nabla_x f_n(x,k)|^2\,\mathrm{d}k\,\mathrm{d}x = M_1 < \infty,$$

1. mais d'autres approches sont possibles.

et telle que $\text{supp}(f_n) \subset \{(x,k) \in \mathbf{R}^2 \times \mathbf{R}^2,\ ||x|| \leq R,\ ||k|| \leq R\}$ et où on a utilisé la notation abrégée

$$k \cdot \nabla_x = \sum_{j=1}^{2} k_j \frac{\partial}{\partial x_j}.$$

Les dérivées sont ici comprises au sens des distributions et sont supposées être L^2 « au sens faible » suivant [2] : on a $f \in L^2(\mathbf{R}^2 \times \mathbf{R}^2)$ et on suppose qu'il existe une constante $C > 0$ telle que pour toute fonction $\psi \in \mathcal{C}_c^\infty(\mathbf{R}^2 \times \mathbf{R}^2)$, on a

$$\left| \int_{\mathbf{R}^2 \times \mathbf{R}^2} f(x,k)\ k \cdot \nabla_x \psi(x,k)\,\mathrm{d}k\,\mathrm{d}x \right| \leq C \|\psi\|_{L^2(\mathbf{R}^2 \times \mathbf{R}^2)}.$$

Dans ce cas on écrit $k \cdot \nabla_x f \in L^2(\mathbf{R}^2 \times \mathbf{R}^2)$ et on note

$$\begin{aligned} \|k \cdot \nabla_x f\|_{L^2(\mathbf{R}^2 \times \mathbf{R}^2)} &= \left(\int_{\mathbf{R}^2 \times \mathbf{R}^2} |k \cdot \nabla_x f(x,k)|^2\,\mathrm{d}k\,\mathrm{d}x \right)^{1/2} \\ &:= \sup \left\{ \frac{\left| \int_{\mathbf{R}^2 \times \mathbf{R}^2} f(x,k)\ k \cdot \nabla_x \psi(x,k)\,\mathrm{d}k\,\mathrm{d}x \right|}{\|\psi\|_{L^2(\mathbf{R}^2 \times \mathbf{R}^2)}},\ \psi \in \mathcal{C}_c^\infty(\mathbf{R}^2 \times \mathbf{R}^2) \setminus \{0\} \right\}. \end{aligned}$$

Dans toute la suite, R désigne un réel strictement positif, quelconque.

Soit $\varphi \in \mathcal{C}^\infty(\mathbf{R}^2)$ *à support compact* telle que $\text{supp}(\varphi) \subset \{k \in \mathbf{R}^2,\ ||k|| \leq R\} = B(0,R)$. On pose

$$\rho_n(x) = \int_{\mathbf{R}^2} f_n(x,k)\,\varphi(k)\,\mathrm{d}k.$$

On va être amené à manipuler des *transformations de* FOURIER *partielles.* On note alors

$$\widehat{f}_n(\xi,k) = \int_{\mathbf{R}^2} f_n(x,k) e^{-ix\cdot\xi}\,\mathrm{d}x,$$

et

$$\widehat{\rho}_n(\xi) = \int_{\mathbf{R}^2} \widehat{f}_n(\xi,k)\,\varphi(k)\,\mathrm{d}k. \tag{$\star$}$$

Enfin, on pourra exploiter sans plus de justification le fait que $\|f\|_{L^2(\mathbf{R}^2 \times \mathbf{R}^2)}$ et $\|\widehat{f}\|_{L^2(\mathbf{R}^2 \times \mathbf{R}^2)}$ sont des normes équivalentes sur $L^2(\mathbf{R}^2 \times \mathbf{R}^2)$.

L'objectif de cette partie et de la suivante (sous des hypothèses plus faibles) est de montrer que l'ensemble $\{\rho_n,\ n \in \mathbf{N}\}$ est en fait relativement compact dans $L^2(\mathbf{R}^2)$.

1. Montrer que la suite $(\rho_n)_{n\in\mathbf{N}}$ est bornée dans $L^2(\mathbf{R}^2)$.
2. Justifier que la formule $(\star)$ définissant $\widehat{\rho}_n(\xi)$ a bien un sens pour presque tout tout $\xi \in \mathbf{R}^2$.
3. Soit $\epsilon > 0$. Pour $\xi \neq 0$, on introduit les domaines

$$\mathcal{B}_\epsilon(\xi) = \left\{k \in \mathbf{R}^2,\ |\xi \cdot k| \leq \epsilon||\xi||\right\}, \qquad \mathcal{G}_\epsilon(\xi) = \left\{k \in \mathbf{R}^2,\ |\xi \cdot k| > \epsilon||\xi||\right\}.$$

Puis on pose $\widehat{\rho}_n = \mu_n + \nu_n$ avec

$$\mu_n(\xi) = \int_{\mathcal{B}_\epsilon(\xi)} \widehat{f}_n(\xi,k)\,\varphi(k)\,\mathrm{d}k, \qquad \nu_n(\xi) = \int_{\mathcal{G}_\epsilon(\xi)} \widehat{f}_n(\xi,k)\,\varphi(k)\,\mathrm{d}k.$$

2. Il n'est pas nécessaire de s'attarder sur le cadre fonctionnel décrit ci-dessous qui précise le cadre de travail. On peut aborder les questions suivantes directement.

(a) Représenter graphiquement le domaine $\mathcal{B}_\epsilon(\xi) \cap B(0,R)$ pour $0 < \epsilon \ll 1$.

(b) Pour $\xi \neq 0$ fixé, on note $u_1 = \frac{\xi}{\|\xi\|}$ et u_2 tel que (u_1, u_2) soit une base orthonormée de $\mathbf{R}^2$ pour sa structure euclidienne canonique. Montrer que pour tout vecteur k de $\mathbf{R}^2$ de coordonnées dans la base canonique $(k_1, k_2) \in \mathbf{R}^2$, il existe un unique couple $(k_1', k_2') \in \mathbf{R}^2$ tel que $k = k_1' u_1 + k_2' u_2$.
Montrer que $(k_1, k_2) \mapsto (k_1', k_2')$ définit un changement de variables dont le jacobien est de valeur absolue égale à 1.

(c) Montrer, à l'aide du changement de variables défini ci-dessus, que

$$\operatorname{mes}\big(\mathcal{B}_\epsilon(\xi) \cap B(0,R)\big) := \int_{\mathcal{B}_\epsilon(\xi)\cap B(0,R)} \mathrm{d}k \leq C\epsilon$$

où $C > 0$ est une constante indépendante de ϵ.

(d) En déduire que $|\mu_n(\xi)| \leq \sqrt{\epsilon}\, H_n(\xi)$ où $\big(H_n\big)_{n\in\mathbf{N}}$ est une suite bornée dans $L^2(\mathbf{R}^2)$.

(e) En exploitant l'hypothèse **(H2)**, obtenir une estimation de la forme

$$|\nu_n(\xi)| \leq \frac{1}{\sqrt{\epsilon}\|\xi\|} F_n(\xi)$$

où $\big(F_n\big)_{n\in\mathbf{N}}$ est une suite bornée dans $L^2(\mathbf{R}^2)$.
[Indication : on pourra à nouveau utiliser le changement de variables défini par (b).]

(f) En optimisant les inégalités précédentes par rapport à ϵ, en conclure que la suite $\big(\rho_n\big)_{n\in\mathbf{N}}$ est bornée dans $H^{1/2}$.

4. En déduire que l'ensemble $\big\{\rho_n,\ n \in \mathbf{N}\big\}$ est relativement compact dans $L^2(\mathbf{R}^2)$.

VII Une propriété de compacité

On utilise les mêmes notations et hypothèses que dans la partie VI mais on affaiblit l'hypothèse **(H2)** *en la remplaçant par*

$$\textbf{(H2')}\quad \sup_{n\in\mathbf{N}} \Big(\int_{\mathbf{R}^2\times\mathbf{R}^2} |a(k).\nabla_x f_n(x,k)|^2 \,\mathrm{d}k\,\mathrm{d}x \Big) = M_1 < \infty,$$

où $a : \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}^2$ est une fonction mesurable donnée telle que pour tout $0 < R < \infty$ et tout $\xi \in \mathbf{R}^2 \setminus \{0\}$

$$mes\big(\big\{k \in B(0,R),\ a(k)\cdot\xi = 0\big\}\big) = \int_{B(0,R)} \mathbf{1}_{\{a(k)\cdot\xi=0\}}\,\mathrm{d}k = 0.$$

On rappelle que, pour $0 < R < \infty$, $B(0,R) = \{k \in \mathbf{R}^2,\ \|k\| \leq R\}$.

1. On introduit une fonction $\chi : \mathbf{R} \to [0,1]$ de classe $\mathcal{C}^\infty$ et telle que

$$\text{pour tout } s \in \mathbf{R},\ 0 \leq \chi(s) \leq 1, \quad \chi(s) = 1 \text{ si } |s| \leq 1, \quad \chi(s) = 0 \text{ si } |s| \geq 2,$$

et, de plus, χ est paire et monotone sur $[0, +\infty[$.

(a) Représenter graphiquement la fonction χ.

(b) On note $\mathbf{S} = \{\zeta \in \mathbf{R}^2, \|\zeta\| = 1\}$. Soit $0 < \epsilon < \epsilon'$. On note

$$m_\epsilon : \zeta \in \mathbf{S} \longmapsto m_\epsilon(\zeta) = \int_{B(0,R)} \chi\Big(\frac{a(k)\cdot\zeta}{\epsilon}\Big)\,\mathrm{d}k.$$

Montrer que, pour tout $\zeta \in \mathbf{S}$, on a

$$\operatorname{mes}\big(\big\{k \in B(0,R),\ |a(k)\cdot\zeta| \leq \epsilon\big\}\big) := \int_{B(0,R)} \mathbf{1}_{|a(k)\cdot\zeta|\leq\epsilon}\,\mathrm{d}k \leq m_\epsilon(\zeta) \leq m_{\epsilon'}(\zeta).$$

(c) Montrer que $(m_{\epsilon_n})_{n\in\mathbf{N}}$ converge uniformément vers 0 sur $\mathbf{S}$ lorsque $(\epsilon_n)_{n\in\mathbf{N}}$ est une suite décroissante qui tend vers 0.

[Indication : on pourra se servir de la question 3 de la partie I.]

2. (a) En gardant les notations de la partie VI, établir que, pour $\xi \neq 0$ et $0 < \epsilon < 1$, on a

$$|\widehat{\rho}_n(\xi)| \leq \frac{1}{\epsilon||\xi||}\tilde{F}_n(\xi) + \tilde{H}_n(\xi)\sqrt{\mathrm{mes}\Big(\Big\{k \in B(0,R),\ |a(k)\cdot\frac{\xi}{||\xi||}| \leq \epsilon\Big\}\Big)}$$

où les suites $\big(\tilde{F}_n\big)_{n\in\mathbf{N}}$ et $\big(\tilde{H}_n\big)_{n\in\mathbf{N}}$ sont bornées dans $L^2(\mathbf{R}^2)$.

(b) En déduire que

$$\lim_{A\to\infty}\left\{\sup_{n\in\mathbf{N}}\left(\int_{||\xi||\geq A}|\widehat{\rho}_n(\xi)|^2\,\mathrm{d}\xi\right)\right\} = 0.$$

3. En s'inspirant de l'approche développée à la question V-5, en conclure que l'ensemble $\big\{\rho_n,\ n\in\mathbf{N}\big\}$ est relativement compact dans $L^2(\mathbf{R}^2)$.

IMPRIMERIE NATIONALE – 18 0073 – D'après documents fournis