Liberté • Égalité • Fraternité
RÉPUBLIQUE FRANÇAISE

MINISTÈRE DE L'ÉDUCATION NATIONALE, DE L'ENSEIGNEMENT SUPÉRIEUR ET DE LA RECHERCHE

EAE MAT 2

SESSION 2017

AGREGATION
CONCOURS EXTERNE

Section : MATHÉMATIQUES

COMPOSITION D'ANALYSE ET PROBABILITÉS

Durée : 6 heures

L'usage de tout ouvrage de référence, de tout dictionnaire et de tout matériel électronique (y compris la calculatrice) est rigoureusement interdit.

Dans le cas où un(e) candidat(e) repère ce qui lui semble être une erreur d'énoncé, il (elle) le signale très lisiblement sur sa copie, propose la correction et poursuit l'épreuve en conséquence.

De même, si cela vous conduit à formuler une ou plusieurs hypothèses, il vous est demandé de la (ou les) mentionner explicitement.

NB : ***La copie que vous rendrez ne devra, conformément au principe d'anonymat, comporter aucun signe distinctif, tel que nom, signature, origine, etc. Si le travail qui vous est demandé comporte notamment la rédaction d'un projet ou d'une note, vous devrez impérativement vous abstenir de signer ou de l'identifier.***

INFORMATION AUX CANDIDATS

Vous trouverez ci-après les codes nécessaires vous permettant de compléter les rubriques figurant en en-tête de votre copie.

Ces codes doivent être reportés sur chacune des copies que vous remettrez.

Concours	Section/option	Epreuve	Matière
EAE	1300A	102	2678

Les calculatrices, téléphones, tablettes, ordinateurs et autres appareils électroniques similaires, ainsi que les documents sont interdits.

La qualité de la rédaction sera un facteur important d'appréciation des copies. On invite donc les candidats à produire des raisonnements clairs, complets et concis.

Les candidats peuvent utiliser les résultats énoncés dans les questions ou parties précédentes, en veillant dans ce cas à préciser la référence du résultat utilisé.

Introduction, notations et conventions

Le sujet a pour but d'étudier les exponentielles de matrices et d'opérateurs dépendant d'un paramètre, qui interviennent naturellement dans la résolution théorique ou numérique des problèmes d'évolution en temps. En particulier on étudiera la convergence en norme de produits d'exponentielles de matrices ou d'opérateurs, en établissant dans quelques cas la formule dite “formule de Trotter-Kato” et en étudiant son optimalité.

On note $\mathbf{N}$ l'ensemble des entiers naturels et $\mathbf{N}^* = \mathbf{N} \setminus \{0\}$, $\mathbf{R}$ le corps des réels et $\mathbf{C}$ le corps des complexes. On désigne par $\mathbf{R}_+$ l'ensemble des réels positifs ou nuls et $\overline{\mathbf{R}}_+ = \mathbf{R}_+ \cup \{+\infty\}$. Si z est un complexe, $\overline{z}$ désigne son conjugué, $\mathrm{Re}\,(z)$ sa partie réelle, $\mathrm{Im}\,(z)$ sa partie imaginaire et $|z|$ son module. On note e^z l'exponentielle de z. Pour un réel x, on définit aussi son cosinus et son sinus hyperboliques par $\mathrm{ch}(x) = \frac{e^x + e^{-x}}{2}$ et $\mathrm{sh}(x) = \frac{e^x - e^{-x}}{2}$.

Avec $\mathbf{K} = \mathbf{R}$ ou $\mathbf{C}$ et $d \in \mathbf{N}^*$, on note $\mathcal{M}_d(\mathbf{K})$ l'ensemble des matrices à d lignes et d colonnes à coefficients dans $\mathbf{K}$ et I désigne la matrice identité dans $\mathcal{M}_d(\mathbf{K})$.

Pour deux éléments $x = (x_1, \cdots, x_d)$ et $y = (y_1, \cdots, y_d)$ dans $\mathbf{R}^d$, on note $x \cdot y = \sum_{j=1}^{d} x_j y_j$ le produit scalaire usuel sur $\mathbf{R}^d$ de x et y, et $\|x\|_2 = \left(\sum_{j=1}^{d} x_j^2 \right)^{1/2}$ la norme euclidienne associée. Dans $\mathbf{R}^d$, l'élement $(0, \cdots, 0)$ est simplement noté 0. En cas de besoin on identifie un vecteur de $\mathbf{R}^d$ avec la matrice colonne qui lui est naturellement associée. Pour une matrice $A \in \mathcal{M}_d(\mathbf{R})$, on pose

$$\|A\|_2 = \sup_{x \in \mathbf{R}^d \setminus \{0\}} \frac{\|Ax\|_2}{\|x\|_2}, \tag{1}$$

qui est a priori un élement de $\overline{\mathbf{R}}_+$. On désigne par $\det(A)$ le déterminant de la matrice A et par $\mathrm{Tr}(A)$ la somme de ses éléments diagonaux.

On dira qu'une matrice est *positive* si pour tout $x \in \mathbf{R}^d$ on a $Ax \cdot x \geq 0$.

Pour toute matrice A *symétrique* dans $\mathcal{M}_d(\mathbf{R})$, on rappelle qu'il existe une matrice diagonale $\Lambda = \mathrm{diag}(\lambda_1, \cdots, \lambda_d)$ et une matrice orthogonale P telles que $A = P\Lambda P^{-1}$. Lorsque la matrice A est à la fois positive et symétrique, les valeurs propres $\lambda_1, \cdots, \lambda_d$ sont positives et pour $\alpha \geq 0$, on définit alors $\Lambda^\alpha = \mathrm{diag}(\lambda_1^\alpha, \cdots, \lambda_d^\alpha)$ et $A^\alpha = P\Lambda^\alpha P^{-1}$. Dans tout le problème, on dira que la valeur propre d'une matrice est *simple* si son espace caractéristique et son espace propre associés sont identiques et de dimension 1.

Lorsque D et E sont des espaces vectoriels normés, de dimension finie ou non, on note $\mathcal{L}(D, E)$ l'ensemble des applications linéaires continues de D dans E. En notant $\|.\|$ la norme sur E, pour une application $\mathcal{A} \in \mathcal{L}(E, E)$, on pose

$$\|\mathcal{A}\| = \sup_{x \in E \setminus \{0\}} \frac{\|\mathcal{A}x\|}{\|x\|}.$$

Lorsque $D \subset E$, un élément $\mathcal{A}$ de $\mathcal{L}(D,E)$ est appelé *opérateur* et D *domaine* de $\mathcal{A}$. Pour deux éléments $\mathcal{A}$ et $\mathcal{B}$ dans $\mathcal{L}(E,E)$ on désigne par $\mathcal{A}\circ\mathcal{B}$ leur composée et pour $n \in \mathbf{N}^*$ on note $\mathcal{A}^n = \underbrace{\mathcal{A}\circ\mathcal{A}\circ\ldots\circ\mathcal{A}}_{n \text{ fois}}$.

Pour $d \in \mathbf{N}^*$, $\ell^2(\mathbf{N},\mathbf{R}^d)$ est l'ensemble des suites $(u_n)_{n\in\mathbf{N}}$ indicées par $\mathbf{N}$ et à terme général dans $\mathbf{R}^d$ telles que $\sum\limits_{n\in\mathbf{N}} \|u_n\|_2^2 < \infty$. On munit cet espace du produit scalaire et de la norme associée définis par

$$\langle u, v\rangle = \sum_{n\in\mathbf{N}} u_n \cdot v_n, \qquad \|u\|^2 = \langle u, u\rangle$$

pour $u = (u_n)_{n\in\mathbf{N}}$, et $v = (v_n)_{n\in\mathbf{N}}$ dans $\ell^2(\mathbf{N},\mathbf{R}^d)$. Pour deux telles suites, on écrit $u_n = \mathcal{O}(v_n)$ lorsqu'il existe une constante $C > 0$ telle que pour tout $n \in \mathbf{N}$, $\|u_n\|_2 \leq C\,\|v_n\|_2$.

On munit enfin $\mathbf{R}$ de la mesure de Lebesgue et on note $L^2(\mathbf{R})$ l'ensemble des classes de fonctions égales presque partout, de carré intégrable pour la mesure de Lebesgue. Le cas échéant, on identifiera une classe de fonctions et l'un de ses représentants. On munit cet espace du produit scalaire et de la norme associée définis par

$$\langle f, g\rangle = \int_{\mathbf{R}} f(x)g(x)\,\mathrm{d}x, \qquad \|f\|^2 = \langle f, f\rangle$$

pour f et g dans $L^2(\mathbf{R})$.

PARTIE I : Exponentielles de matrices

Dans toute cette partie, on fixe $d \in \mathbf{N}^*$.

1) Montrer que l'application $A \mapsto \|A\|_2$ (cf. équation (1)) est une application bien définie de $\mathcal{M}_d(\mathbf{R})$ dans $\mathbf{R}_+$ et que cette application est une norme sur $\mathcal{M}_d(\mathbf{R})$.

2) Soit A une matrice *symétrique* dans $\mathcal{M}_d(\mathbf{R})$.

a) En utilisant une matrice orthogonale adaptée, montrer que $\|A\|_2 = \sup\limits_{\lambda\in\mathcal{V}} |\lambda|$ où $\mathcal{V}$ est l'ensemble des valeurs propres de A.

b) En déduire que $|\mathrm{Tr}(A)| \leq d\,\|A\|_2$.

On admettra pour la suite que $\mathcal{M}_d(\mathbf{R})$ muni de la norme $\|\cdot\|_2$ est un espace de Banach.

3) Soient A et B deux matrices dans $\mathcal{M}_d(\mathbf{R})$.

a) Montrer que $\|AB\|_2 \leq \|A\|_2\,\|B\|_2$.

b) Montrer que la série $\sum\limits_{k=0}^{\infty} \frac{A^k}{k!}$ est convergente dans $\mathcal{M}_d(\mathbf{R})$.

Dans la suite du problème, on notera e^A la somme $\sum\limits_{k=0}^{\infty} \frac{A^k}{k!}$, appelée exponentielle *de A.*

c) Montrer que, si A et B commutent, alors $\mathrm{e}^{A+B} = \mathrm{e}^A\mathrm{e}^B$.

4) On pose

$$I = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad J = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \qquad K = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \qquad L = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

a) Calculer les exponentielles de I, J, K et L.

b) Pour $\theta \in \mathbf{R}$, on pose $M = \cos(\theta)J + \sin(\theta)K$. Montrer que $M^2 = I$.

c) En déduire que, pour tout $s \in \mathbf{R}$, $\mathrm{e}^{-sM} = \mathrm{ch}(s)I - \mathrm{sh}(s)M$ et que $\mathrm{Tr}(\mathrm{e}^{-sM}) = 2\mathrm{ch}(s)$.

5) Soit A un élement de $\mathcal{M}_d(\mathbf{R})$. Pour tout $x \in \mathbf{R}^d$, on considère la fonction $\phi_x : t \longmapsto \mathrm{e}^{-tA}x$ définie sur $\mathbf{R}$.

a) Montrer que, pour tout $x \in \mathbf{R}^d$, ϕ_x est une fonction $\mathcal{C}^1(\mathbf{R}, \mathbf{R}^d)$ et qu'elle est l'unique solution de l'équation différentielle $y'(t) + Ay(t) = 0$ telle que $y(0) = x$.

b) En déduire que la matrice A est positive si et seulement si, pour tout $t \geq 0$, $\left\|\mathrm{e}^{-tA}\right\|_2 \leq 1$.

c) En utilisant la question **I-5-a)** et sans utiliser la question **I-3-c)**, montrer que pour tous s, $t \in \mathbf{R}$ on a : $\mathrm{e}^{-tA}\mathrm{e}^{-sA} = \mathrm{e}^{-(t+s)A}$.

PARTIE II : Formules de Trotter-Kato en dimension finie

Dans toute cette Partie, on considère $d \in \mathbf{N}^*$ ainsi que deux matrices A et B dans $\mathcal{M}_d(\mathbf{R})$. On va chercher à établir la formule suivante dite de Lie-Trotter-Kato :

Il existe une constante $C_{AB} > 0$ telle que, pour tous $n \in \mathbf{N}^*$ et $t \in [0, 1]$,

$$\left\|\left(\mathrm{e}^{-tA/n}\mathrm{e}^{-tB/n}\right)^n - \mathrm{e}^{-t(A+B)}\right\|_2 \leq \frac{C_{AB}}{n}.$$

Pour la suite on définit pour tous $t \in [0, 1]$ et $n \in \mathbf{N}^*$ les matrices

$$S_{n,t} = \mathrm{e}^{-t(A+B)/n}, \qquad T_{n,t} = \mathrm{e}^{-tA/n}\mathrm{e}^{-tB/n}.$$

1) Montrer que, pour tous $n \in \mathbf{N}^*$ et $t \in [0, 1]$,

$$\|S_{n,t}\|_2 \leq \mathrm{e}^{(\|A\|_2 + \|B\|_2)/n} \qquad \text{et} \qquad \|T_{n,t}\|_2 \leq \mathrm{e}^{(\|A\|_2 + \|B\|_2)/n}.$$

2) Soient $n \in \mathbf{N}^*$ et $t \in [0, 1]$.

a) Montrer que $(S_{n,t})^n - (T_{n,t})^n = \sum_{m=0}^{n-1} (S_{n,t})^m (S_{n,t} - T_{n,t})(T_{n,t})^{n-1-m}$.

b) En déduire que $\|(S_{n,t})^n - (T_{n,t})^n\|_2 \leq n\mathrm{e}^{(\|A\|_2 + \|B\|_2)}\, \|S_{n,t} - T_{n,t}\|_2$.

3) En utilisant la définition de l'exponentielle d'une matrice, montrer qu'il existe une constante C telle que pour tous $t \in [0, 1]$ et $n \in \mathbf{N}^*$

$$\|S_{n,t} - T_{n,t}\|_2 \leq \frac{C}{n^2}.$$

4) En déduire la formule de Lie-Trotter-Kato.

5) On définit maintenant pour tous $n \in \mathbf{N}^*$ et $t \in [0, 1]$ les matrices

$$R_{n,t} = \mathrm{e}^{-tA/(2n)}\mathrm{e}^{-tB/n}\mathrm{e}^{-tA/(2n)}.$$

En utilisant ces matrices, adapter les questions précédentes pour montrer qu'il existe une constante $C'_{AB} > 0$ telle que pour tous $n \in \mathbf{N}^*$ et $t \in [0, 1]$ on ait

$$\left\|\left(\mathrm{e}^{-tA/(2n)}\mathrm{e}^{-tB/n}\mathrm{e}^{-tA/(2n)}\right)^n - \mathrm{e}^{-t(A+B)}\right\|_2 \leq \frac{C'_{AB}}{n^2}.$$

PARTIE III : Semigroupes d'opérateurs

Dans cette Partie on étend la définition de l'exponentielle d'une matrice aux opérateurs définis sur des espaces de Hilbert et on introduit la notion de *semigroupe d'opérateurs*. On pourra utiliser les résultats de la Partie **I**.

Pour la suite on appelera semigroupe *sur un espace de Hilbert $\mathcal{H}$ une famille d'opérateurs $\mathcal{U} = \{\mathcal{U}_t \in \mathcal{L}(\mathcal{H},\mathcal{H}),\ t \in \mathbf{R}^+\}$ satisfaisant les propriétés suivantes :*

i) *pour tous $s,\ t \in \mathbf{R}^+$, $\mathcal{U}_t \circ \mathcal{U}_s = \mathcal{U}_{t+s}$,*

ii) *$\mathcal{U}_0 = \mathrm{Id}$, l'application identité sur $\mathcal{H}$ ($\mathrm{Id}(x) = x$ pour tout $x \in \mathcal{H}$),*

iii) *pour tout $x \in \mathcal{H}$, l'application $t \longmapsto \mathcal{U}_t x$ est continue de $\mathbf{R}_+$ dans $\mathcal{H}$.*

On dira que le semigroupe est borné *si de plus $\|\mathcal{U}_t\| \leq 1$ pour tout $t \geq 0$.*

1) Dans cette question, d est un entier naturel non nul fixé et on considère une matrice A *positive* de $\mathcal{M}_d(\mathbf{R})$. Pour tout $t \geq 0$, on pose $U_t = \mathrm{e}^{-tA}$.

a) Montrer que la famille $U = \{U_t,\ t \geq 0\}$ est un semigroupe borné sur $\mathbf{R}^d$.

b) Soit $x \in \mathbf{R}^d$. Montrer que $\lim\limits_{\substack{t \longrightarrow 0 \\ t>0}} \dfrac{U_t x - x}{t} = -Ax$.

Pour la suite du problème, lorsque $\mathcal{H}$ est un espace de Hilbert (de dimension finie ou infinie) et $\mathcal{U}$ un semigroupe borné sur $\mathcal{H}$, on note

$$D(\mathcal{A}) = \left\{ x \in \mathcal{H} \mid \lim_{\substack{t \longrightarrow 0 \\ t>0}} \frac{\mathcal{U}_t x - x}{t} \ \textit{existe} \right\} \subset \mathcal{H}.$$

Pour tout $x \in D(\mathcal{A})$, on définit une application $\mathcal{A} : D(\mathcal{A}) \longrightarrow \mathcal{H}$, appelée générateur *de $\mathcal{U}$, par*

$$\mathcal{A}x = -\lim_{\substack{t \longrightarrow 0 \\ t>0}} \frac{\mathcal{U}_t x - x}{t}.$$

On admettra que $\mathcal{A}$ est un opérateur. Dans la suite du problème, on notera parfois $\mathcal{U}_t = e^{-t\mathcal{A}}$.

2) Soit $\{\mathcal{U}_t,\ t \geq 0\}$ et $\mathcal{A}$ son générateur.

a) Montrer que, pour tous $s \geq 0$ et $x \in D(\mathcal{A})$, on a $\mathcal{U}_s x \in D(\mathcal{A})$.

b) Montrer que, pour tout $s \geq 0$ et $x \in D(\mathcal{A})$, on a $\mathcal{A}\mathcal{U}_s x = \mathcal{U}_s \mathcal{A} x$.

3) **Premier exemple.** On considère dans cette question $\mathcal{H} = \ell^2(\mathbf{N},\mathbf{R})$ et, pour tous $t \geq 0$ et $u = (u_n)_{n\in\mathbf{N}} \in \mathcal{H}$, on pose

$$\mathcal{W}_t u = (\mathrm{e}^{-tn^2} u_n)_{n\in\mathbf{N}}.$$

a) Montrer que $\mathcal{W} = \{\mathcal{W}_t,\ t \geq 0\}$ est un semigroupe sur $\mathcal{H}$.

b) Montrer que la fonction θ, définie pour $x > 0$ par $\theta(x) = \frac{\mathrm{e}^{-x}-1+x}{x}$ et par $\theta(0) = 0$, est bornée et continue sur $\mathbf{R}_+$.

c) Déterminer le générateur $\mathcal{A}$ de ce semigroupe et montrer que

$$D(\mathcal{A}) = \left\{ u \in \mathcal{H} \mid \sum n^4 u_n^2 < \infty \right\}.$$

4) **Second exemple.** On considère l'espace de Lebesgue $\mathcal{H} = L^2(\mathbf{R})$. On pose pour toute fonction $f \in L^2(\mathbf{R})$ et tous $t \geq 0$ et $x \in \mathbf{R}$,

$$\mathcal{U}_t f(x) = f(x+t).$$

a) Montrer que, pour tout $t \geq 0$, $\mathcal{U}_t \in \mathcal{L}(\mathcal{H}, \mathcal{H})$ et $\|\mathcal{U}_t f\| = \|f\|$ pour tout $f \in L^2(\mathbf{R})$.

b) Soit ϕ une fonction continue à support compact. Montrer que la fonction $t \longmapsto \mathcal{U}_t \phi$ est continue de $\mathbf{R}^+$ dans $L^2(\mathbf{R})$.

c) En utilisant la question précédente, montrer que la famille $\mathcal{U} = \{\mathcal{U}_t,\ t \geq 0\}$ est un semigroupe, dont on notera $\mathcal{A}$ son générateur et $D(\mathcal{A})$ son domaine.

d) Montrer que, pour toute fonction $f \in \mathcal{C}^1(\mathbf{R})$ à support compact, on a $f \in D(\mathcal{A})$ et $\mathcal{A}f = -f'$.

5) **Troisième exemple.** On considère de nouveau l'espace de Lebesgue $\mathcal{H} = L^2(\mathbf{R})$, et on considère une fonction $\psi : \mathbf{R} \longrightarrow \mathbf{R}$ définie par $\psi(x) = x$ si $x \leq 0$ et $\psi(x) = 2x$ si $x \geq 0$. On pose pour toute fonction $f \in L^2(\mathbf{R})$ et $t \geq 0$ et $x \in \mathbf{R}$, $\mathcal{V}_t f(x) = f(\psi(\psi^{-1}(x) - t))$.

a) Montrer que, pour toute fonction $f \in L^2(\mathbf{R})$ et tout réel $t \geq 0$, on a $\mathcal{V}_t f \in L^2(\mathbf{R})$ et $\|\mathcal{V}_t f\| \leq 2\,\|f\|$.

b) Montrer que la famille $\mathcal{V} = \{\mathcal{V}_t,\ t \geq 0\}$ est un semigroupe.

c) Soit $f \in \mathcal{C}^1(\mathbf{R})$. Montrer que, pour presque tout $x \in \mathbf{R}^*$, on a

$$\lim_{\substack{t \to 0 \\ t>0}} \frac{\mathcal{V}_t f(x) - f(x)}{t} = -\psi'(x) f'(x).$$

6) On définit la fonction caractéristique $\chi_{\mathcal{I}}$ d'un ensemble $\mathcal{I}$ de $\mathbf{R}$ par $\chi_{\mathcal{I}}(x) = 1$ si $x \in \mathcal{I}$, et $\chi_{\mathcal{I}}(x) = 0$ si $x \notin \mathcal{I}$. On considère les semigroupes $\mathcal{U}$ et $\mathcal{V}$ sur $\mathcal{H} = L^2(\mathbf{R})$ donnés par le second et le troisième exemples. On pose enfin pour tout $h > 0$, $f_h = \chi_{[-h,0]}$.

a) Montrer que, pour tous $h > 0$ et $n \in \mathbf{N}^*$, on a $(\mathcal{U}_h \circ \mathcal{V}_h)^n f_h = \chi_{[-h,nh]}$.

b) Pour $h > 0$, montrer que $\|(\mathcal{U}_h \circ \mathcal{V}_h)^n f_h\| = \sqrt{n+1}\,\|f_h\|$.

c) En déduire que $(\mathcal{U}_{t/n} \circ \mathcal{V}_{t/n})^n$ ne converge pas dans $\mathcal{L}(L^2(\mathbf{R}), L^2(\mathbf{R}))$.

PARTIE IV : Borne inférieure dans la formule de Trotter-Kato

L'objectif de cette partie est d'obtenir une borne inférieure pour la vitesse de convergence dans la formule de Trotter-Kato pour les opérateurs, en construisant un exemple.

Plus précisément, pour $\alpha \in]1/2, 1[$ fixé, le but de cette section est de construire un espace de Hilbert $\mathcal{H}$, trois semigroupes sur $\mathcal{H}$, que l'on notera $\{\mathrm{e}^{-t\mathcal{A}},\ t \geq 0\}$, $\{\mathrm{e}^{-t\mathcal{B}}, t \geq 0\}$ et $\{\mathrm{e}^{-t(\mathcal{A}+\mathcal{B})},\ t \geq 0\}$, et leurs générateurs associés tels que la propriété suivante ait lieu :

Pour tout $t \in]0,1]$, il existe deux constantes c_t et $C_t > 0$
telles que pour tout $n \in \mathbf{N}^*$,

$$\frac{c_t}{n^{2\alpha-1}} \leq \left|\left|\left| \left(\mathrm{e}^{-t\mathcal{A}/n} \circ \mathrm{e}^{-t\mathcal{B}/n}\right)^n - \mathrm{e}^{-t(\mathcal{A}+\mathcal{B})} \right|\right|\right| \leq \frac{C_t}{n^{2\alpha-1}}.$$

On se concentrera dans cette partie sur l'inégalité de gauche et on utilisera les notations et définitions relatives aux semigroupes données en début de Partie **III**. Pour toute cette partie, on considère l'espace $\mathcal{H} = \ell^2(\mathbf{N}^*, \mathbf{R}^2)$.

Tournez la page S.V.P.

Pour $(A_n)_{n\in\mathbf{N}^*}$ une suite de matrices dans $\mathcal{M}_2(\mathbf{R})$, on construit un opérateur $\mathcal{A}$ et son domaine $D_{\mathcal{A}} \subset \mathcal{H}$ de la manière suivante : on pose

$$D_{\mathcal{A}} = \{u \in \mathcal{H}, \mid (A_n u_n)_{n\in\mathbf{N}^*} \in \mathcal{H}\}$$

et pour tout $u = (u_n)_{n\in\mathbf{N}^*} \in D_{\mathcal{A}}$ on pose $\mathcal{A}u = (A_n u_n)_{n\in\mathbf{N}^*}$. Pour une seconde suite de matrices $(B_n)_{n\in\mathbf{N}^*}$ de $\mathcal{M}_2(\mathbf{R})$, on construit de même un opérateur $\mathcal{B}$ et son domaine $D_{\mathcal{B}}$; on a donc $\mathcal{B}u = (B_n u_n)_{n\in\mathbf{N}^*}$. On construit enfin l'opérateur $\mathcal{A}+\mathcal{B}$ et son domaine $D_{\mathcal{A}+\mathcal{B}}$, associés de la même manière à la suite $(A_n + B_n)_{n\in\mathbf{N}^*}$ de matrices de $\mathcal{M}_2(\mathbf{R})$.

1) Montrer l'inclusion $D_{\mathcal{A}} \cap D_{\mathcal{B}} \subset D_{\mathcal{A}+\mathcal{B}}$ puis que $D_{\mathcal{A}} \cap D_{\mathcal{B}}$ est dense dans $\mathcal{H}$.

2) On suppose que, pour tout $n \in \mathbf{N}^*$, A_n est positive et, pour tous $u \in \mathcal{H}$ et $t \geq 0$, on définit

$$\mathcal{U}_t u = (\mathrm{e}^{-tA_n} u_n)_{n\in\mathbf{N}^*}.$$

a) Montrer que la famille $\{\mathcal{U}_t, t \geq 0\}$ est un semigroupe.

b) Montrer que $\mathcal{A}$ est le générateur de ce semigroupe, et que $D(\mathcal{A}) = D_{\mathcal{A}}$.

On étudie maintenant un exemple. On considère les matrices I, J et K données dans la question **I**-*4) et on prend $\alpha \in]1/2, 1[$ et $a \in]0, 1[$. On pose pour tout $n \in \mathbf{N}^*$*

$$\varepsilon_n = 2(2n)^{-2\alpha}, \qquad \theta_n = \arccos(1 - \varepsilon_n), \qquad \lambda = \left(\frac{2}{a^2}\right)^{\frac{1}{2\alpha}}$$

et on construit les matrices dans $\mathcal{M}_2(\mathbf{R})$ suivantes :

$$A_n = \lambda(I + n(J + I)), \qquad B_n = n(I + \cos(\theta_n)J + \sin(\theta_n)K).$$

On considère enfin les opérateurs, domaines et semigroupes associés suivant la procédure expliquée au début de cette partie.

3) On va établir certaines propriétés des opérateurs $\mathcal{A}$ et $\mathcal{B}$.

a) Montrer que, pour tout $u \in D(\mathcal{A})$, on a $\langle \mathcal{A}u, u\rangle = \langle u, \mathcal{A}u\rangle \geq \|u\|^2$.

b) Montrer que, pour tout $n \in \mathbf{N}^*$, il existe une matrice P_n orthogonale, que l'on déterminera, telle que $B_n = P_n \begin{pmatrix} 2n & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} P_n^{-1}$. En deduire que, pour tout $u \in D(\mathcal{B})$, on a $\langle \mathcal{B}u, u\rangle = \langle u, \mathcal{B}u\rangle \geq 0$.

Pour toute la fin du problème, on définit les opérateurs $\mathcal{A}^\alpha$, $\mathcal{B}^\alpha$ et $(\mathcal{A}+\mathcal{B})^\alpha$ par

$$\mathcal{A}^\alpha u = (A_n^\alpha u_n), \qquad \mathcal{B}^\alpha u = (B_n^\alpha u_n), \qquad (\mathcal{A}+\mathcal{B})^\alpha u = ((A+B)_n^\alpha u_n)$$

pour tout $u \in \mathcal{H}$. D'après la question **IV**-*2-b), leurs domaines respectifs sont donc $D(\mathcal{A}^\alpha) = D_{\mathcal{A}^\alpha}$, $D(\mathcal{B}^\alpha) = D_{\mathcal{B}^\alpha}$ et $D((\mathcal{A}+\mathcal{B})^\alpha) = D_{(\mathcal{A}+\mathcal{B})^\alpha}$.*

4) On va établir certaines propriétés des opérateurs $\mathcal{A}^\alpha$ et $\mathcal{B}^\alpha$.

a) Montrer que, pour tous $n \in \mathbf{N}^*$ et $u \in \mathcal{H}$, on a $\|B_n^\alpha u_n\|_2 \leq a \|A_n^\alpha u_n\|_2$.

b) En déduire que $D(\mathcal{A}^\alpha) \subset D(\mathcal{B}^\alpha)$ et que pour toute suite $u \in D(\mathcal{A}^\alpha)$ on a $\|\mathcal{B}^\alpha u\| \leq a \|\mathcal{A}^\alpha u\|$.

Dans les questions suivantes, on pourra utiliser les résultats de la Partie **I**.

5) Montrer que, pour tout $n \in \mathbf{N}^*$,

$$A_n + B_n = a_n I + b_n\Big(\cos(\phi_n)J + \sin(\phi_n)K\Big) = Q_n \begin{pmatrix} a_n + b_n & 0 \\ 0 & a_n - b_n \end{pmatrix} Q_n^{-1}$$

où $a_n = \lambda + n + \lambda n$ et $b_n = n\sqrt{\lambda^2 + 2\lambda\cos(\theta_n) + 1}$, $\tan(\phi_n) = \sin(\theta_n)/(\lambda + \cos(\theta_n))$ avec $\phi_n \in]0, \pi/2[$ et où Q_n est une matrice orthogonale.

Pour la suite, on note $\{e^{-t\mathcal{A}}, t \geq 0\}$ le semigroupe associé à l'opérateur $\mathcal{A}$ suivant la procédure étudiée dans la question **IV**-*2). De même on note $\{e^{-t\mathcal{B}}, t \geq 0\}$ et $\{e^{-t(\mathcal{A}+\mathcal{B})}, t \geq 0\}$ les semigroupes respectivement associés aux opérateurs $\mathcal{B}$ et $\mathcal{A} + \mathcal{B}$ suivant la même procédure.*

6) Montrer que, pour tous $n \in \mathbf{N}^*$ et $t \geq 0$, on a

$$\left|\!\left|\!\left| \left(\mathrm{e}^{-t\mathcal{A}/n} \circ \mathrm{e}^{-t\mathcal{B}/n}\right)^n - \mathrm{e}^{-t(\mathcal{A}+\mathcal{B})} \right|\!\right|\!\right| \geq \frac{1}{2}\left|\mathrm{Tr}\left(\left(\mathrm{e}^{-tA_n/n}\mathrm{e}^{-tB_n/n}\right)^n\right) - \mathrm{Tr}\left(\mathrm{e}^{-t(A_n+B_n)}\right)\right|.$$

7) On étudie dans cette question le terme $\mathrm{Tr}(\mathrm{e}^{-t(A_n+B_n)})$ pour $t > 0$ fixé considéré comme paramètre.

a) Montrer que, pour tout $n \in \mathbf{N}^*$, on a $\mathrm{Tr}\left(\mathrm{e}^{-t(A_n+B_n)}\right) = 2\mathrm{e}^{-ta_n}\mathrm{ch}(tb_n)$.

b) Montrer que $tb_n = tn(\lambda + 1) - \frac{t\lambda}{\lambda+1} n\varepsilon_n + \mathcal{O}(n\varepsilon_n^2)$.

c) En déduire que

$$\mathrm{Tr}\left(\mathrm{e}^{-t(A_n+B_n)}\right) = \mathrm{e}^{-\lambda t}\left(1 - \frac{t\lambda}{\lambda+1} n\varepsilon_n + \mathcal{O}(n\varepsilon_n^2)\right).$$

8) On étudie dans cette question le terme $\mathrm{Tr}\left(\left(\mathrm{e}^{-tA_n/n}\mathrm{e}^{-tB_n/n}\right)^n\right)$ pour $t > 0$ fixé considéré de nouveau comme paramètre. On pose, pour tout $n \in \mathbf{N}^*$,

$$\begin{aligned} c_n &= \mathrm{ch}(t\lambda)\mathrm{ch}(t) + \mathrm{sh}(t\lambda)\mathrm{sh}(t)\cos\theta_n, \\ d_n &= \mathrm{sh}(t\lambda)\mathrm{ch}(t) + \mathrm{ch}(t\lambda)\mathrm{sh}(t)\cos\theta_n, \\ e_n &= \mathrm{sh}(t)\sin\theta_n. \end{aligned}$$

Soit $n \in \mathbf{N}^*$.

a) Montrer que

$$\begin{aligned} \mathrm{Tr}\left(\left(\mathrm{e}^{-tA_n/n}\mathrm{e}^{-tB_n/n}\right)^n\right) &= \mathrm{Tr}\left(\left(\mathrm{e}^{-tA_n/(2n)}\mathrm{e}^{-tB_n/n}\mathrm{e}^{-tA_n/(2n)}\right)^n\right) \\ &= \mathrm{e}^{-ta_n}\mathrm{Tr}\left(\left(\mathrm{e}^{-t\lambda J/2}\mathrm{e}^{-t(\cos(\theta_n)J+\sin(\theta_n)K)}\mathrm{e}^{-t\lambda J/2}\right)^n\right). \end{aligned}$$

b) En utilisant les calculs de la Partie **I**, en déduire que

$$\mathrm{Tr}\left(\left(\mathrm{e}^{-tA_n/n}\mathrm{e}^{-tB_n/n}\right)^n\right) = \mathrm{e}^{-ta_n}\mathrm{Tr}\left((c_n I - d_n J - e_n K)^n\right).$$

c) Montrer que $c_n^2 - d_n^2 - e_n^2 = 1$ et en déduire qu'il existe deux réels positifs Θ_n et k_n tels que $c_n = \mathrm{ch}k_n$, $d_n = \mathrm{sh}k_n\cos\Theta_n$ et $e_n = \mathrm{sh}k_n\sin\Theta_n$ avec

$$k_n = t(\lambda + 1) - \frac{\mathrm{sh}(t\lambda)\mathrm{sh}(t)}{\mathrm{sh}(t(\lambda+1))}\varepsilon_n + \mathcal{O}(\varepsilon_n^2).$$

d) En utilisant la question **I**-4), montrer que

$$\mathrm{Tr}\left(\mathrm{e}^{-tA_n/n}\mathrm{e}^{-tB_n/n}\right)^n = 2\mathrm{e}^{-ta_n}\mathrm{ch}(nk_n).$$

Tournez la page S.V.P.

c) En déduire que

$$\operatorname{Tr}\left(\mathrm{e}^{-tA_n/n}\mathrm{e}^{-tB_n/n}\right)^n = \mathrm{e}^{-t\lambda}\left(1 - \frac{\operatorname{sh}(t\lambda)\operatorname{sh}(t)}{\operatorname{sh}(t(\lambda+1))}n\varepsilon_n + \mathcal{O}(n\varepsilon_n^2)\right).$$

9) Déduire des trois questions précédentes que, pour tout $t \in]0,1]$, il existe une constante $c_t > 0$ telle que pour tout $n \in \mathbf{N}^*$,

$$\left|\!\left|\!\left|\left(\mathrm{e}^{-t\mathcal{A}/n} \circ \mathrm{e}^{-t\mathcal{B}/n}\right)^n - \mathrm{e}^{-t(\mathcal{A}+\mathcal{B})}\right|\!\right|\!\right| \geq \frac{c_t}{n^{2\alpha-1}}.$$