Liberté • Égalité • Fraternité
RÉPUBLIQUE FRANÇAISE

MINISTÈRE
DE L'ÉDUCATION
NATIONALE, DE
L'ENSEIGNEMENT
SUPÉRIEUR ET DE
LA RECHERCHE

EAD MAT 1

SESSION 2017

# AGREGATION
# CONCOURS EXTERNE SPÉCIAL

## Section : MATHÉMATIQUES

## COMPOSITION DE MATHÉMATIQUES

Durée : 6 heures

*L'usage de tout ouvrage de référence, de tout dictionnaire et de tout matériel électronique (y compris la calculatrice) est rigoureusement interdit.*

*Dans le cas où un(e) candidat(e) repère ce qui lui semble être une erreur d'énoncé, il (elle) le signale très lisiblement sur sa copie, propose la correction et poursuit l'épreuve en conséquence.*

*De même, si cela vous conduit à formuler une ou plusieurs hypothèses, il vous est demandé de la (ou les) mentionner explicitement.*

**NB :** ***La copie que vous rendrez ne devra, conformément au principe d'anonymat, comporter aucun signe distinctif, tel que nom, signature, origine, etc. Si le travail qui vous est demandé comporte notamment la rédaction d'un projet ou d'une note, vous devrez impérativement vous abstenir de signer ou de l'identifier.***

**Tournez la page S.V.P.**

**INFORMATION AUX CANDIDATS**

Vous trouverez ci-après les codes nécessaires vous permettant de compléter les rubriques figurant en en-tête de votre copie.

Ces codes doivent être reportés sur chacune des copies que vous remettrez.

| Concours | Section/option | Epreuve | Matière |
|---|---|---|---|
| EAD | 1300A | 101 | 0723 |

**Les calculatrices, téléphones, tablettes, ordinateurs et autres appareils électroniques, ainsi que les documents, sont interdits. La qualité de la rédaction sera un facteur important d'appréciation des copies. On invite donc le candidat à produire des raisonnements clairs, complets et concis. Le candidat peut utiliser les résultats énoncés dans les questions ou parties précédentes ; il veillera toutefois à préciser la référence du résultat utilisé.**

L'épreuve comporte deux parties :

— Une première partie, composée d'**exercices**. On invite les candidats à exposer clairement leurs arguments et à les détailler suffisamment pour convaincre les correcteurs.

— Un problème à traiter **au choix** parmi deux proposés : le Problème 1 (Principes d'incertitude) ou bien le Problème 2 (Mesures cristallines). **Le candidat devra indiquer clairement sur sa copie le problème qu'il choisit. Seul ce choix sera pris en compte dans l'évaluation.**

Le barème sera réparti entre les deux parties de l'épreuve (exercices et problème), aussi les candidats sont invités à répartir leur temps. On pourra, par exemple, consacrer au moins la moitié du temps au problème et au moins un tiers du temps à la partie exercices.

# Partie Exercices

1. Soient $I$ un intervalle de $\mathbf{R}$ non vide et non réduit à un point, $f$ une fonction de $I$ dans $\mathbf{R}$.

   a) On suppose $f$ dérivable en $x_0$. Montrer que $f$ est continue en $x_0$. Montrer par un exemple que la réciproque est fausse.

   b) On suppose $f$ dérivable sur $I$. Montrer que $f$ est lipschitzienne sur $I$ si et seulement si $f'$ est bornée sur $I$.

   c) Si $I$ est un segment et si $f$ est de classe $C^1$ sur $I$, montrer que $f$ est lipschitzienne sur $I$.

2. Soient $(E, \| \ \|)$ un espace normé réel, $V$ un sous-espace de dimension finie de $E$ et $x \in E$. On pose
$$d(x,V) = \inf\{\|x-v\| \ ; \ v \in V\}.$$
   Montrer que l'ensemble
$$\Pi_V(x) = \{v \in V \ ; \ \|x-v\| = d(x,V)\}$$
   est une partie convexe et non vide de $V$.

3. Soient $E$ l'espace des fonctions continues de $[0\,;\,1]$ dans $\mathbf{R}$, $\delta$ la forme linéaire définie sur $E$ par
$$\forall f \in E, \qquad \delta(f) = f(0).$$
   On considère les deux normes suivantes sur $E$ définies par
$$\forall f \in E, \quad ||f||_\infty = \sup_{t\in[0\,;\,1]} |f(t)| \quad \text{et} \quad ||f||_1 = \int_0^1 |f(t)|\,\mathrm{d}t.$$

a) Dire si $\delta$ est continue lorsque l'on munit $E$ de la norme $\| \; \|_\infty$, puis lorsqu'on munit $E$ de la norme $\| \; \|_1$.

b) Déterminer l'adhérence du sous-espace $F$ de $E$ constitué des fonctions $f$ telles que $\delta(f) = 0$ pour chacune des deux normes précédentes.

4. Soit $(a_n)_{n\geq 0}$ une suite de nombres complexes telle que la série entière $\sum a_n z^n$ ait pour rayon de convergence $+\infty$. Pour $z$ dans $\mathbf{C}$, soit

$$f(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n \, z^n.$$

a) Pour $n$ dans $\mathbf{N}$ et $r$ dans $\mathbf{R}^{+*}$, justifier l'égalité

$$a_n = \frac{1}{2\pi \, r^n} \int_{-\pi}^{\pi} f(re^{it}) \, e^{-int} \, \mathrm{d}t.$$

b) On pose, pour $r$ dans $\mathbf{R}^{+*}$ :

$$M(r) = \max\{|f(z)| \; ; \; z \in \mathbf{C}, \; |z| = r\}.$$

En déduire que

$$\forall n \in \mathbf{N}, \qquad |a_n| \leq \frac{M(r)}{r^n}.$$

c) On suppose qu'il existe $A$ et $B$ dans $\mathbf{R}^{+*}$, $d$ dans $\mathbf{N}$ tels que

$$\forall z \in \mathbf{C}, \qquad |f(z)| \leq A|z|^d + B.$$

Montrer que $f$ est un polynôme de degré inférieur ou égal à $d$.

5. Soit $q$ une fonction continue de $[0\,;\,1]$ dans $\mathbf{R}$, $E_q$ l'espace des fonctions $y$ de classe $C^2$ de $[0\,;\,1]$ dans $\mathbf{R}$ telles que $y'' + qy = 0$. On dit que $q$ possède la propriété $\mathcal{P}$ si l'application

$$y \in E_q \longmapsto (y(0), y(1)) \in \mathbf{R}^2$$

est un isomorphisme de $E_q$ sur $\mathbf{R}^2$.
a) Soit $\omega$ dans $\mathbf{R}^{+*}$. On suppose

$$\forall t \in [0\,;\,1], \qquad q(t) = \omega^2.$$

Déterminer $E_q$. Pour quelles valeurs de $\omega$ la fonction $q$ possède-t-elle la propriété $\mathcal{P}$ ?

b) Soit $f$ une fonction de classe $C^2$ de $[0\,;\,1]$ dans $\mathbf{R}$. On suppose qu'il existe $t_0$ dans $]0\,;\,1[$ tel que

$$f(t_0) = \max\{f(t) \; ; \; t \in [0\,;\,1]\}.$$

Que vaut $f'(t_0)$ ? Que dire du signe de $f''(t_0)$ ?

c) On suppose que $q$ est à valeurs dans $]-\infty\,;\,0[$. Montrer que $q$ possède la propriété $\mathcal{P}$.

6. a) Soient $(G, .)$ un groupe fini de cardinal $|G|$ et $N$ un sous-groupe de $G$ de cardinal $|N|$. On suppose que $|G| = 2|N|$. Montrer que $N$ est un sous-groupe distingué dans $G$. En déduire

$$\forall x \in G, \qquad x^2 \in N.$$

b) Soit $n \geq 3$. On note $\mathcal{S}_n$ le groupe des permutations de $\{1, \ldots, n\}$, $\mathcal{A}_n$ le sous-groupe des permutations paires. On rappelle que $\mathcal{A}_n$ est le sous-groupe de $\mathcal{S}_n$ engendré par les 3-cycles. En déduire le sous-groupe de $\mathcal{A}_n$ engendré par les carrés d'éléments de $\mathcal{A}_n$.

c) Déduire des questions a) et b) que $\mathcal{A}_4$ ne contient pas de sous-groupe de cardinal 6.

7. Soient $\mathbb{K}$ un corps, $E$ un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie $n \geq 1$, $u$ un endomorphisme de $E$.

a) Formuler sans démonstration une condition nécessaire et suffisante portant sur le polynôme minimal de $u$ pour que $u$ soit diagonalisable.

b) On suppose que $u$ est diagonalisable. Montrer que, si $F$ est un sous-espace de $E$ stable par $u$, alors l'endomorphisme de $F$ induit par $u$ est diagonalisable.

c) On suppose $u$ diagonalisable et $\mathbb{K}$ infini. Donner une condition nécessaire et suffisante pour que l'ensemble des sous-espaces de $E$ stables par $u$ soit fini. Si tel est le cas, quel est le nombre de sous-espaces de $E$ stables par $u$ ?

8. Soient $(E, \langle\ ,\ \rangle)$ un espace euclidien de dimension 3. On note $\|\ \|$ la norme associée à $\langle\ ,\ \rangle$ et

$$S = \{x \in E\ ;\ \|x\| = 1\}.$$

Si $D$ est une droite vectorielle de $E$, on note $\sigma_D$ la rotation d'angle $\pi$ autour de $D$ (appelée aussi demi-tour). Par conséquent, $\sigma_D$ appartient au groupe spécial orthogonal $\mathrm{SO}(E)$.

a) Soient $D$ une droite vectorielle, $g$ dans $\mathrm{SO}(E)$. Reconnaître l'endomorphisme $g \circ \sigma_D \circ g^{-1}$.

b) Soit $g$ un élément de $\mathrm{SO}(E)$. Montrer que $g$ est un demi-tour si et seulement s'il existe $x$ dans $S$ tel que $g(x) = -x$.

Dans les deux questions suivantes, on se donne un sous-groupe $G$ de $\mathrm{SO}(E)$ agissant transitivement sur $S$ c'est-à-dire :

$$\forall (x, y) \in S^2,\ \exists g \in G,\ g(x) = y.$$

c) Montrer que $G$ contient un demi-tour.

d) On rappelle que $\mathrm{SO}(E)$ est engendré par les demi-tours. En déduire

$$G = \mathrm{SO}(E).$$

9. Soit $(X_k)_{k \geq 1}$ une suite de variables aléatoires mutuellement indépendantes telles que

$$\forall k \in \mathbf{N}^*, \qquad P(X_k = 1) = P(X_k = -1) = \frac{1}{2}.$$

Pour $n$ dans $\mathbf{N}^*$, soit

$$S_n = \sum_{k=1}^{n} X_k.$$

a) Pour $t$ dans $\mathbf{R}$, calculer

$$E(e^{tS_n}).$$

b) Montrer :

$$\forall u \in \mathbf{R}, \qquad \mathrm{ch}(u) \leq \exp\left(\frac{u^2}{2}\right).$$

*Indication. On pourra comparer les développements en série entière des deux membres.*

c) En déduire, pour $n$ dans $\mathbf{N}^*$, $\lambda$ dans $\mathbf{R}^+$

$$P(|S_n| \geq \lambda) \leq 2 \ \exp\left(-\frac{\lambda^2}{2n}\right).$$

d) Soit $c$ un élément de $]1, +\infty[$. Pour tout $n \in \mathbf{N}^*$, on note $A_n$ l'événement :

$$\left[|S_n| \leq \sqrt{2\ c\ \ n\ \ln(n)}\right].$$

Rappeler la définition de l'événement

$$A = \liminf A_n,$$

et montrer $P(A) = 1$.

# Problème 1

## Principes d'incertitude

Dans tout le texte, on note $|X|$ le cardinal d'un ensemble fini $X$.

Soit $(G, +)$ un groupe abélien fini de cardinal $n$. On note $\mathbf{C}[G]$ l'espace vectoriel complexe des fonctions de $G$ dans $\mathbf{C}$. Pour $u$ et $v$ dans $\mathbf{C}[G]$, on pose

$$\langle u, v \rangle = \frac{1}{n} \sum_{g \in G} \overline{u(g)} v(g).$$

On munit ainsi $\mathbf{C}[G]$ d'un produit scalaire hermitien.

On note $\widehat{G}$ l'ensemble des caractères de $G$, c'est-à-dire, puisque $G$ est abélien, des morphismes de $G$ dans $\mathbf{C}^*$. On rappelle que la multiplication ordinaire des fonctions de $G$ dans $\mathbf{C}$ munit $\widehat{G}$ d'une structure de groupe.

Le morphisme trivial de $G$ dans $\mathbf{C}^*$, c'est-à-dire la fonction de $G$ dans $\mathbf{C}^*$ identiquement égale à 1, est noté $1_G$ ; c'est l'élément neutre de $\widehat{G}$.

Pour $f$ dans $\mathbf{C}[G]$, on note $\widehat{f}$ la transformée de Fourier de $f$, c'est-à-dire la fonction de $\widehat{G}$ dans $\mathbf{C}$ définie par

$$\forall \chi \in \widehat{G}, \qquad \widehat{f}(\chi) = |G| \langle \chi, f \rangle = \sum_{g \in G} \overline{\chi(g)} f(g).$$

## I. Principe d'incertitude pour les groupes abéliens finis

*Certains des résultats des parties* **I.A** *et* **I.B** *figurent au programme de l'agrégation. Ces résultats doivent être démontrés en suivant la démarche proposée dans le texte. En particulier dans la question 2-b on demande une démonstration directe, n'utilisant pas l'égalité, pour un groupe abélien fini, des cardinaux* $|G|$ *et* $|\widehat{G}|$ .

### I.A. Généralités sur les caractères

1. a) Quelle est la dimension de $\mathbf{C}[G]$ ?

   b) Montrer que, si $\chi$ appartient à $\widehat{G}$, alors $\chi(G) \subset \mathbb{U}_n$.

2. On suppose que $G$ est le groupe cyclique $\mathbf{Z}/n\mathbf{Z}$ muni de l'addition. Pour tout $x \in \mathbf{Z}$ on note $\dot{x} \in \mathbf{Z}/n\mathbf{Z}$ sa classe modulo $n$. Pour $k \in \mathbf{Z}$ soit $\chi_k$ l'application définie par :

$$\forall \dot{x} \in \mathbf{Z}/n\mathbf{Z}, \qquad \chi_k(\dot{x}) = \exp\left(\frac{2i\pi k x}{n}\right).$$

   a) Montrer que $\chi_k$ est bien définie et ne dépend que de $\dot{k}$.

   b) Montrer que l'application

$$\dot{k} \longmapsto \chi_k$$

   est un isomorphisme de $\mathbf{Z}/n\mathbf{Z}$ sur $\widehat{\mathbf{Z}/n\mathbf{Z}}$.

### I.B. Base orthonormée des caractères

3. a) Soit $\chi$ dans $\widehat{G} \setminus \{1_G\}$. Montrer
$$\sum_{g \in G} \chi(g) = 0.$$
*Indication. On pourra considérer $g_0$ dans $G$ tel que $\chi(g_0) \neq 1$ et considérer la somme $\sum_{g \in G} \chi(g+g_0)$.*

   b) En déduire que deux éléments distincts de $\widehat{G}$ sont orthogonaux pour le produit scalaire $\langle \, , \, \rangle$.

4. Soient $\mathbb{K}$ un corps, $E$ un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie supérieure ou égale à 1, $(u_i)_{i \in I}$ une famille d'endomorphismes diagonalisables de $E$ qui commutent deux à deux. Montrer qu'il existe une base de $E$ dans laquelle, pour tout $i$ de $I$, $u_i$ a une matrice diagonale.

   *Indication. On raisonnera par récurrence sur la dimension de $E$.*

5. Soient $V$ un $\mathbf{C}$-espace vectoriel de dimension finie, $\rho$ une représentation de $G$ dans $V$. Montrer qu'il existe une base de $V$ dans laquelle, pour tout $g$ de $G$, $\rho(g)$ a une matrice diagonale.

6. a) Pour $g$ dans $G$, on note $\tau_g$ l'endomorphisme de $\mathbf{C}[G]$ qui associe à l'élément $f$ de $\mathbf{C}[G]$ l'élément $\tau_g(f) = f_g$ de $\mathbf{C}[G]$ défini par
$$\forall x \in G, \qquad f_g(x) = f(x+g).$$
Il est clair que
$$\tau \; : g \in G \longmapsto \tau_g$$
est une représentation de $G$ dans $\mathbf{C}[G]$.

   Justifier l'existence d'un élément $\theta$ de $\mathbf{C}[G] \setminus \{0\}$, vecteur propre commun aux $\tau_g$, $g \in G$. Montrer que $\theta$ ne s'annule pas, puis qu'il existe $\chi$ dans $\widehat{G}$ tel que $\theta$ soit colinéaire à $\chi$.

   b) Montrer que l'ensemble $\widehat{G}$ est fini de cardinal $n$, puis que, si on écrit
$$\widehat{G} = \{\chi_j \; ; \; 0 \leq j \leq n-1\},$$
alors $(\chi_j)_{0 \leq j \leq n-1}$ est une base de $\mathbf{C}[G]$ orthonormée pour $\langle \, , \, \rangle$.

7. Soit $f$ un élément de $\mathbf{C}[G]$. Montrer :
$$\forall g \in G, \qquad f(g) = \frac{1}{n} \sum_{\chi \in \widehat{G}} \widehat{f}(\chi)\chi(g).$$

### I.C. Le principe d'incertitude de Donoho-Stark

Si $X$ est un ensemble fini non vide et $u$ une fonction de $X$ dans $\mathbf{C}$, le support de $u$ est, par définition, le sous-ensemble de $X$ :

$$S(u) = \{x \in X \; ; \; u(x) \neq 0\}.$$

On note aussi

$$\|u\|_{\infty,X} = \max\{|u(x)| \; ; \; x \in X\}.$$

8. Soit $f$ un élément non nul de $\mathbf{C}[G]$. Montrer

$$|S(f)| \, |S(\widehat{f})| \geq n.$$

*Indication. On pourra commencer par majorer $\|\widehat{f}\|_{\infty,\widehat{G}}$ en fonction de $|S(f)|$ et $\|f\|_{\infty,G}$, puis majorer $\|f\|_{\infty,G}$ en fonction de $n$, $\|\widehat{f}\|_{\infty,\widehat{G}}$ et $|S(\widehat{f})|$, enfin en déduire le résultat.*

9. Soit $H$ un sous-groupe de $G$. On pose

$$H^{\perp} = \{\chi \in \widehat{G} \; ; \; \forall h \in H, \; \chi(h) = 1\}.$$

Il est clair que $H^{\perp}$ est un sous-groupe de $\widehat{G}$.

a) Montrer que les groupes $\widehat{G/H}$ et $H^{\perp}$ sont isomorphes.

b) Dans cette question on note $1_H$ l'élément de $\mathbf{C}[G]$ qui vaut 1 sur $H$ et 0 ailleurs, $1_{H^{\perp}}$ l'élément de $\mathbf{C}[\widehat{G}]$ qui vaut 1 sur $H^{\perp}$ et 0 ailleurs. Montrer

$$\widehat{1_H} = |H| \, 1_{H^{\perp}}.$$

c) Calculer

$$|S(1_H)| \, |S(\widehat{1_H})|.$$

10. a) Soient $p$ un nombre premier, $\alpha$ un élément de $\mathbf{N}^*$, $\beta$ un entier naturel inférieur ou égal à $\alpha$. On suppose, dans cette question seulement, que $G$ est le groupe $\mathbf{Z}/p^{\alpha}\mathbf{Z}$ muni de l'addition. Montrer que $G$ contient un sous-groupe de cardinal $p^{\beta}$.

b) On revient au cas général. Montrer que, pour tout diviseur $d$ de $n$, $G$ contient au moins un sous-groupe de cardinal $d$.

c) On suppose que $n$ est un carré parfait, i.e. que $\sqrt{n}$ est un entier. Montrer que

$$\min\{|S(f)| + |S(\widehat{f})| \; ; \; f \in \mathbf{C}[G] \setminus \{0\}\} = 2\sqrt{n}.$$



**Tournez la page S.V.P.**

## II. Principe d'incertitude pour les groupes d'ordre premier

Dans toute la partie **II**, $p$ désigne un nombre premier. On pose

$$\varepsilon = \exp\left(\frac{2i\pi}{p}\right).$$

### II.A. Détermination d'un anneau quotient

11. Soit $x$ un nombre complexe algébrique sur $\mathbf{Q}$, $\Pi$ son polynôme minimal, $d$ le degré de $\Pi$. On note

$$\mathbf{Q}[x] = \{P(x)\ ;\ P \in \mathbf{Q}[X]\}, \qquad \mathbf{Z}[x] = \{P(x)\ ;\ P \in \mathbf{Z}[X]\}.$$

Il est clair que $\mathbf{Q}[x]$ est une $\mathbf{Q}$-sous-algèbre de $\mathbf{C}$, que $\mathbf{Z}[x]$ est un sous-anneau de $\mathbf{Q}[x]$.

a) Montrer que $\mathbf{Q}[x]$ est de dimension $d$ sur $\mathbf{Q}$, en donner une base.

b) Montrer que $\mathbf{Q}[x]$ est un sous-corps de $\mathbf{C}$.

c) Justifier que $\mathbf{Q}[x]$ est le corps des fractions de $\mathbf{Z}[x]$.

On pose désormais

$$\mathbb{F} = \mathbf{Q}[\varepsilon], \qquad \mathbb{A} = \mathbf{Z}[\varepsilon], \qquad \Phi_p = \sum_{j=0}^{p-1} X^j.$$

12. a) Démontrer que $\Phi_p$ est un irréductible de $\mathbf{Q}[X]$.

*Indication. On pourra commencer par démontrer que $\Phi_p(X+1)$ est irréductible sur $\mathbf{Z}$ en utilisant le critère d'Eisenstein.*

b) En déduire la dimension de $\mathbb{F}$ comme $\mathbf{Q}$-espace vectoriel.

13. Pour $x$ dans $\mathbb{F}$, soient $\mu_x$ l'endomorphisme du $\mathbf{Q}$-espace vectoriel $\mathbb{F}$ défini par

$$\forall t \in \mathbb{F}, \qquad \mu_x(t) = xt,$$

$N(x)$ le déterminant de $\mu_x$.

a) Pour $x$ et $y$ dans $\mathbb{F}$, exprimer $N(xy)$ en fonction de $N(x)$ et $N(y)$.

b) On suppose que $x$ appartient à $\mathbb{A}$. Montrer que le polynôme caractéristique $\chi_{\mu_x}$ de $\mu_x$ appartient à $\mathbf{Z}[X]$.

c) Soit $x$ dans $\mathbb{A}$. Montrer que $x$ est inversible dans $\mathbb{A}$ si et seulement si

$$N(x) \in \{\pm 1\}.$$

d) Calculer $N(1-\varepsilon)$.

14. Soit $\mathcal{I}$ l'idéal de $\mathbb{A}$ engendré par $1-\varepsilon$. On se propose de déterminer l'anneau quotient $\mathbb{A}/\mathcal{I}$. On note $\varphi$ la surjection canonique de $\mathbb{A}$ sur $\mathbb{A}/\mathcal{I}$. On écrira, pour $\lambda$ dans $\mathbb{A}$ :

$$\varphi(\lambda) = \widetilde{\lambda}.$$

a) Montrer que, pour $P$ dans $\mathbf{Z}[X]$, $P(\varepsilon) \equiv P(1)\ [\mathcal{I}]$. En déduire

$$\varphi(\mathbf{Z}) = \mathbb{A}/\mathcal{I}.$$

b) Montrer que $p$ appartient à $\mathcal{I}$.

c) Montrer que $\mathbb{A}/\mathcal{I}$ est isomorphe au corps $\mathbf{Z}/p\mathbf{Z}$.

### II.B. Un théorème de Tchebotarev

15. Soient $\mathbb{K}$ un corps (non nécessairement de caractéristique nulle), $P$ un élément de $\mathbb{K}[X]$, $x_0$ un élément de $\mathbb{K}$, $r$ un élément de $\mathbf{N}^*$. Montrer que, si $(X-x_0)^r$ divise $P$ dans $\mathbb{K}[X]$, alors

$$\forall k \in \{0,\dots,r-1\}, \qquad P^{(k)}(x_0)=0.$$

On adopte les notations de la sous-partie **II.A**.

16. On considère un entier naturel $r$ dans $\{1,\dots,p\}$. On note $\mathcal{P}_r$ l'ensemble des parties de cardinal $r$ de $\{0,\dots,p-1\}$.

Soient $I$ et $J$ dans $\mathcal{P}_r$, $i_1<\dots<i_r$ et $j_1<\dots<j_r$ des éléments de $\{0,\dots,p-1\}$ tels que

$$I=\{i_1,\dots,i_r\} \quad \text{et} \quad J=\{j_1,\dots,j_r\}.$$

On note $A_{I,J}$ la matrice

$$A_{I,J}=\left(\varepsilon^{i_k j_\ell}\right)_{1\le k,\ell\le r}.$$

On considère les propriétés suivantes, où $\mathbb{F}$ est défini entre les questions 11 et 12.

*(i)* Pour tout $\lambda=(\lambda_1,\dots,\lambda_r)$ de $\mathbb{F}^r\setminus\{(0,\dots,0)\}$ et toute $J=\{j_1,\dots,j_r\}$ de $\mathcal{P}_r$, le polynôme

$$P_{J,\lambda}=\sum_{\ell=1}^{r}\lambda_\ell X^{j_\ell}$$

s'annule en au plus $r-1$ points de $\mathbb{U}_p$.

*(ii)* Pour tout couple $(I,J)$ de ${\mathcal{P}_r}^2$, la matrice $A_{I,J}$ est dans $\mathrm{GL}_r(\mathbb{F})$.

*(iii)* Pour tout couple $(I,J)$ de ${\mathcal{P}_r}^2$, la matrice $A_{I,J}$ est dans $\mathrm{GL}_r(\mathbf{C})$.

*(iv)* Pour tout $\lambda=(\lambda_1,\dots,\lambda_r)$ de $\mathbf{C}^r\setminus\{(0,\dots,0)\}$ et toute $J=\{j_1,\dots,j_r\}$ de $\mathcal{P}_r$, le polynôme

$$P_{J,\lambda}=\sum_{\ell=1}^{r}\lambda_\ell X^{j_\ell}$$

s'annule en au plus $r-1$ points de $\mathbb{U}_p$.

Montrer les implications $(i)\Rightarrow(ii)$, $(ii)\Rightarrow(iii)$, $(iii)\Rightarrow(iv)$, $(iv)\Rightarrow(i)$.

17. On se propose de démontrer que la propriété *(i)* de la question 16 est vraie. On raisonne par l'absurde en supposant que tel n'est pas le cas. On rappelle les notations $\mathbb{A}=\mathbf{Z}[\varepsilon]$ et $\mathcal{I}$ l'idéal de $\mathbb{A}$ engendré par $1-\varepsilon$.

a) Montrer qu'il existe $I=\{i_1,\dots,i_r\}\in\mathcal{P}_r$, $J=\{j_1,\dots,j_r\}\in\mathcal{P}_r$ et un élément $P$ de $\mathbb{A}[X]$, de la forme

$$P=\sum_{\ell=1}^{r}\lambda_\ell X^{j_\ell},$$

tel que l'un au moins des $\lambda_\ell$ n'appartienne pas à $\mathcal{I}$ et que

$$\forall k\in\{1,\dots,r\}, \qquad P(\varepsilon^{i_k})=0.$$

Il est clair que la surjection canonique $\varphi$ de $\mathbb{A}$ dans $\mathbb{A}/\mathcal{I}$ se prolonge, de manière unique, en un morphisme d'anneaux de $\mathbb{A}[X]$ sur $\mathbb{A}/\mathcal{I}[X]$. On le note

$$Q\longmapsto\widetilde{Q}.$$

b) Le polynôme $P$ est celui de la question a). Montrer que

$$\forall j\in\{0,\dots,r-1\}, \qquad \widetilde{P}^{(j)}(\widetilde{1})=\widetilde{0}.$$

c) Montrer que $\widetilde{P}=\widetilde{0}$ et conclure.

### II. C. Le principe d'incertitude de Tao

On suppose que $G$ est un groupe cyclique de cardinal $p$. La description des caractères de $G$ a été donnée dans la question 2.

18. Montrer :

$$\min\{|S(f)| + |S(\widehat{f})| \ ; \ f \in \mathbf{C}[G] \setminus \{0\}\} = p + 1.$$

19. Soient $r$ dans $\{1, \ldots, p\}$, $A$ une partie de $G$, $B$ une partie de $\widehat{G}$. On suppose $|A| = |B| = r$. On note

$$S_A = \{f \in \mathbf{C}[G] \ ; \ S(f) \subset A\}.$$

Soit $T_{A,B}$ l'application, manifestement linéaire, qui à un élément $f$ de $S_A$ associe la restriction à $B$ de $\widehat{f}$. Montrer que $T_{A,B}$ est un isomorphisme d'espaces vectoriels de $S_A$ sur l'espace $\mathbf{C}^B$ des fonctions de $B$ dans $\mathbf{C}$.

20. Soient $A$ une partie de $G$, $B$ une partie de $\widehat{G}$. On suppose que

$$|A| + |B| = p + 1.$$

a) Justifier l'existence d'une partie $C$ de $\widehat{G}$ telle que $|C| = |A|$ et telle que $B \cap C$ soit un singleton $\{\chi\}$.

b) Conclure qu'il existe $f$ dans $\mathbf{C}[G]$ telle que

$$S(f) = A \qquad \text{et} \quad S(\widehat{f}) = B.$$

### II.D. Application à l'inégalité de Cauchy-Davenport

On suppose, comme dans la section II.C, que $G$ est un groupe cyclique de cardinal $p$.

21. Soient $A$ et $A'$ deux parties non vides de $G$. On note

$$A + A' = \{a + a' \ ; \ (a, a') \in A \times A'\}.$$

Montrer

$$|A + A'| \geq \min\{|A| + |A'| - 1, p\}.$$

*Indication. On pourra considérer $f$ et $g$ dans $\mathbf{C}[G]$ telles que*

$$S(f) = A, \ S(g) = A', \ |S(\widehat{f})| = p + 1 - |A|, \ |S(\widehat{g})| = p + 1 - |A'|$$

*et que $|S(\widehat{f}) \cap S(\widehat{g})|$ soit aussi petite que possible, puis utiliser l'élément $f * g$ de $\mathbf{C}[G]$ défini par*

$$\forall x \in G, \qquad (f * g)(x) = \sum_{y \in G} f(y) g(x - y).$$

# Problème 2

## Mesures cristallines

Si $f$ est une fonction intégrable de $\mathbf{R}$ dans $\mathbf{C}$, sa transformée de Fourier est la fonction de $\mathbf{R}$ dans $\mathbf{C}$ définie par

$$\forall \xi \in \mathbf{R}, \qquad \widehat{f}(\xi) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\, e^{-2i\pi x\xi}\, \mathrm{d}x.$$

On note $\mathcal{S}$ la classe de Schwartz, c'est-à-dire l'espace des fonctions $f$ de classe $C^\infty$ de $\mathbf{R}$ dans $\mathbf{C}$ telles que, pour tout couple $(m, n)$ de $\mathbf{N}^2$ :

$$x^n\, f^{(m)}(x) \underset{x\to\pm\infty}{\longrightarrow} 0.$$

Pour $t$ dans $\mathbf{R}^{+*}$, soit $g_t$ la fonction définie par

$$\forall x \in \mathbf{R}, \qquad g_t(x) = \exp\left(-t\pi x^2\right).$$

On montre facilement que, pour tout $t$ de $\mathbf{R}^{+*}$ et tout $P$ de $\mathbf{C}[X]$, la fonction $P \times g_t$ appartient à $\mathcal{S}$ ; la vérification n'est pas demandée.

## I. Préliminaires

### I.A. Formule de Poisson

1. Soit $f$ une fonction continue et 1-périodique de $\mathbf{R}$ dans $\mathbf{C}$. Pour $k$ dans $\mathbf{Z}$, soit $c_k(f)$ le coefficient de Fourier d'indice $k$ de $f$ :

$$c_k(f) = \int_0^1 f(t)\, e^{-2ik\pi t}\, \mathrm{d}t.$$

   On suppose

$$\sum_{k=-\infty}^{+\infty} |c_k(f)| < +\infty.$$

   Montrer que

$$\forall x \in \mathbf{R}, \qquad f(x) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} c_k(f)\, e^{2ik\pi x}.$$

   *Indication. On justifiera que la fonction figurant au second membre de l'égalité est 1-périodique et continue, puis on en calculera les coefficients de Fourier 1-périodiques.*

2. Soient $\alpha$ un élément de $]1\,;+\infty[$, $f$ une fonction continue de $\mathbf{R}$ dans $\mathbf{C}$.

   a) On suppose qu'existe $C$ dans $\mathbf{R}^{+*}$ tel que

$$\forall x \in \mathbf{R}, \qquad |f(x)| \leq \frac{C}{(1+|x|)^\alpha}.$$

   Montrer qu'en posant

$$\forall x \in \mathbf{R}, \qquad F(x) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} f(x+k),$$

on définit une fonction $F$ continue et 1-périodique de $\mathbf{R}$ dans $\mathbf{C}$.

b) On suppose maintenant que $f$ est intégrable et qu'existe $C$ dans $\mathbf{R}^{+*}$ tel que

$$\forall x \in \mathbf{R}, \qquad |f(x)| + |\widehat{f}(x)| \leq \frac{C}{(1+|x|)^{\alpha}}.$$

En déduire la formule sommatoire de Poisson

$$\forall x \in \mathbf{R}, \qquad \sum_{k=-\infty}^{+\infty} f(x+k) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \widehat{f}(n)\, e^{2in\pi x}.$$

### I.B. Gaussiennes et fonction thêta de Jacobi

On pose $g = g_1$ définie dans le préambule. On rappelle la formule

$$\int_{-\infty}^{+\infty} g(x)\mathrm{d}x = 1,$$

que l'on pourra utiliser sans justification.

3. Montrer que $\widehat{g}$ est de classe $C^1$ sur $\mathbf{R}$ et que, pour $\xi$ dans $\mathbf{R}$ :

$$\widehat{g}\,'(\xi) = -2\pi\xi\, \widehat{g}(\xi).$$

En déduire qu'on a $\widehat{g} = g$.

4. a) Soit $t$ dans $\mathbf{R}^{+*}$. Déterminer la fonction $\widehat{g_t}$ où $g_t$ est définie dans le préambule.

b) On pose, pour $t$ dans $\mathbf{R}^{+*}$ :

$$\theta(t) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} e^{-\pi t n^2}.$$

Montrer

$$\forall t \in \mathbf{R}^{+*}, \qquad \theta(t) = \sqrt{\frac{1}{t}}\, \theta\left(\frac{1}{t}\right).$$

### I.C. Base hilbertienne d'Hermite

Soit $L^2$ l'espace des classes de fonctions de $\mathbf{R}$ dans $\mathbf{C}$ de carré intégrable sur $\mathbf{R}$, pour la relation d'égalité presque partout relativement à la mesure de Lebesgue sur $\mathbf{R}$. Pour $u$ et $v$ dans $L^2$, soit

$$\langle u, v\rangle = \int_{-\infty}^{+\infty} \overline{u(x)}v(x)\mathrm{d}x.$$

L'espace $(L^2, \langle\ ,\ \rangle)$ est un espace de Hilbert complexe contenant $\mathcal{S}$. La norme associée à $\langle\ ,\ \rangle$ est notée

$$f \longmapsto \|f\|.$$

On identifiera un élément de $L^2$ et l'un quelconque de ses représentants.

Soit $h$ la fonction $g_2$ :

$$\forall x \in \mathbf{R}, \qquad h(x) = \exp(-2\pi x^2).$$

Pour $n$ dans $\mathbf{N}$, la fonction $H_n$ est définie par

$$\forall x \in \mathbf{R}, \qquad H_n(x) = (-1)^n h^{(n)}(x)\ \exp(2\pi x^2)$$

et la fonction $\Psi_n$ est définie par

$$\forall x \in \mathbf{R}, \qquad \Psi_n(x) = \exp(-\pi x^2) H_n(x) = (-1)^n \exp(\pi x^2) h^{(n)}(x).$$

5. Montrer que $H_n$ est une fonction polynomiale dont on précisera le terme de plus haut degré. On identifie $H_n$ et le polynôme associé.

Ce résultat montre que les $\Psi_n$ appartiennent à $\mathcal{S}$, donc à $L^2$.

6. a) Soient $m$ et $n$ dans $\mathbf{N}$ avec $n \geq m$. Montrer, si $k$ est dans $\mathbf{N}$ et $k \leq n$ :

$$\langle \Psi_m, \Psi_n \rangle = (-1)^{n+k} \int_{-\infty}^{+\infty} h^{(n-k)}(x) H_m^{(k)}(x) \mathrm{d}x.$$

   b) En déduire que $(\Psi_n)_{n\in\mathbf{N}}$ est orthogonale. Pour $n$ dans $\mathbf{N}$, calculer $\|\Psi_n\|$.

On pose, pour $n$ dans $\mathbf{N}$,

$$\psi_n = \frac{\Psi_n}{\|\Psi_n\|}.$$

La suite $(\psi_n)_{n\in\mathbf{N}}$ est donc orthonormée.

7. Soit $f$ un élément de $L^2$. On pose

$$\forall x \in \mathbf{R}, \qquad F(x) = \exp(-\pi x^2)\ f(x).$$

   a) Justifier que $F$ est intégrable sur $\mathbf{R}$. Montrer que $\widehat{F}$ se prolonge en une fonction entière.

   b) On suppose

$$\forall n \in \mathbf{N}, \qquad \int_{-\infty}^{+\infty} x^n \exp(-\pi x^2) f(x)\ \mathrm{d}x = 0.$$

   En considérant les dérivées de $\widehat{F}$ en 0, montrer que $f$ est l'élément nul de $L^2$.

   c) Montrer que $(\psi_n)_{n\in\mathbf{N}}$ est une base hilbertienne de $L^2$.

8. On note $T$ l'application de $\mathcal{S}$ dans $\mathcal{S}$ définie par

$$\forall f \in \mathcal{S},\ \forall x \in \mathbf{R}, \qquad T(f)(x) = -f''(x) + 4\pi^2 x^2\ f(x).$$

   On montre que $T$ est un endomorphisme de $\mathcal{S}$, la vérification n'est pas demandée.

   a) Pour $u$ et $v$ dans $\mathcal{S}$, vérifier :

$$\langle T(u), v \rangle = \langle u, T(v) \rangle\,.$$

   b) Soit $n$ dans $\mathbf{N}$. En dérivant $n+1$ fois la relation :

$$\forall x \in \mathbf{R}, \qquad h'(x) = -4\pi x\ h(x),$$

   trouver un réel $\mu_n$ tel que :

$$T(\Psi_n) = \mu_n \Psi_n.$$

   c) Soient $\ell$ dans $\mathbf{N}$ et $f$ dans $\mathcal{S}$. Montrer

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \mu_n^{2\ell}\ |\langle \psi_n, f \rangle|^2 < +\infty.$$

## II. Mesures cristallines

Pour $f$ dans $\mathcal{S}$ et $(j,k)$ dans $\mathbf{N}^2$, soit

$$p_{j,k}(f) = \sup\left\{\left|x^j\, f^{(k)}(x)\right| \ ;\ x \in \mathbf{R}\right\}.$$

Pour $m$ dans $\mathbf{N}$, soit $N_m$ la norme définie sur $\mathcal{S}$ par

$$\forall f \in \mathcal{S}, \qquad N_m(f) = \max\{p_{j,k}(f)\ ;\ (j,k) \in \mathbf{N}^2, j \leq m, k \leq m\}.$$

On note $\mathcal{D}$ le sous-espace de $\mathcal{S}$ constitué des fonctions $f$ de classe $C^\infty$ de $\mathbf{R}$ dans $\mathbf{C}$ telles qu'existe $R$ dans $\mathbf{R}^{+*}$ tel que

$$\forall x \in \mathbf{R} \setminus [-R\,;\,R], \qquad f(x) = 0.$$

On rappelle que, pour tout couple $(a,b)$ de nombres réels tels que $a < b$, il existe une fonction $f$ de $\mathcal{D}$, nulle sur $\mathbf{R}\backslash]a\,;\,b[$ et strictement positive sur $]a\,;\,b[$.

### II.A. Mesures purement atomiques

On appelle *mesure* toute forme linéaire $\mu$ sur $\mathcal{D}$ telle que, pour tout $R$ de $\mathbf{R}^{+*}$, il existe $C_R$ dans $\mathbf{R}^{+*}$ tel que, pour toute $f$ de $\mathcal{D}$ nulle en dehors de $[-R\,;\,R]$

$$|\mu(f)| \leq C_R\, p_{0,0}(f),$$

c'est-à-dire

$$|\mu(f)| \leq C_R\ \sup\{|f(x)|\ ;\ x \in \mathbf{R}\}.$$

9. Soit $(c_\lambda)_{\lambda\in\mathbf{R}}$ une famille de nombres complexes. On pose $\Lambda = \{\lambda \in \mathbf{R}\ ;\ c_\lambda \neq 0\}$ et on suppose que, pour tout $R$ de $\mathbf{R}^{+*}$, $\Lambda \cap [-R\,;\,R]$ est fini.

   a) Montrer que $\Lambda$ est au plus dénombrable.

   b) On pose, pour $f$ dans $\mathcal{D}$,
   $$\mu(f) = \sum_{\lambda\in\mathbf{R}} c_\lambda f(\lambda).$$
   Montrer qu'on définit ainsi une mesure.

   c) On suppose, pour tout $f$ dans $\mathcal{D}$, $\mu(f) = 0$. Montrer que, pour tout $\lambda \in \mathbf{R}$, on a $c_\lambda = 0$.

Les mesures ainsi définies sont dites *mesures purement atomiques*. Il résulte de cette question que, si

$$\forall f \in \mathcal{D}, \qquad \sum_{\lambda\in\mathbf{R}} c_\lambda f(\lambda) = \sum_{\lambda\in\mathbf{R}} c'_\lambda f(\lambda),$$

alors

$$\forall \lambda \in \mathbf{R}, \qquad c_\lambda = c'_\lambda.$$

En particulier, avec les notations de la question, l'ensemble $\Lambda$ est déterminé par $\mu$. On l'appelle *support de* $\mu$.

## II.B. Distributions tempérées

On note $\mathcal{S}'$ l'espace des distributions tempérées sur $\mathbf{R}$, c'est-à-dire l'ensemble des formes linéaires $T$ sur $\mathcal{S}$ telles qu'existent $m$ dans $\mathbf{N}$ et $C$ dans $\mathbf{R}^{+*}$ tels que

$$\forall f \in \mathcal{S}, \qquad |T(f)| \leq C\, N_m(f).$$

**Rappels**

Si $T$ est dans $\mathcal{S}'$, il en est de même de la dérivée $T'$ de $T$, définie par

$$\forall f \in \mathcal{S}, \qquad T'(f) = -T(f').$$

Pour $f$ dans $\mathcal{S}$, $\widehat{f}$ appartient également à $\mathcal{S}$. Ceci permet de définir la transformée de Fourier d'un élément $T$ de $\mathcal{S}'$ par

$$\forall f \in \mathcal{S}, \qquad \widehat{T}(f) = T(\widehat{f}).$$

Les applications $T'$ et $\widehat{T}$ ainsi définies appartiennent à $\mathcal{S}'$.

Pour $\lambda$ dans $\mathbf{R}$, soit $\delta_\lambda$ la masse de Dirac au point $\lambda$, c'est-à-dire l'élément de $\mathcal{S}'$ défini par

$$\forall f \in \mathcal{S}, \qquad \delta_\lambda(f) = f(\lambda).$$

10. Soit $(\lambda_n)_{n\in\mathbf{Z}}$ une suite strictement croissante de nombres réels telle que

$$\forall n \in \mathbf{Z}, \qquad \lambda_{-n} = -\lambda_n.$$

On suppose qu'il existe $\varepsilon$ et $c$ dans $\mathbf{R}^{+*}$ tels que

$$\forall n \in \mathbf{N}^*, \qquad \lambda_n \geq c\, n^\varepsilon.$$

Soient $(c_n)_{n\in\mathbf{Z}}$ une suite de nombres complexes, $r$ et $k$ dans $\mathbf{R}^{+*}$. On suppose que

$$\forall n \in \mathbf{Z}^*, \qquad |c_n| \leq k\, |n|^r.$$

a) Soit $f$ dans $\mathcal{S}$. Justifier la sommabilité de la famille

$$(c_n\, f(\lambda_n))_{n\in\mathbf{Z}}\,.$$

b) Montrer que la forme linéaire $T$, définie par

$$f \in \mathcal{S} \longmapsto \sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_n\, f(\lambda_n),$$

est une distribution tempérée, que l'on note

$$\sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_n\, \delta_{\lambda_n}.$$

On remarquera que la restriction à $\mathcal{D}$ de cette distribution tempérée est une mesure purement atomique. On dit que la distribution tempérée $T$ ainsi définie est une *mesure cristalline* si la restriction de $\widehat{T}$ à $\mathcal{D}$ est une mesure purement atomique.

11. Soit

$$T_0 = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \delta_n.$$

En utilisant la question 2, déterminer $\widehat{T_0}$ et en déduire que $T_0$ est une mesure cristalline, nommée *peigne de Dirac*.

12. a) Soit $\delta = \delta_0$. Montrer que la restriction à $\mathcal{D}$ de la distribution tempérée $\delta'$ n'est pas une mesure.

b) Montrer que la mesure purement atomique

$$f \in \mathcal{D} \longmapsto \sum_{k=1}^{+\infty} 2^k f(k)$$

n'est pas la restriction à $\mathcal{D}$ d'une distribution tempérée.

### II.C. La mesure cristalline de Guinand-Meyer

Pour $n$ dans $\mathbf{N}$, soit $r_3(n)$ le nombre de $(x, y, z) \in \mathbf{Z}^3$ tels que

$$x^2 + y^2 + z^2 = n.$$

13. Montrer, pour $t$ dans $\mathbf{R}^{+*}$ :

$$1 + \sum_{n=1}^{+\infty} r_3(n) e^{-n\pi t} = t^{-3/2} + t^{-3/2} \sum_{n=1}^{+\infty} r_3(n) e^{-n\pi/t}.$$

*Indication : on utilisera l'identité de la question 4.*

14. Déterminer $k$ et $r$ dans $\mathbf{R}^{+*}$ tels que

$$\forall n \in \mathbf{N}^*, \qquad r_3(n) \leq k n^r.$$

D'après la question 10-b,

$$\sigma = -2\delta' + \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{r_3(n)}{\sqrt{n}} \left(\delta_{\sqrt{n}} - \delta_{-\sqrt{n}}\right)$$

est donc un élément de $\mathcal{S}'$.

15. a) Pour $t$ dans $\mathbf{R}^{+*}$, soit $\varphi_t$ l'élément de $\mathcal{S}$ défini par

$$\forall x \in \mathbf{R}, \qquad \varphi_t(x) = x\, e^{-\pi t x^2}.$$

Calculer, pour $\xi$ dans $\mathbf{R}$, $\widehat{\varphi_t}(\xi)$.

b) En déduire

$$\forall t \in \mathbf{R}^{+*}, \qquad \widehat{\sigma}(\varphi_t) = -i\sigma(\varphi_t).$$

16. Pour $n$ dans $\mathbf{N}$ et $t$ dans $\mathbf{R}^{+*}$, soit $\varphi_{t,n}$ l'élément de $\mathcal{S}$ défini par

$$\forall x \in \mathbf{R}, \qquad \varphi_{t,n}(x) = x^{2n+1}\, e^{-\pi t x^2}.$$

On admet le résultat général suivant donnant une description précise des distributions tempérées : toute distribution tempérée de $\mathcal{S}'$ est de la forme

$$f \in \mathcal{S} \longmapsto \int_{\mathbf{R}} g(x) \partial_x^m \left((1 + x^2)^p f(x)\right) \mathrm{d}x,$$

où $g$ est une fonction continue et bornée sur $\mathbf{R}$ dans $\mathbf{C}$ et $(m, p) \in \mathbf{N}^2$.

a) Pour $T$ dans $\mathcal{S}'$, montrer que l'application

$$U \ : t \in \mathbf{R}^{+*} \longmapsto T(\varphi_t)$$

est de classe $C^\infty$ sur $\mathbf{R}^{+*}$ et que, pour $n$ dans $\mathbf{N}$, on a

$$\forall t \in \mathbf{R}^{+*}, \qquad U^{(n)}(t) = (-\pi)^n \, T(\varphi_{t,n}).$$

b) En déduire que, pour tout $t > 0$ et pour tout $n \in \mathbf{N}$, on a

$$\widehat{\sigma}(\varphi_{t,n}) = -i\sigma(\varphi_{t,n}).$$

17. On admet le résultat de densité suivant : pour $f$ dans $\mathcal{S}$, on a

$$\forall (j,k) \in \mathbf{N}^2, \qquad p_{j,k}(S_N(f) - f) \underset{N \to +\infty}{\longrightarrow} 0,$$

où $S_N(f) = \sum\limits_{k=0}^{N} \langle \psi_k \, , \, f \rangle \psi_k$ est la $N$-ième somme partielle de Fourier-Hermite de $f$ (cf. I.C.).

a) Montrer que, pour toute fonction $f$ impaire de $\mathcal{S}$, on a

$$\widehat{\sigma}(f) = -i\sigma(f).$$

b) En déduire que $\widehat{\sigma} = -i\sigma$.

18. Pour $\beta$ dans $\mathbf{R}$ et $f$ dans $\mathcal{S}$, soit $M_\beta(f)$ l'élément de $\mathcal{S}$ défini par

$$\forall x \in \mathbf{R}, \qquad M_\beta(f)(x) = f(\beta x).$$

Soient $\alpha$ dans $\mathbf{R}^*$ et $\tau_\alpha$ l'élément de $\mathcal{S}'$ défini par

$$\forall f \in \mathcal{S}(\mathbf{R}), \qquad \tau_\alpha(f) = \left(\alpha^2 + \frac{1}{\alpha}\right) \sigma(f) - \sigma\left(M_{1/\alpha}(f)\right) - \alpha\sigma\left(M_\alpha(f)\right).$$

a) Montrer que la restriction de $\tau_\alpha$ à $\mathcal{D}$ est une mesure.

b) Montrer que l'on a

$$\widehat{\tau_\alpha} = -i\tau_\alpha.$$

19. a) Déterminer une fonction $\chi$ de $\mathbf{N}^*$ dans $\mathbf{R}$ telle que

$$\tau_{1/2} = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\chi(n) r_3(n)}{\sqrt{n}} \left(\delta_{\frac{\sqrt{n}}{2}} - \delta_{-\frac{\sqrt{n}}{2}}\right).$$

b) On admet le résultat suivant : un élément $k$ de $\mathbf{N}$ vérifie $r_3(k) = 0$ si et seulement s'il est de la forme $4^i(8j+7)$ où $(i,j)$ est dans $\mathbf{N}^2$. En déduire le support de $\tau_{1/2}$.

IMPRIMERIE NATIONALE – 17 0136 – D'après documents fournis