Agrégation

Épreuve réservée aux docteurs

Sujet 0

Ce sujet est un exemple d'épreuve du nouveau concours d'agrégation, ouvert aux docteurs. L'esprit de l'épreuve restera proche de celui de ce texte.

L'épreuve, d'une durée de 6 heures, comporte deux parties indépendantes.

- ***Une liste d'exercices.***
- ***Un problème à traiter au choix parmi deux proposés.***

Le candidat devra indiquer clairement le problème qu'il choisit sur sa copie. Seul ce choix sera pris en compte dans l'évaluation. Il est donc inutile d'essayer de traiter les questions faciles des deux problèmes.

La partie « Exercices » se situe, pour l'essentiel, au niveau des contenus de la Licence en lien avec le programme.

La sélection d'exercices proposée ici a valeur indicative et la liste présentée dans les futurs sujets sera sans doute moins fournie, on peut penser qu'une sélection entre huit et douze exercices est raisonnable.

La partie « Problème » peut faire appel de manière significative à des contenus de niveau Master en lien avec le programme.

Certaines questions demandent de rappeler des définitions et d'établir des points figurant au programme, à partir de préliminaires spécifiés. Pour les autres questions, le candidat pourra s'appuyer sur l'ensemble des résultats figurant au programme.

Le corrigé donne une idée du niveau de rédaction attendu.

Les calculatrices, téléphones, tablettes, ordinateurs et autres appareils électroniques similaires, ainsi que les documents sont interdits. La qualité de la rédaction sera un facteur important d'appréciation des copies. On invite donc le candidat à produire des raisonnements clairs, complets et concis. Le candidat peut utiliser les résultats énoncés dans les questions ou parties précédentes ; il veillera toutefois à préciser la référence du résultat utilisé.

Exercices

I. Analyse réelle

1. Soit f une fonction continue et périodique de $\mathbf{R}$ dans $\mathbf{R}$, t un nombre réel. Montrer qu'il existe x dans $\mathbf{R}$ tel que $f(x+t) = f(x)$.
2. Soient n un entier supérieur ou égal à 2, f une fonction à valeurs réelles, n fois dérivable sur $\mathbf{R}$ s'annulant en $n+1$ points distincts de $\mathbf{R}$. Soit $f^{(n)}$ la dérivée n-ième de f. Montrer que $f^{(n)}$ s'annule au moins une fois sur $\mathbf{R}$.

II. Suites et séries de fonctions

3. a) Pour x dans $\mathbf{R}$, justifier l'existence de

$$f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{e^{i2^n x}}{n!}.$$

b) Montrer que la fonction de $\mathbf{R}$ dans $\mathbf{C}$ ainsi définie est de classe C^∞ sur $\mathbf{R}$. Pour k dans $\mathbf{N}$, donner une expression simple de $f^{(k)}(0)$.

c) Montrer que le rayon de convergence de la série entière

$$\sum_{k \geq 0} \frac{f^{(k)}(0)}{k!} x^k$$

est nul.

4. Pour un entier $n \geq 2$, justifier la convergence de

$$I_n = \int_0^{+\infty} \frac{1+t^n}{\sqrt{t} + t^{2n}} \, \mathrm{d}t$$

Déterminer la limite de $(I_n)_{\geq 2}$ lorsque n tend vers $+\infty$.

III. Topologie et analyse fonctionnelle

5. Soit (E, d) un espace métrique.

a) Définir l'assertion : « E est connexe ».

b) On suppose E connexe. Soient (E', d') un espace métrique, f une surjection continue de E sur E'. Montrer, à partir de la définition donnée en a), que E' est connexe.

6. Soient K une partie compacte non vide de l'espace normé $(E, \| \ \|)$, Ω un ouvert de E contenant K. Montrer qu'il existe $r > 0$ tel que

$$K_r = \{x + y \ ; \ x \in K, \ y \in E, \ \|y\| \leq r\}$$

soit contenu dans Ω.

7. Citer, sans le démontrer, le théorème d'Ascoli caractérisant les parties relativement compactes de l'espace C des fonctions continues de $[0,1]$ dans $\mathbf{R}$ muni de la norme uniforme sur $[0,1]$. En déduire que l'ensemble K des fonctions f de classe C^1 de $[0,1]$ dans $\mathbf{R}$ telles que

$$\int_0^1 f^2 + \int_0^1 f'^2 \leq 1$$

est une partie relativement compacte de l'espace précédent.

IV. Calcul différentiel et équations différentielles

8. Soit f une fonction deux fois dérivable de $\mathbf{R}$ dans $\mathbf{R}$ telle que

$$f(0) = 1,\ f'(0) = 0, \quad \forall x \in \mathbf{R}, \quad f''(x) = (x^2 - 1)f(x).$$

Montrer

$$\forall x \in \mathbf{R}, \qquad f(x) = \exp\left(-\frac{x^2}{2}\right).$$

9. Soit $n \geq 2$ un entier. Si Ω est un ouvert non vide de $\mathbf{R}^n$ et u une fonction de classe C^2 de Ω dans $\mathbf{R}$, on appelle laplacien de u la fonction Δu définie sur Ω par

$$\Delta u = \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial^2 f}{\partial {x_j}^2}.$$

On prend ici $\Omega = \mathbf{R}^n \setminus \{0\}$. Déterminer les fonctions f de Ω dans $\mathbf{R}$ de classe C^2 vérifiant les conditions suivantes :

- la fonction f est harmonique, c'est-à-dire de laplacien nul ;

- pour x dans $\mathbf{R}^n \setminus \{0\}$, $f(x)$ ne dépend que de la norme euclidienne canonique de x, ce qui signifie qu'il existe une fonction g de $\mathbf{R}^{+*}$ dans $\mathbf{R}$ telle que, pour tout $x = (x_1, \ldots, x_n)$ de $\mathbf{R}^n \setminus \{0\}$

$$f(x) = g\left(x_1^2 + \cdots + x_n^2\right).$$

10. Soient $n \geq 2$ un entier, f une fonction différentiable de $\mathbf{R}^n$ dans $\mathbf{R}$, S^{n-1} la sphère de centre 0 et de rayon 1 de $\mathbf{R}^n$ pour la norme euclidienne canonique, x_0 un point de S^{n-1}.

a) Justifier que S^{n-1} est une sous-variété de $\mathbf{R}^n$. Déterminer $T_{x_0}S^{n-1}$, l'espace tangent à S^{n-1} en x_0. Pour chaque vecteur unitaire v de $T_{x_0}S^{n-1}$, expliciter une application γ de classe C^1 de $\mathbf{R}$ dans S^{n-1} telle que

$$\gamma(0) = x_0 \quad \text{et} \quad \gamma'(0) = v.$$

b) On suppose que la restriction de f à S^{n-1} a un extremum local en x_0. Que peut on dire du gradient $\nabla f(x_0)$?

11. Soit f une fonction de classe C^2 de $\mathbf{R}^n$ dans $\mathbf{R}$, x une solution maximale de

$$x'(t) = -\nabla f(x(t)),$$

I l'intervalle de définition de x.

a) Justifier la définition de x.

b) Montrer que $g = f \circ x$ est décroissante sur I.

c) On suppose que 0 est dans I et on suppose aussi que

$$K = \{u \in \mathbf{R}^n\ ;\ f(u) \leq f(x(0))\}$$

est une partie compacte de $\mathbf{R}^n$. Montrer alors que I contient $\mathbf{R}^+$.

V. Algèbre générale

12. Soit $\mathbb{K}$ un corps. En admettant le théorème de division euclidienne, montrer que tout idéal de $\mathbb{K}[X]$ est principal.

13. a) Soient G un groupe, N un sous-groupe distingué de G. Exhiber, sans démonstration, une bijection entre l'ensemble des sous-groupes de G/N et l'ensemble des sous-groupes de G contenant N.

    b) Soit n un élément de $\mathbf{N}^*$. Combien le groupe $(\mathbf{Z}/n\mathbf{Z}, +)$ a-t-il de sous-groupes ?

14. Soit $n \geq 2$ un entier. Soit σ un élément du groupe symétrique $\mathcal{S}_n$. Exprimer, en justifiant brièvement, l'ordre de σ en fonction de la décomposition de σ en cycles à supports disjoints.

VI. Algèbre linéaire et réduction

15. Soient u et v deux endomorphismes d'un espace vectoriel de dimension finie. Démontrer

$$\mathrm{rg}(u) - \mathrm{rg}(v \circ u) = \dim(\mathrm{Im}(u) \cap \mathrm{Ker}(v)).$$

16. Soit n dans $\mathbf{N}^*$. Déterminer la dimension des deux espaces vectoriels réels suivants.

    - le sous-espace H de $\mathcal{M}_n(\mathbf{R})$ constitué des matrice de trace nulle ;

    - le sous-espace V des fonctions continues de $[0,1]$ dans $\mathbf{R}$ dont les restrictions aux intervalles $[a_k, a_{k+1}]$ sont affines, $0 = a_0 < a_1 < \cdots < a_n = 1$ étant une subdivision donnée de $[0,1]$.

17. Déterminer les espaces propres de la matrice J de $\mathcal{M}_n(\mathbf{C})$ dont tous les coefficients valent 1. Préciser la dimension de chaque espace propre. Cette matrice est-elle diagonalisable ?

18. a) Rappeler, sans démonstration, le lemme de décomposition des noyaux et le théorème de Cayley-Hamilton.

    b) Soient E un $\mathbf{C}$-espace vectoriel de dimension finie et u un endomorphisme de E. On rappelle que, si χ_u est le polynôme caractéristique de u et λ une racine de multiplicité m de χ_u, alors le sous-espace caractéristique de u associé à λ est le noyau de

$$(u - \lambda \mathrm{Id}_E)^m.$$

    En utilisant les résultats de a), montrer que E est somme directe des sous-espaces caractéristiques de u.

    c) Soient E un $\mathbf{C}$-espace vectoriel de dimension finie $n \geq 1$, u un endomorphisme de E. Montrer l'équivalence des assertions suivantes :

    - le polynôme caractéristique de u admet n racines distinctes ;

    - le seul endomorphisme nilpotent de E qui commute à u est l'endomorphisme nul.

VII. Probabilités

19. Soient λ un élément de $\mathbf{R}^+$, $(p_n)_{n\geq 1}$ une suite d'éléments de $[0,1]$ telle que

$$np_n \longrightarrow \lambda,$$

    $(X_n)_{n\geq 1}$ une suite de variables aléatoires. On suppose que, pour tout $n \geq 1$, X_n suit la loi binomiale $\mathcal{B}(n, p_n)$. Étudier la convergence en loi de $(X_n)_{n\geq 1}$.

20. Soient X une variable aléatoire à valeurs dans $\mathbf{Z}$ d'espérance finie, $(X_k)_{k\geq 1}$ une suite de variables aléatoires indépendantes et identiquement distribuées suivant chacune la loi de X. Pour n dans $\mathbf{N}$, soit

$$S_n = \sum_{k=1}^{n} X_k,$$

avec la convention habituelle $S_0 = 0$.

a) Montrer que

$$P(S_{n+1} \notin \{S_0, \ldots, S_n\}) = P\left(\bigcap_{j=1}^{n+1} (S_j \neq 0)\right).$$

b) Pour n dans $\mathbf{N}^*$, soit N_n le nombre d'éléments j de $\mathbf{Z}$ tels qu'existe $k \in \{0, \ldots, n\}$ tels que $S_k = j$. Soit

$$A = \bigcap_{j=1}^{+\infty} (S_j \neq 0).$$

Montrer que

$$\frac{E(N_n)}{n} \longrightarrow P(A).$$

Problème 1

Parties absolument instables d'un groupe fini

Dans tout le texte, $(G, .)$ est un groupe fini de neutre e, non réduit à $\{e\}$.

On rappelle qu'un sous-groupe H de G est dit *distingué* dans G si

$$\forall (g,h) \in G \times H, \qquad ghg^{-1} \in H.$$

I. De grandes parties absolument instables

Si X est une partie de G, on dit que X est *absolument instable* si

$$\forall (g,g') \in X^2, \qquad gg' \notin X.$$

On note $\alpha(G)$ le maximum des cardinaux des parties absolument instables de G, $\kappa(G)$ le maximum des cardinaux des sous-groupes de G distinct de G.

1. Soit un entier $n \geq 5$. On prend, dans cette question, pour $(G, .)$ le groupe $(\mathbf{Z}/n\mathbf{Z}, +)$. Pour k dans $\mathbf{Z}$, on note $\overline{k}$ la classe de k modulo n. On pose

$$m = \left\lfloor \frac{n+1}{3} \right\rfloor, \qquad X = \left\{ \overline{k} \; ; \; m \leq k \leq 2m-1 \right\}.$$

   Montrer que X est absolument instable. En déduire

$$\alpha(G) \geq \frac{2}{7} n.$$

   On peut vérifier, mais on ne demande pas de la faire, que cette inégalité est encore vraie pour $n = 2, 3, 4$.

2. Montrer que, si H est un sous-groupe de G distinct de G et g un élément de $G \setminus H$, alors gH est absolument instable. En déduire

$$\alpha(G) \geq \kappa(G).$$

3. Soient N un sous-groupe distingué de G distinct de G, π la surjection canonique de G sur G/N.

   a) Vérifier que, si X est une partie de G dont l'image par π est absolument instable, alors X est absolument instable. En déduire

$$\alpha(G) \geq |N| \, \alpha(G/N).$$

   b) Montrer également

$$\kappa(G) \geq |N| \, \kappa(G/N).$$

4. Un groupe $(\Gamma, .)$ est dit *simple* s'il est non nul et si ses seuls sous-groupes distingués sont lui-même et le sous-groupe réduit à l'élément neutre.

   a) Montrer que, si N est un sous-groupe distingué de G autre que G et maximal pour l'inclusion dans l'ensemble des sous-groupes distingués de G autres que G, alors G/N est simple. En déduire que, si G n'est pas simple, il contient un sous-groupe distingué N tel que G/N soit simple et non nul.

   b) Montrer que les groupes simples et abéliens non triviaux sont les groupes de cardinal premier.

5. Soit $n \geq 2$ le cardinal de G.

a) On suppose que G contient un sous-groupe distingué N de G tel que G/N soit cyclique d'ordre premier. Montrer

$$\alpha(G) \geq \frac{2}{7}\, n.$$

Justifier que cette inégalité s'applique si G est abélien.

b) On admet le théorème suivant, qui découle de la classification des groupes finis simples.

« Il existe une constante absolue $C > 0$ telle que tout groupe simple fini non cyclique de cardinal m contienne un sous-groupe autre que lui-même de cardinal supérieur ou égal à $Cm^{4/7}$. »

Montrer que, si G ne contient aucun sous-groupe distingué N tel que G/N soit cyclique d'ordre premier, alors

$$\alpha(G) \geq C\, n^{4/7}.$$

II. Groupes d-quasi aléatoires

Par « représentation » de G, on entend « représentation complexe de dimension finie ». Une représentation ρ de G dans le $\mathbf{C}$-espace V est dite triviale si

$$\forall g \in G, \qquad \rho(g) = \mathrm{Id}_V.$$

Le degré de ρ est alors la dimension de V

II.A Généralités

Soit d un entier supérieur ou égal à 2. On dit que G est *d-quasi aléatoire* si le degré de toute représentation non triviale de G est supérieur ou égal à d. Dire que G n'est pas d-quasi aléatoire, c'est donc dire que G possède une représentation non triviale de degré inférieur ou égal à $d-1$.

Si $m \geq 2$ est un entier, on note $\mathcal{S}_m$ le groupe des permutations de l'ensemble $\{1, \ldots, m\}$, $\mathcal{A}_m$ le sous-groupe de $\mathcal{S}_m$ des permutations paires.

6. Montrer que G est d-quasi aléatoire si et seulement si toute représentation irréductible non triviale de G est de degré supérieur ou égal à d.
7. Soit $m \geq 2$ un entier. Indiquer, sans démonstration, un morphisme non trivial de $\mathcal{S}_m$ dans $\{-1, 1\}$. Le groupe $\mathcal{S}_m$ est-il 2-quasi aléatoire ?
8. Soient ρ une représentation de G, g un élément de G d'ordre k. Justifier que $\rho(g)$ est diagonalisable et que ses valeurs propres sont des racines k-ièmes de 1 dans $\mathbf{C}$.
9. On suppose G abélien : G est-il 2-quasi aléatoire ?

On pourra utiliser sans démonstration le fait suivant : si $(u_i)_{i \in I}$ est une famille d'endomorphismes diagonalisables et commutant deux à deux d'un espace vectoriel de dimension finie E, alors il existe une base de E constituée de vecteurs propres communs aux u_i, $i \in I$.

II.B. Exemples : groupes alternés et groupes $\mathbf{SL}_2(\mathbb{F}_p)$

10. Soit g un élément de G d'ordre premier p. On note e le nombre de j dans $\{1, \ldots, p-1\}$ tel que g et g^j soient conjugués dans G. Montrer que, si ρ est une représentation de G dont le noyau ne contient pas g, alors $\rho(g)$ admet au moins e valeurs propres distinctes.

11. Soient m et ℓ deux entiers avec $2 \leq \ell \leq m$. On note $\mathcal{S}_m$ le groupe symétrique sur $\{1, \ldots, m\}$, $\mathcal{A}_m$ le sous-groupe de $\mathcal{S}_m$ constitué des permutations paires.

    a) Montrer que deux ℓ-cycles de $\mathcal{S}_m$ sont conjugués dans $\mathcal{S}_m$.

    b) Si ℓ est impair, justifier que tout ℓ-cycle de $\mathcal{S}_m$ appartient à $\mathcal{A}_m$. Si de plus $m \geq \ell+2$, montrer que deux ℓ-cycles de $\mathcal{S}_m$ sont conjugués dans $\mathcal{A}_m$.

12. Soient p un nombre premier impair, m un entier supérieur ou égal à $p+2$. On a donc $m \geq 5$, ce qui entraîne que $\mathcal{A}_m$ est simple, fait que l'on pourra utiliser sans justification.

    Soit ρ une représentation non triviale de $\mathcal{A}_m$.

    a) Montrer que le morphisme ρ est injectif.

    b) En considérant le p-cycle $\gamma = (1\ 2\ ...\ p)$, déduire des question 10 et 11 que $\mathcal{A}_m$ est $(p-1)$-quasi aléatoire.

13. Soient p un nombre premier impair, ρ une représentation de $\mathrm{SL}_2(\mathbb{F}_p)$. Pour t dans $\mathbb{F}_p$, soient

$$A_t = \begin{pmatrix} 1 & t \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad B_t = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ t & 1 \end{pmatrix}.$$

    On rappelle que $\mathrm{SL}_2(\mathbb{F}_p)$ est engendré par

$$\{A_t\ ;\ t \in \mathbb{F}_p\} \cup \{B_t\ ;\ t \in \mathbb{F}_p\}.$$

    a) Montrer que A_t et B_{-t} sont conjuguées dans $\mathrm{SL}_2(\mathbb{F}_p)$.

    b) On suppose que A_1 est dans le noyau de ρ. Montrer que ρ est triviale.

    c) On suppose ρ non triviale. Montrer que $\mathrm{SL}_2(\mathbb{F}_p)$ est $\left(\frac{p-1}{2}\right)$-quasi aléatoire. On pourra, pour x dans $\mathbb{F}_p^*$, introduire la matrice $D(x)$ définie par

$$D(x) = \begin{pmatrix} x & 0 \\ 0 & \frac{1}{x} \end{pmatrix}.$$

III. Mélange dans un groupe d-quasi aléatoire

On note $\mathbf{C}[G]$ l'espace vectoriel des fonctions de G dans $\mathbf{C}$. On munit $\mathbf{C}[G]$ du produit scalaire hermitien $\langle\ ,\ \rangle$ défini par

$$\forall (u,v) \in \mathbf{C}[G]^2, \quad \langle u, v\rangle = \sum_{g \in G} \overline{u(g)} v(g).$$

La norme associée à ce produit scalaire est notée $\|\ \|$; pour u dans $\mathbf{C}[G]$, on a donc

$$\|u\| = \sqrt{\sum_{g \in G} |u(g)|^2}.$$

On note 1_G la fonction de G dans $\mathbf{C}$ identiquement égale à 1. On note $\mathbf{C}_0[G]$ l'orthogonal de 1_G pour le produit scalaire $\langle\ ,\ \rangle$, c'est-à-dire le sous-espace de $\mathbf{C}[G]$ constitué des fonctions u telles que

$$\sum_{x\in G} u(x) = 0.$$

Pour g dans G, on notera δ_g la fonction caractéristique de $\{g\}$, c'est-à-dire l'élément de $\mathbf{C}[G]$ défini par

$$\delta_g(x) = 0 \text{ si } x \neq g \text{ et } \delta_g(g) = 1.$$

On pourra utiliser sans démonstration le fait que $(\delta_g)_{g\in G}$ est une base orthonormée de $\mathbf{C}[G]$.

Pour u dans $\mathbf{C}[G]$, on pose

$$\|u\|_\infty = \max\{|u(g)|\ ;\ g \in G\}.$$

Si u et v sont dans $\mathbf{C}[G]$, leur produit de convolution est l'élément $u * v$ de $\mathbf{C}[G]$ défini par

$$\forall g \in G, \qquad (u*v)(g) = \sum_{h\in G} u(h)\ v(h^{-1}g) = \sum_{\substack{(s,t)\in G^2\\ st=g}} u(s)\ v(t).$$

Il résulte facilement de la deuxième écriture que la loi est $*$ est associative sur $\mathbf{C}[G]$, on admettra ce point. On pourra aussi remarquer que $1_G * u = \lambda 1_G$ avec $\lambda = \sum_{g\in G} u(g)$.

III.A. Préliminaires

14. Pour u et v dans $\mathbf{C}[G]$, vérifier les inégalités

$$\|u\| \leq \sqrt{|G|}\ \|u\|_\infty \quad ; \quad \|u*v\|_\infty \leq \|u\|\ \|v\|.$$

En déduire

$$\|u*v\| \leq \sqrt{|G|}\ \|u\|\ \|v\|.$$

15. Soient $(V, \langle\ ,\ \rangle)$ un espace hermitien, φ un endomorphisme de V. On note φ^* l'adjoint de φ.

On note $\|\ \|$ la norme hermitienne associée à $\langle\ ,\ \rangle$. La *norme d'opérateur* de φ est, par définition

$$\|\varphi\|_{\text{op}} = \sup\left\{\frac{\|\varphi(x)\|}{\|x\|}\ ;\ x \in E \setminus \{0\}\right\}.$$

a) Justifier que $\varphi^* \circ \varphi$ est hermitien positif.

b) Montrer que $\|\varphi\|_{\text{op}}$ est égale à la racine carrée de la plus grande valeur propre de $\varphi^* \circ \varphi$.

Pour u dans $\mathbf{C}[G]$, soit K_u l'endomorphisme de $\mathbf{C}[G]$ défini par

$$\forall w \in \mathbf{C}[G], \qquad K_u(w) = u * w.$$

16. On se donne u dans $\mathbf{C}[G]$.

a) Calculer $K_u(1_G)$. Pour g et g' dans G, calculer $K_u(\delta_g)$ et $\langle \delta_{g'}, K_u(\delta_g)\rangle$.

b) Pour u dans $\mathbf{C}[G]$, montrer que l'adjoint de K_u est l'endomorphisme $K_{\tilde{u}}$ où $\tilde{u}$ est la fonction de G dans $\mathbf{C}$ définie par

$$\forall x \in G, \qquad \tilde{u}(x) = \overline{u(x^{-1})}.$$

c) Montrer

$$\text{Tr}({K_u}^* \circ K_u) = |G|\ \|u\|^2.$$

d) Montrer que $\mathbf{C}_0[G]$ est stable par K_u.

17. Pour g dans G et f dans $\mathbf{C}[G]$, soit $R_g(f)$ la fonction de G dans $\mathbf{C}$ définie par

$$\forall x \in G, \qquad R_g(f)(h) = f(xg).$$

Pour tout g de G, R_g est un endomorphisme de $\mathbf{C}[G]$; l'application R qui à g associe R_g est manifestement une représentation de G dans $\mathbf{C}[G]$. On ne demande pas de justifier ces points.

a) Montrer que, pour g dans G et v dans $\mathbf{C}[G]$, les endomorphismes R_g et K_v commutent.

b) Déterminer l'espace des points fixes de la représentation R, i.e. :

$$\mathbf{C}[G]^R = \{w \in \mathbf{C}[G] \ ; \ \forall g \in G, \ R_g(w) = w\}.$$

III.B. Le théorème de Gowers-Nikolov-Pyber

Dans les questions 18 et 19, on suppose que le groupe G est d-quasi aléatoire.

18. Soit u dans $\mathbf{C}_0[G]$.

a) Soit λ une valeur propre non nulle de $K_u^* \circ K_u$. Montrer que la dimension de l'espace propre de $K_u^* \circ K_u$ associé à λ est supérieure ou égale à d et majorée par

$$\frac{|G| \, \|u\|^2}{\lambda}.$$

b) Montrer que, pour v dans $\mathbf{C}[G]$:

$$\|u * v\| \leq \sqrt{\frac{|G|}{d}} \, \|u\| \, \|v\|.$$

19. Si X est une partie de G, soit 1_X la fonction indicatrice de X dans G. Soient A, B, C trois parties non vides de G.

a) Montrer

$$\left\| 1_A * 1_B - \frac{|A| \, |B|}{|G|} 1_G \right\| \leq \sqrt{\frac{|G| \, |A| \, |B|}{d}}.$$

b) Montrer

$$\left\| 1_A * 1_B * 1_C - \frac{|A| \, |B| \, |C|}{|G|} 1_G \right\|_\infty \leq \sqrt{\frac{|G| \, |A| \, |B| \, |C|}{d}}.$$

c) Montrer que, si

$$|A| \, |B| \, |C| > \frac{|G|^3}{d},$$

alors tout élément de G s'écrit abc avec $(a, b, c) \in A \times B \times C$.

d) En déduire que, si

$$|A| \, |B| \, |C| > \frac{|G|^3}{d},$$

alors il existe (a, b, c) dans $A \times B \times C$ tel que $c = ab$. Quelle majoration de $\alpha(G)$ en déduit-on ?

20. Montrer qu'existe une constante $K > 0$ telle que, pour tout nombre premier impair p, on ait :

$$\alpha(\mathrm{SL}_2(\mathbb{F}_p)) \leq K \, |\mathrm{SL}_2(\mathbb{F}_p)|^{8/9}.$$

Problème 2

Ensembles à restes bornés

Dans tout le texte, d est un entier strictement positif. L'espace $\mathbf{R}^d$ est muni de la mesure de Lebesgue. Par « fonction » on entend « fonction mesurable » ; il n'est pas demandé au candidat de justifier que les fonctions introduites ou utilisées dans ce problème sont mesurables, y compris celles qu'il pourrait définir lui-même.

Si X est une partie de $\mathbf{R}^d$ et f une fonction de X dans $\mathbf{C}$ intégrable au sens de Lebesgue, l'intégrale de f sur X est notée

$$\int_X f.$$

La mesure de Lebesgue d'une partie mesurable X de $\mathbf{R}^d$ est notée $\mu(X)$.

I. Fonctions semi-continues, intégrabilité au sens de Riemann

A. Fonctions semi-continues

Soit $(E, \mathbf{d})$ un espace métrique (ne pas confondre la distance $\mathbf{d}$ avec l'entier d). Si f est une fonction de E dans $\mathbf{R}$, on dit que f est *semi-continue inférieurement*, ce que l'on abrège en « f est s.c.i » si, pour tout nombre réel α, l'ensemble $f^{-1}\left(]-\infty, \alpha]\right)$ est fermé dans E.

1. a) Une fonction continue de E dans $\mathbf{R}$ est-elle s.c.i ? Donner, sans détailler la justification, un exemple de fonction s.c.i non continue de $\mathbf{R}$ dans $\mathbf{R}$.

   b) Soient f une fonction s.c.i de E dans $\mathbf{R}$, x dans E, ε un réel strictement positif. Montrer qu'il existe un voisinage V de x dans E tel que

   $$\forall y \in V, \qquad f(y) > f(x) - \varepsilon.$$

   c) Soient I un ensemble fini non vide, $(f_i)_{i\in I}$ une famille de fonctions s.c.i. On suppose que, pour tout x dans E, l'ensemble

   $$\{f_i(x)\ ;\ i \in I\}$$

   est majoré. Montrer la semi-continuité inférieure de la fonction f définie par

   $$\forall x \in E, \qquad f(x) = \sup\{f_i(x)\ ;\ i \in I\}.$$

   On dit que f est semi-continue supérieurement, et on abrège en « f est s.c.s », si $-f$ est s.c.i. On pourra utiliser sans démonstration les propriétés des fonctions s.c.s. déduites de celles des fonctions s.c.i.

2. Soit f une fonction bornée de E dans $\mathbf{R}$. On note $\Lambda^+(f)$ l'ensemble des fonctions continues v de E dans $\mathbf{R}$ telles que

   $$\forall x \in E, \qquad v(x) \geq f(x).$$

   On note $\Lambda^-(f)$ l'ensemble des fonctions continues u de E dans $\mathbf{R}$ telles que

   $$\forall x \in E, \qquad u(x) \leq f(x).$$

Pour x dans $\mathbf{R}$, on pose

$$f^+(x) = \inf\left\{v(x)\ ;\ v \in \Lambda^+(f)\right\}, \quad f^-(x) = \sup\left\{u(x)\ ;\ u \in \Lambda^-(f)\right\}.$$

a) Justifier la définition de f^+ et f^-. Pour x dans E, ranger dans l'ordre croissant les nombres réels $f(x), f^-(x), f^+(x)$.

b) Soit x dans E. Montrer que f est continue **en** x si et seulement si

$$f^-(x) = f^+(x).$$

[*Pour l'implication directe, on pourra considérer des fonctions de la forme* $y \mapsto A + B\mathbf{d}(x,y)$ *où* A *et* B *sont deux constantes réelles.*]

3. Soit f une fonction minorée de E dans $\mathbf{R}$. Pour un entier n strictement positif, on pose

$$\forall x \in E, \qquad f_n(x) = \inf\left\{f(y) + n\mathbf{d}(x,y)\ ;\ y \in E\right\}.$$

a) Ranger dans l'ordre croissant les nombres réels $f_n(x)$, $f_{n+1}(x)$ et $f(x)$.

b) Montrer que f_n est n-lipschitzienne.

c) On suppose que f est s.c.i. Montrer que $(f_n)_{n\geq 1}$ converge simplement vers f sur E.

d) En déduire que f est s.c.i si et seulement s'il existe une suite $(g_n)_{n\geq 1}$ de fonctions continues de E dans $\mathbf{R}$ convergeant simplement vers f et telle que, pour tout x de E, la suite $(g_n(x))_{n\geq 1}$ est croissante.

B. Intégrabilité au sens de Riemann

Soient $a_1, \ldots, a_d$ et $b_1, \ldots, b_d$ des nombres réels, avec

$$\forall i \in \{1, \ldots, d\}, \qquad a_i < b_i.$$

On note P le pavé de $\mathbf{R}^d$:

$$P = \prod_{i=1}^{d} [a_i, b_i].$$

Soit f une fonction de P dans $\mathbf{R}$. On dit que f est *intégrable au sens de Riemann sur* P si, pour tout ε dans $\mathbf{R}^{+*}$, il existe deux fonctions continues u et v de P dans $\mathbf{R}$ telles que [1]

$$u \leq f \leq v \quad \text{et} \quad \int_P (v - u) \leq \varepsilon.$$

4. On suppose f intégrable au sens de Riemann sur P.

a) Montrer que f est bornée.

b) Montrer que

$$\int_P (f^+ - f^-) = 0.$$

En déduire que l'ensemble des points de discontinuité de f est négligeable.

1. Pour $d = 1$, il n'est pas difficile de voir que cette définition, qui est la seule utilisée dans ce texte, coïncide avec la définition plus classique en termes de « fonctions en escalier ».

5. Soit f une fonction bornée de P dans $\mathbf{R}$ dont l'ensemble des points de discontinuité est négligeable. Calculer
$$\int_P (f^+ - f^-).$$
En déduire que f est intégrable au sens de Riemann.

6. Soit A une partie de P. On dit que A *est intégrable au sens de Riemann* si la fonction caractéristique de A est intégrable au sens de Riemann. Caractériser cette propriété à l'aide de la mesure de la frontière de A.

II. Translation de vecteur irrationnel

Dans toute la suite du texte, on adopte les notations suivantes.

L'espace $\mathbf{R}^d$ est muni de son produit scalaire canonique : si $x = (x_1, \ldots, x_d)$ et $y = (y_1, \ldots, y_d)$ sont dans $\mathbf{R}^d$, alors le produit scalaire de x et y est
$$\langle x, y \rangle = \sum_{i=1}^{d} x_i y_i.$$

On fixe un élément $\alpha = (\alpha_1, \ldots, \alpha_d)$ de $\mathbf{R}^d$.

Si f est une fonction de $\mathbf{R}^d$ dans $\mathbf{C}$ et n un entier strictement positif, on note $S_n(f)$ la fonction de $\mathbf{R}^d$ dans $\mathbf{C}$ définie par
$$\forall x \in \mathbf{R}^d, \qquad S_n(f)(x) = \sum_{k=0}^{n-1} f(x + k\alpha).$$

Une fonction f de $\mathbf{R}^d$ dans $\mathbf{C}$ est dite $\mathbf{Z}^d$*-périodique* si
$$\forall v \in \mathbf{Z}^d, \quad \forall x \in \mathbf{R}^d, \qquad f(x+v) = f(x).$$

Pour $v = (v_1, \ldots, v_d)$ dans $\mathbf{Z}^d$, soit e_v la fonction définie sur $\mathbf{R}^d$ par
$$\forall x \in \mathbf{R}^d, \qquad e_v(x) = \exp\left(2i\pi \langle v, x \rangle\right).$$

On note $\mathcal{C}$ l'espace des fonctions continues et $\mathbf{Z}^d$-périodiques de $\mathbf{R}^d$ dans $\mathbf{C}$. On munit $\mathcal{C}$ de la norme uniforme, définie par
$$\forall f \in \mathcal{C}, \qquad \|f\|_\infty = \sup\{|f(x)| \; ; \; x \in \mathbf{R}^d\}.$$

Pour v dans $\mathbf{Z}^d$, e_v appartient à $\mathcal{C}$. On note $\mathcal{P}$ le sous-espace de $\mathcal{C}$ engendré par $(e_v)_{v \in \mathbf{Z}^d}$.

On rappelle les faits suivants :

- le sous-espace $\mathcal{P}$ est dense dans l'espace normé $\mathcal{C}, \| \ \|_\infty)$;

- si g est une fonction $\mathbf{Z}^d$-périodique de $\mathbf{R}^d$ dans $\mathbf{C}$ et γ un élément de $\mathbf{R}^d$, g est intégrable sur $[0,1]^d$ si et seulement si elle est intégrable sur
$$[0,1]^d + \gamma = \{x + \gamma \; ; \; x \in [0,1]^d\}$$
dans ce cas
$$\int_{[0,1]^d + \gamma} g = \int_{[0,1]^d} g.$$

A. Équirépartition modulo $\mathbf{Z}^d$

7. Montrer l'équivalence des conditions suivantes :

   - la famille $(1, \alpha_1, \ldots, \alpha_d)$ de nombres réels est une famille libre du $\mathbf{Q}$-espace vectoriel $\mathbf{R}$;
   - pour tout vecteur v de $\mathbf{Z}^d \setminus \{0\}$,

   $$\langle \alpha, v \rangle \notin \mathbf{Z} \ ;$$

   Montrer que ces conditions équivalent aussi à :

   $$\forall x \in \mathbf{R}^d, \quad \forall v \in \mathbf{Z}^d \setminus \{0\}, \qquad \frac{S_n(e_v)(x)}{n} \underset{n \to +\infty}{\longrightarrow} 0.$$

   Si ces conditions sont réalisées, on dit que α *est un vecteur irrationnel.*

   Dans toute la suite du problème, α est un vecteur irrationnel.

8. a) Soit f dans $\mathcal{C}$. Montrer que, pour x dans $\mathbf{R}^d$:

   $$\frac{S_n(f)(x)}{n} \underset{n \to +\infty}{\longrightarrow} \int_{[0,1]^d} f.$$

   b) Soit f une fonction $\mathbf{Z}^d$-périodique de $\mathbf{R}^d$ dans $\mathbf{R}$ dont la restriction à $[0,1]^d$ est intégrable au sens de Riemann. Montrer que, pour x dans $\mathbf{R}^d$:

   $$\frac{S_n(f)(x)}{n} \underset{n \to +\infty}{\longrightarrow} \int_{[0,1]^d} f.$$

   c) Pour $x = (x_1, \ldots, x_d)$ dans $\mathbf{R}^d$, on note

   $$\{x\} = (x_1 - \lfloor x_1 \rfloor, \ldots, x_d - \lfloor x_d \rfloor)\,.$$

   Soient A une partie de $[0,1[^d$ intégrable au sens de Riemann. Pour n, entier strictement positif, et x dans $\mathbf{R}^d$, soit $N_n^A(x)$ le nombre d'entiers k de $\{0, \ldots, n-1\}$ tels que $\{x + k\alpha\}$ appartienne à A. Pour x dans $\mathbf{R}^d$, déterminer la limite de la suite

   $$\left(\frac{N_n^A(x)}{n} \right)_{n \geq 1}.$$

   On pourra utiliser χ_A, l'unique fonction $\mathbf{Z}^d$-périodique dont la restriction à $[0,1[^d$ est la fonction caractéristique de A.

9. On note I l'ensemble des vecteurs irrationnels de $\mathbf{R}^d$ et $J = \mathbf{R}^d \setminus I$. Montrer que J est une réunion dénombrable d'hyperplans affines et en déduire $\mu(J)$.

B. Opérateurs de translation dans L^2

Soit $\mathcal{L}^2$ l'espace des fonctions $\mathbf{Z}^d$-périodiques f de $\mathbf{R}$ dans $\mathbf{C}$ telles que :

$$\int_{[0,1]^d} |f|^2 < +\infty.$$

Suivant l'usage, on identifiera deux éléments de $\mathcal{L}^2$ égaux presque partout. L'espace quotient de $\mathcal{L}^2$ pour cette relation d'équivalence est noté L^2. En posant :

$$\forall (f,g) \in L^2 \times L^2, \qquad \langle f, g \rangle = \int_{[0,1]^d} \overline{f} g,$$

on définit un produit scalaire sur L^2 qui fait de L^2 un espace de Hilbert complexe. On note $\| \ \|$ la norme associée :

$$\forall f \in L^2, \qquad \|f\| = \sqrt{\int_{[0,1]^d} |f|^2}.$$

Pour f dans L^2, soit $T_\alpha(f)$ la fonction de $\mathbf{R}^d$ dans $\mathbf{C}$ définie par

$$\forall x \in \mathbf{R}^d, \qquad T_\alpha(f)(x) = f(x+\alpha).$$

Pour f dans L^2 et v dans $\mathbf{Z}^d$, soit

$$c_v(f) = \int_{[0,1]^d} f e_{-v} = \langle e_v, f \rangle.$$

10. a) Montrer que $(e_v)_{v\in\mathbf{Z}^d}$ est une base hilbertienne de L^2.

    b) Pour v dans $\mathbf{Z}^d$, calculer $T_\alpha(e_v)$.

11. a) Vérifier que T_α définit un endomorphisme continu de L^2. Si f est dans L^2 et v dans $\mathbf{Z}^d$, préciser $c_v(T_\alpha(f))$.

    b) On dit que le nombre complexe λ est valeur propre de T_α s'il existe un élément f non nul de L^2 tel que

    $$T_\alpha(f) = \lambda f.$$

    Montrer que les valeurs propres de T_α sont les $\exp(2i\pi \langle v, \alpha \rangle)$ avec $v \in \mathbf{Z}^d$.

12. On note Id l'identité de L^2. Soit g dans L^2. Montrer que g est dans l'image de $T_\alpha - \mathrm{Id}$ si et seulement si

    $$c_0(g) = 0 \quad \text{et} \quad \sum_{v\in\mathbf{Z}^d\setminus\{0\}} \frac{|c_v(g)|^2}{\sin^2(\pi\langle v,\alpha\rangle)} < +\infty.$$

III. Parties à restes bornés modulo α

A. L'équation $f(x+\alpha) - f(x) = g(x)$

Soit g une fonction $\mathbf{Z}^d$-périodique de $\mathbf{R}^d$ dans $\mathbf{C}$. Si f est une fonction $\mathbf{Z}^d$-périodique de $\mathbf{R}^d$ dans $\mathbf{C}$, on dit que f vérifie (E_g) si, pour presque tout x dans $\mathbf{R}^d$:

$$f(x+\alpha) - f(x) = g(x).$$

On rappelle qu'une fonction h de $\mathbf{R}^d$ dans $\mathbf{C}$ est dite essentiellement bornée s'il existe $M > 0$ et une partie négligeable E de $\mathbf{R}^d$ tels que

$$\forall x \in \mathbf{R}^d \setminus E, \qquad |h(x)| \leq M.$$

13. On suppose qu'il existe une fonction f de $\mathbf{R}^d$ dans $\mathbf{C}$, essentiellement bornée et $\mathbf{Z}^d$-périodique vérifiant (E_g).

    Montrer qu'il existe une constante $C > 0$ telle que, pour tout n strictement positif et pour presque tout x dans $\mathbf{R}^d$:

    $$|S_n(g)(x)| \leq C.$$

14. Soit $(u_n)_{n\geq 1}$ une suite réelle bornée. On pose

$$\forall n \in \mathbf{N}^*, \qquad v_n = \inf\{u_k \; ; \; k \geq n\}.$$

Étudier la monotonie de $(v_n)_{n\geq 1}$ et montrer que $(v_n)_{n\geq 1}$ converge. La limite de (v_n) est appelée *limite inférieure de* $(u_n)_{n\geq 1}$ et est notée

$$\underline{\lim}(u_n).$$

15. On suppose qu'il existe $C > 0$ tel que, pour presque tout x dans $\mathbf{R}^d$, la suite $(S_n(g)(x))_{n\geq 1}$ est bornée par C. Pour n entier strictement positif et x dans $\mathbf{R}^d$, simplifier :

$$S_{n+1}(g)(x) - S_n(g)(x+\alpha).$$

En déduire qu'il existe une partie négligeable E de $\mathbf{R}^d$ et une fonction bornée f de $\mathbf{R}^d \setminus E$ dans $\mathbf{C}$ tels que, pour $(x, v) \in (\mathbf{R}^d \setminus E) \times \mathbf{Z}^d$, on ait

$$x + v \in \mathbf{R}^d \setminus E, \quad f(x+v) = f(x), \quad f(x+\alpha) - f(x) = g(x).$$

On pourra commencer par le cas où g est réelle et utiliser dans ce cas la question 14.

On montre sans difficulté que la propriété précédente équivaut à l'existence d'une fonction f de $\mathbf{R}^d$ dans $\mathbf{C}$, essentiellement bornée et $\mathbf{Z}^d$-périodique vérifiant (E_g). La vérification n'est pas demandée.

B. Mesure d'une partie à restes bornés modulo α

Les notations sont celles de la question 8.c). On dit que A est *à restes bornés modulo* α s'il existe $C > 0$ tel que, pour presque tout élément x de $\mathbf{R}^d$, on ait

$$\forall n \in \mathbf{N}^*, \qquad \left|N_n^A(x) - n\mu(A)\right| \leq C.$$

16. Soit g_A la fonction définie sur $\mathbf{R}^d$ par

$$\forall x \in \mathbf{R}^d, \qquad g_A(x) = \chi_A(x) - \mu(A).$$

a) Montrer que A est à restes bornés modulo α si et seulement s'il existe une fonction f, $\mathbf{Z}^d$-périodique et essentiellement bornée de $\mathbf{R}^d$ dans $\mathbf{R}$ vérifiant (E_{g_A}).

b) On suppose qu'existe une fonction f, $\mathbf{Z}^d$-périodique de $\mathbf{R}^d$ dans $\mathbf{R}$ vérifiant (E_{g_A}). Montrer que

$$\exp(2i\pi f)$$

est vecteur propre de T_α et préciser la valeur propre associée.

En déduire que le nombre réel $\mu(A)$ appartient au sous-groupe de $\mathbf{R}$ engendré par $1, \alpha_1, \ldots, \alpha_d$.

C. Cas des intervalles : théorème de Kesten-Petersen

Dans cette partie, d est égal à 1 et α est donc un nombre réel irrationnel. Soit β un élément de $]0,1[$. Soit g_β l'unique fonction 1-périodique de $\mathbf{R}$ dans $\mathbf{R}$ coïncidant avec $\chi_{[1-\beta,1[} - \beta$ sur $[0,1[$.

17. Pour x dans $\mathbf{R}$, on note $\varphi(x)$ la partie décimale de x :

$$\varphi(x) = x - \lfloor x \rfloor.$$

Vérifier

$$\forall x \in \mathbf{R}, \qquad \varphi(x+\beta) - \varphi(x) = -g_\beta(x).$$

En déduire que, si β appartient à $\mathbf{Z} + \mathbf{Z}\alpha$, alors il existe $K > 0$ tel que, pour tout n entier strictement positif et tout x dans $\mathbf{R}$:

$$\left| S_n(\chi_{[1-\beta,1[})(x) - n\beta \right| \leq K.$$

18. Montrer finalement l'équivalence entre les conditions suivantes :

— l'élément g_β de L^2 appartient à l'image de $T_\alpha - \mathrm{Id}$;

— on a
$$\sum_{m \in \mathbf{Z} \setminus \{0\}} \frac{\sin^2(m\pi\beta)}{m^2 \sin^2(m\pi\alpha)} < +\infty \ ;$$

— le nombre réel β appartient à $\mathbf{Z} + \mathbf{Z}\alpha$;

— il existe $K > 0$ tel que, pour tout n entier strictement positif et tout x dans $\mathbf{R}$:
$$\left| S_n(\chi_{[1-\beta,1[})(x) - n\beta \right| \leq K \ ;$$

— l'intervalle $[1-\beta, 1[$ est à restes bornés modulo α.