Agrégation 2016 : mathématiques générales.

I Espace vectoriel simplectique.

1.

$$\begin{aligned}
{}^tXMY &= \begin{pmatrix} x_1 & \cdots & x_m \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \omega(e_1,e_1) & \cdots & \omega(e_1,e_m) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \omega(e_m,e_1) & \cdots & \omega(e_m,e_m) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_m \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} x_1 & \cdots & x_m \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1\omega(e_1,e_1) + \cdots + y_m\omega(e_1,e_m) \\ \vdots \\ y_1\omega(e_m,e_1) + \cdots + y_m\omega(e_m,e_m) \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

Par linéarité à droite :

$$\begin{aligned}
{}^tXMY &= \begin{pmatrix} x_1 & \cdots & x_m \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \omega(e_1,y_1e_1 + \ldots y_me_m) \\ \vdots \\ \omega(e_m,y_1e_1 + \cdots + y_me_m) \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} x_1 & \cdots & x_m \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \omega(e_1,y) \\ \vdots \\ \omega(e_m,y) \end{pmatrix} \\
&= (x_1\omega(e_1,y) + \cdots + x_m\omega(e_m,y))
\end{aligned}$$

Par linéarité à gauche :

$$\begin{aligned}
{}^tXMY &= (\omega(x_1e_1 + \cdots + x_me_m,y)) \\
&= (\omega(x,y))
\end{aligned}$$

2. Notons (i), (ii) et (iii) les trois propositions dont nous devons établir l'équivalence.

   (a) Montrons que (i) $\Leftrightarrow$ (iii).

   Notons $\psi : \left\{ \begin{array}{ccc} E & \to & E^* \\ x & \mapsto & \left\{ \begin{array}{ccc} E & \to & \mathbb{R} \\ y & \mapsto & \omega(x,y) \end{array} \right. \end{array} \right.$.

   ψ est une application $\mathbb{R}$-linéaire entre suex espaces vectoriels de même dimension finie m, dont le noyau est $\ker(\psi) = N_E$.

Nous avons donc les équivalences :

$$\begin{aligned}
\omega \text{ non-dégénérée} &\Leftrightarrow N_E = \{0_E\} \\
&\Leftrightarrow \ker(\psi) = \{0_E\} \\
&\Leftrightarrow \psi \text{ injective} \\
&\Leftrightarrow \psi \text{ bijective} \\
&\Leftrightarrow \forall f \in E^*,\ \exists! x \in E,\ \forall y \in E,\ \omega(x,y) = f(y)
\end{aligned}$$

(b) Montrons que (i) $\Leftrightarrow$ (ii).

$$\begin{aligned}
\omega \text{ non-dégénérée} &\Leftrightarrow N_E = \{0_E\} \\
&\Leftrightarrow \left\{X \in \mathcal{M}_{m,1}(\mathbb{R}) | \forall Y \in \mathcal{M}_{m,1}(\mathbb{R}) n\ {}^tXMY = 0\right\} \\
&\Leftrightarrow \left[\forall X \in \mathcal{M}_{m,1}(\mathbb{R}),\ \left(\forall Y \in \mathcal{M}_{m,1}(\mathbb{R}), {}^tXMY = 0\right) \Rightarrow X = 0\right] \\
&\Leftrightarrow \left[\forall X \in (\mathbb{R}),\ {}^tXM = 0 \Rightarrow X = 0\right] \\
&\Leftrightarrow {}^tM \text{ est inversible} \\
&\Leftrightarrow M \text{ est inversible}
\end{aligned}$$

3. (a) Montrons que ω_0 est antisymétrique.

$$\begin{aligned}
\omega(x,y) &= {}^tXJY \\
&= {}^t\left({}^tXJY\right) \\
&= {}^tY{}^tJ{}^t({}^tX)
\end{aligned}$$

Or J est antisymétrique, donc

$$\begin{aligned}
&= {}^tY(-J)X \\
&= -{}^tYJX \\
&= -\omega(y,x)
\end{aligned}$$

Deuxième présentation.

Travaillons avec les matrices par blocs : soit $X = \begin{pmatrix} X_1 \\ X_2 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{2n,1}$ avec

$(X_1,X_2) \in (\mathcal{M}_{n,1})^2$ et $Y = \begin{pmatrix} Y_1 \\ Y_2 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{2n,1}$ avec $(Y_1,Y_2) \in (\mathcal{M}_{n,1})^2$.

$$\begin{aligned} {}^tXMY &= (X_1X_2)\begin{pmatrix} 0 & I_n \\ -I_n & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} Y_1 \\ Y_2 \end{pmatrix} \\ &= (X_1X_2)\begin{pmatrix} Y_2 \\ -Y_1 \end{pmatrix} \\ &= X_1Y_2 - X_2Y_1 \end{aligned}$$

Par permutation sur les lettres : ${}^tYMX = Y_1X_2 - Y_2X_1$. Et donc : ${}^tYMX = {}^tXMY$.

(b) D'après la question précédente ω_0 est non dégénérée si et seulement si J est inversible . Or $\det J = \det(0) \times \det(0) - \det(-I_n)\det(I_n) = (-1)^{n+1}\det(I_n)^2 = (-1)^{n+1} \neq 0$, donc J et inversible et ω_0 est non-dégénérée.

4. * Il est clair du fait de la linéarité de ω par rapport à la deuxième variable que F° est un sous espace vectoriel de E.

Considérons $\psi : \left\{ \begin{array}{ccc} E & \to & F^* \\ x & \mapsto & \left\{ \begin{array}{ccc} F & \to & \mathbb{R} \\ y & \mapsto & \omega(x,y) \end{array} \right. \end{array} \right.$.

ψ est une application $\mathbb{R}$-linéaire dont le noyau est F°. Les espaces considérés étant de dimension finie

$$\dim(E) = \dim(F^*) + \dim(\ker(\psi))$$

Or $\dim(F^*) = \dim(F)$ et $\ker(\psi) = F^\circ$ donc

$$\dim F^\circ = \dim E - \dim F$$

*

5. La restriction, $\tilde{\omega}$ de ω à $F \times F$ est évidement une forme bilinéaire anti-symétrique. Il faut donc montrer que $\tilde{\omega}$ est non-dégénérée si et seulement si $F \oplus F^\circ = E$.

Procédons par conditions nécessaires et suffisantes.

* Supposons que $\tilde{\omega}$ est non dégénérée et démontrons qu'alors $F \oplus F^\circ = E$.

D'après la question 4. $\dim(F) + \dim(F^\circ = \dim(E)$, donc : $F \oplus F^\circ = E \Leftrightarrow F \cap F^\circ = \{0_E\}$.

Montrons donc $F \cap F^\circ = \{0_E\}$.

Soit $x_0 \in F \cap F^\circ$.
Si $x_0 \in F^\circ$ alors $\forall y \in F, \omega(x,y) = 0$.
Par conséquent $x_0 \in N_F = \{x \in F | \forall y \in F,\ \omega(x,y) = 0\}$. Mais comme $\tilde{\omega}$ est non-dégénérée $N_F = \{0_E\}$ et donc $x_0 = 0_E$.
Donc $F \cap F^\circ = \{0_E\}$ et donc $F \oplus F^\circ = E$.

* Supposons que $F \oplus F^\circ = E$ et démontrons qu'alors $\tilde{\omega}$ est non dégénérée.

  Nous avons établi lors de la question 2. que $\tilde{\omega}$ est non-dégénérée si et seulement si $\tilde{\psi} : \left\{ \begin{array}{ccc} F & \to & F^* \\ x & \mapsto & \tilde{\omega}(x,\cdot) \end{array} \right.$ est un isomorphisme.

  Comme F et F^* sont de dimensions finies pour démontrer que $\tilde{\psi}$ est un isomorphisem il suffit de démontrer que son noyau est réduit à 0_E. Pour cela nous allons démontrer que $\ker(\psi) \subset F \cap F^* = \{0_E\}$.

  . Par définition du noyau $\ker(\psi) \subset F$.

  . $\ker(\psi) = \{x \in F | \forall y \in F,\ \tilde{\omega}(x,y) = 0\} \subset \{x \in E | \forall y \in F,\ \omega(x,y) = 0\} = F^\circ$.

6. (a) ω est clairement une forme bilinéaire de $E \times E$ dans $\mathbb{R}$ du fait de la bilinéarité du produit scalaire et de la linéarité de u.

   * Démontrons que ω est anti-symétrique.
     Soit $(x,y) \in E^2$.

$$\begin{aligned} \omega(x,y) &= \langle x | u(y) \rangle \\ &= \langle x | -u^*(y) \rangle \end{aligned}$$

     Par bilinéarité du produit scalaire

$$\omega(x,y) = -\langle x | u^*(y) \rangle$$

     Par définiton de l'adjoint

$$\omega(x,y) = -\langle u(x) | y \rangle$$

     Par symétrie du produit scalaire

$$\begin{aligned} \omega(x,y) &= -\langle y | u(x) \rangle \\ &= -\omega(y,x) \end{aligned}$$

* Démontrons maintenant que ω est non-dégénérée.
  E étant de dimension finie il est existe une base e orthonormale pour le produit scalaire $\langle\cdot|\cdot\rangle$. Notons M la matrice de u dans cette base e. En confondant $\mathbb{R}$ et $\mathcal{M}_1(\mathbb{R})$ nous pouvons écrire :

$$\begin{aligned}\omega(x,y) &= \langle x|u(y)\rangle \\ &= {}^tX(MY) \\ &= {}^tXMY\end{aligned}$$

  Ainsi M est la matrice de la forme bilinéaire ω dans la base e.
  Comme, par hypothèse, u est inversible, M l'est aussi. Par conséquent (question I.2.) ω est non dégénérée.

(b) Réciproquement, soit ω une forme symplectique sur E. Expliquer qu'il existe un unique endomorphisme u de E tel que pour tout $(x,y) \in E^2$, $\omega(x,y) = \langle x|u(y)\rangle$. Démontrer que $u^* = -u$ et que u est inversible. en déduire que m est paire.

(c) On reprend l'exemple de la question 3 et on munit E_0 du produit scalaire canonique. Montrer que pour tout $(x,y) \in E_0^2$, $\omega_0(x,y) = \langle x|Jy\rangle$ et $\langle x|y\rangle = \omega_0(Jx,y)$. Et expliquer que pour tout sous-espace vectoriel F, $F^\circ = JF^\perp$ (où $F^\perp$ désigne l'orthogonal pour le produit scalaire).

On considère désormais une forme symplectique ω fixée sur un espace de dimension $m = 2n$.

7. Montrer qu'il existe une base $\mathcal{B} = (e_1,\ldots,e_n,f_1,\ldots,f_n)$ de E telle que pour tout $(i,j) \in [\![1,n]\!]^2$:
$$\begin{cases} \omega(e_i,e_j) = \omega(f_i,f_j) = 0 \\ \omega(e_i,f_j) = \delta_{i,j} \end{cases}$$
   On pourra procéder par récurrence.
   Dans une telle base $\mathcal{B}$, quelle est la matrice de la forme bilinéaire ω ?

Ainsi tout espace vectoriel symplectique peut se ramener (via un choix de base approprié) au modèle (E_0,ω_0) défini à la question 3.

Groupe symplectique réel.

Soit $v \in \mathcal{L}(E)$. on dit que v est un ***endomorphisme symplectique*** s'il préserve ω, c'est-à-dire si pour tout $(x,y) \in E^2$, $\omega(v(x),v(y)) = \omega(x,y)$.

1. On considère une base adaptée $\mathcal{B}$ vérifiant les propriétés de la question I.7 et note $M = Mat_{\mathcal{B}}(v)$.
   Montrer que v est un endomorphisme simplectique si et seulement si ${}^tMJM = J$.

On note $\mathrm{Sp}(2n)$ l'ensemble des matrices ***symplectiques réelles*** :

$$\mathrm{Sp}(2n) = \{M \in \mathcal{M}_{2n}(\mathbb{R}) | {}^tMJM = J\}$$

2. Montrer que $\mathrm{Sp}(2n)$ est un sous-groupe de $\mathcal{M}_{2n}(\mathbb{R})$ stable par la transposée.
3. Soit $M \in \mathrm{Sp}(2n)$. Montrer que pour toute racine complexe $\lambda \in \mathbb{C}$ du polynôme caractéristique P_M, $\overline{\lambda}$ et $\frac{1}{\lambda}$ sont également racines de P_M, avec la même multiplicité.
4. Soit $M \in \mathcal{M}_{2N}(\mathbb{R})$. Montrer l'équivalence entre
   - $M \in \mathrm{Sp}(2n) \cap \mathrm{O}(2n)$.
   - $M \in \mathrm{Sp}(2n)$ et $MJ = JM$.
   - $M \in \mathrm{O}(2n)$ et $MJ = JM$.

On note $G = \mathrm{Sp}(2n) \cap \mathrm{O}(2N)$.

5. Montrer que G est un sous-groupe compact de $O(2N)$.
6. Pour toute matrice $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$, on écrit $M = A+iB$ avec $(A,B) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})^2$. On lui associe alors $i_r(M) = M_r = \begin{pmatrix} A & -B \\ B & A \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{2n}(\mathbb{R})$.
   (a) Montrer que pour tout $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$, $\det(M_r) = |\det M)|^2$.
   (b) Pour tout e matrice $N \in \mathcal{M}_{2n}(\mathbb{R})$, montrer l'équivalence entre :
   - $N \in G = \mathrm{Sp}(2n) \cap \mathrm{O}(2n)$
   - il existe $M \in \mathbb{U}(n)$ telle que $N = i_r(M)$.

   (c) En déduire que i_r restreinte à $\mathbb{U}(n)$ définit un isomorphisme de groupes et un homéomorphisme de $\mathbb{U}(n)$ sur G.
   On notera $i_c : G \to \mathbb{U}(n)$ la bijection réciproque.

Ainsi, en identifiant les matrices $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ et leurs images par i_r, on écrit :

$$\mathbb{U}(n) == G = \mathrm{Sp}(2n) \cap \mathrm{O}(2n).$$

Pour toute matrice $M \in \mathcal{M}_{2n}(\mathbb{R})$ symétrique définie positive, on rappelle l'existence et l'unicité d'une matrice définie positive A telle que $A^2 = M$; on appellera A la racine carrée de M et on notera $A = M^{\frac{1}{2}}$.

On rappelle également que pour tout $M \in \mathrm{GL}_{2n}(\mathbb{R})$, il existe un unique couple $(S,W) \in \mathcal{S}_{2n}^{++}(\mathbb{R}) \times \mathrm{O}(2n)$ tel que $M = SW$ avec $S = (M^tM)^{\frac{1}{2}}$ et $W = (M^tM)^{-\frac{1}{2}}M$. Cette décomposition est appelée décomposition polaire et l'application $M \mapsto (S,W)$ ainsi définie sur $\mathrm{GL}_{2n}(\mathbb{R})$ est continue.

7. (a) Montrer que la racine carrée d'une matrice symplectique, symétrique, définie positive est encore une matrice symplectique. en déduire que pour tout $M \in \mathrm{Sp}(2n)$, si on note $M = SW$ sa décomposition polaire, alors S et W sont des matrices symplectiques.

(b) Montrer que $\mathrm{Sp}(2n) \cap \mathcal{S}_{2n}^{++}(\mathbb{R})$ est connexe par arcs et en déduire que $\mathrm{Sp}(2n)$ est connexe par arcs. *On rappelle que* $\mathbb{U}(n)$ *est connexe par arcs.*

8. On souhaite décrire les sous-groupe compacts maximaux de $\mathrm{Sp}(2n)$. pour cela, on considère H un sous-groupe compact de $\mathrm{Sp}(2n)$. On va démontrer qu'il est conjugué à un sous-groupe de G.

   On admet dans cette question l'existence, l'existence sur le sous-groupe H d'une mesure borélienne finie non nulle, que l'on notera μ, invariante par translation, c'est-à-dire elle vérifie que pour tout borélien $B \subset H$, pour tout $g \in H$, $\mu(Bg) = \mu(B)$.

   (a) Pour tout $(x,y) \in E_0^2$, on pose

   $$\langle x|y\rangle_H = \frac{1}{\mu(H)} \int_H \langle gx|gy\rangle \, \mathrm{d}\mu(g).$$

   Expliquer que $\langle\cdot|\cdot\rangle_H$ définit un produit scalaire sur E_0 invariant par tous les éléments de H.

   (b) On note S la matrice de ce produit scalaire dans la base canonique. Expliquer que $S \in \mathcal{S}_{2n}^{++}$ et que pour tout $M \in H$, ${}^tMSM = S$.

   (c) Démontrer que l'endomorphisme canoniquement associé à la matrice $T = S^{-1}J$ est antisymétrique pour le produit scalaire $\langle\cdot|\cdot\rangle_H$ et que T commute avec tous les éléments de H.

   (d) Démontrer que l'endomorphisme associé à $-T^2$ est symétrique défini positif pour le produit scalaire $\langle\cdot|\cdot\rangle_H$. En déduire l'existence d'une matrice R telle que $R^2 = -T^2$ et ${}^tRS = SR$.

   Vérifier qu'elle commute avec tous les éléments de H et avec T.

   (e) En déduire l'existence d'une matrice $S_0 \in \mathcal{S}_{2n}^{++}$ symétrique, définie positive telle que $S_0 \in \mathrm{Sp}(2n)$ et pour tout $M \in H$, ${}^tMS_0M = S_0$.

   (f) Conclure sur la nature des sous-groupes compacts maximaux de $\mathrm{SP}(2n)$.

9. *Structures de sous-variétés de* $\mathrm{Sp}(2n)$ *:*

   On considère l'application $\xi : \left\{ \begin{array}{lll} \mathcal{M}_{2n}(\mathbb{R}) & \to & \mathcal{A}_{2n}(\mathbb{R}) \\ M & \mapsto & {}^tMJM \end{array} \right.$.

   (a) Démontrer que ξ est une application de classe $\mathcal{C}^\infty$ et calculer la différentielle $\mathrm{d}\xi_{|M}$ en un point $M \in \mathcal{M}_{2n}(\mathbb{R})$.

   (b) Décrire le noyau de la différentielle $\mathrm{d}\xi_{|M}$ et montrer que celle-ci est surjective de $\mathcal{M}_{2n}(\mathbb{R})$ sur $\mathcal{A}_{2n}(\mathbb{R})$.

   (c) Montrer que $\mathrm{Sp}(2n)$ est une sous-variété de $\mathcal{M}_{2n}(\mathbb{R})$. Décrire l'espace tangent à I_{2n}, puis en tout point. Quelle est la dimension de $\mathrm{Sp}(2n)$.

II Espaces lagrangiens.

Soit ω une forme symplectique fixée sur E.

On dit qu'un sous-espace vectoriel F est ***isotrope*** (resp. ***lagrangien***) si $F \subset F^\circ$ (resp. $F = F^\circ$).

1. Soit F un sous-espace vectoriel isotrope. Montrer l'équivalence entre :
   - F est lagrangien.
   - F est istrope maximal au sens de l'inclusion.
   - $\dim E = 2 \dim F$.
2. On dit que deux espaces lagrangiens L et L' sont transverses si $L \cap L' = \{0_E\}$. Expliquer que dans ce cas $L \oplus L' = E$. Démontrer que pour tout sous-espace lagrangien L, il existe un sous-espace lagrangien transverse L'.
3. Soient L et L' deux sous-espace lagrangiens transverses (on notera $2n = \dim E$).
   (a) Monter que $\sigma_{L,L'} : \left\{ \begin{array}{lcl} L & \to & L'^* \\ x & \mapsto & \sigma_{L,L'}(x) = \left\{ \begin{array}{lcl} L' & \to & \mathbb{R} \\ y & \mapsto & \omega(x,y) \end{array} \right. \end{array} \right.$ est un isomorphisme de $\mathbb{R}$-espace vectoriels.
   (b) Montrer qu'il existe pour toute base $(e_1, \dots, e_n)$ de L, une base $(f_1, \dots, f_n)$ de L' qui vérifie : en notant $\mathcal{B} = (e_1, \dots, e_n, f_1, \dots, f_n)$, $Mat_{\mathcal{B}}(\omega) = J$.

On se place sur $E_0 = \mathbb{R}^{2n}$ muni de la structure symplectique ω_0. On note $\mathcal{L}(n)$ l'ensemble des sous-espace vectoriels lagrangiens de E_0.

4. Démontrer que $\left\{ \begin{array}{lcl} \mathrm{Sp}(2n) \times \mathcal{L}(n) & \to & \mathcal{L}(n) \\ (M,L) & \mapsto & ML = \{Mx,\, x \in L\} \end{array} \right.$ définit une action du groupe $\mathrm{Sp}(2n)$ sur $\mathcal{L}(n)$. Expliquer que $\mathrm{Sp}(2n)$ agit transitivement sur les couples de lagrangiens transverses.
5. Soient L_1, L_2 et L_3 trois sous-groupes lagrangiens deux à deux transverses.
   (a) Vérifier que $g_{L_1,L_2,L_3} = \sigma_{L_1,L_2} \circ \sigma^{-1}_{L_1,L_3} \circ \sigma_{L_2,L_3}$ est un ismorphisme de L_2 vers L_2^*.
   (b) Démontrer qu'en posant pour tout $(x,y) \in L_2^2$, $g(x,y) = g_{L_1,L_2,L_3}(x)(y)$, on définit une forme bilinéaire symétrique non dégénérée sur L_2.
   On pourra vérifier que pour tout $(x,y) \in L_2^2$, $g(x,y) = \omega_0(p_1(x),p_3(y))$ où p_1 et p_3 sont les projecteurs associés à la décomposition $E_0 = L_1 \oplus L_3$.
   (c) En notant (r,s) la signature de cette forme g, on pose
   $$\mathrm{sgn}(L_1,L_2,L_3) = r - s.$$
   Vérifier que cette valeur est un entier compris entre $-n$ et n, de même parité que n, et montrer que toutes ces valeurs sont effectivement atteintes (pour des choix appropriés de L_1, L_2 et L_3).

On pourra prendre $L_1 = \mathbb{R}^n \times \{0_{\mathbb{R}^n}\}$, $L_3 = \{0_{\mathbb{R}^n}\} \times \mathbb{R}^n$ et choisir ensuite L_2 de manière appropriée.

6. L'action de groupe définie à la question 4 permet de faire agir $\mathrm{Sp}(2n)$ sur les triplets de sous-espaces lagrangiens (l_1,L_2,L_3) deux à deux transverses (en posant pour tout $M \in \mathrm{Sp}(2n)$, $M \cdot (L_1,L_2,L_3) = (ML_1,ML_2,ML_3)$). Montrer que l'orbite d'un tel triplet (L_1,L_2,L_3) par cette action est l'ensemble des (L_1',L_2',L_3') sous-espaces lagrangiens deux à deux transverses tels que $\mathrm{sgn}(L_1',L_2',L_3') = \mathrm{sgn}(L_1,L_2,L_3)$.

III Indices de Maslov.

Pour tout $M \in \mathrm{Sp}(2n)$, on pose $\rho(M) = \det\left(i_c\left((M^tM)^{-\frac{1}{2}}M\right)\right)$ (avec les notations de la partie **II**).

On rappelle que pour tout chemin continu γ d'un intervalle I de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{U} = \{z \in \mathbb{C},\ |z| = 1\}$ il existe $\theta \in \mathcal{C}^0(I,\mathbb{R})$ un relèvement de γ, c'est-à-dire une application vérifiant pour tout $t \in I$, $\gamma(t) = \mathrm{e}^{2i\pi\theta(t)}$. De plus ce relèvement est uniquement à l'ajout d'une constante de $\mathbb{Z}$ près.

On dit qu'un chemin γ, défini sur $[a,b]$, est fermé si $\gamma(a) = \gamma(b)$.

1. Pour tout chemin $\Gamma : [0,1] \to \mathrm{SP}(2n)$ continu et fermé, expliquer que $\gamma = \rho \circ \Gamma$ est un chemin continu fermé de $[0,1]$ dans $\mathbb{U}$.

On considère θ un relèvement de γ et on définit l'***indice de Maslov*** de Γ : $\mu(\Gamma) = \theta(1) - \theta(0)$.

2. Vérifier que $\mu(\Gamma) \in \mathbb{Z}$ et qu'il est indépendant du relèvement choisi.
3. Pour tout $k \in \mathbb{Z}$, construire un chemin Γ_k continu, fermé de $[0,1]$ dans $\mathrm{Sp}(2n)$, d'indice $\mu(\Gamma_k) = k$.
4. Démontrer que $G = \mathrm{Sp}(2n) \cap \mathrm{O}(2n)$ (isomorphe à $\mathbb{U}(n)$ d'après la question **II**.6) agit lui aussi transitivement sur $\mathcal{L}(n)$ via l'action définie à la question **III**.4.
5. On note $L_0 = \mathbb{R}^n \times \{0\}$.
   (a) Expliquer que $L_0 \in \mathcal{L}(n)$ et caractériser le stabilisateur S_0 de L_0 par l'action de G ci-dessus.
   Expliquer que le groupe S_0 est isomorphe à $\mathrm{O}(n)$.
   (b) Montrer que pour tout $(U_1,U_2) \in \mathbb{U}(n)^2$, $i_r(U_1)L_0 = i_r(U_2)L_0$ si et seulement si $U_1{}^tU_1 = U_2{}^tU_2$.

Ainsi pour tout sous-espace lagrangien L, la quantité $\Lambda_L = U^tU$, où $L = i_r(U)L_0$ ne dépend que de L et pas du choix de U.

6. Pour tout $L \in \mathcal{L}(n)$, on pose $\xi(L) = \det(\Lambda_L)$. Expliquer pour tout $U \in \mathbb{U}(n)$ tel que $L = i_r(U)L_0$, $\xi(L) = \det(U^2)$ et que $\xi(L) \in \mathbb{U}$.

D'après la question 5a on dispose d'un isomorphisme naturel entre $\mathcal{L}(n)$ et $\mathbb{U}/\mathrm{O}(n)$. Cela nous permet de munir $\mathcal{L}(n)$ d'une topologie et de définir ce qu'est un chemin continu Γ dans l'espace $\mathcal{L}(n)$: c'est la donnée d'une application continue V de $[0,1]$ dans $\mathbb{U}(n)$, telle que pour tout $t \in [0,1]$, $\Gamma(t) = i_r\left(V(t)\right) L_0$.

7. Soit Γ un chemin continu fermé de $[0,1]$ dans l'espace $\mathcal{L}(n)$; avec les notations ci-dessus, il vérifie : $\Gamma(0) = i_r\left(V(0)\right) L_0 = i_r\left(V(1)\right) L_0 = \Gamma(1)$.

   On considère θ un relèvement de l'application continue $\xi \circ \Gamma : [0,1] \to \mathbb{U}$. On définit l'indice de Maslov de Γ par : $\mu_{\mathcal{L}}(\Gamma) = \theta(1) - \theta(0)$.

   Montrer que si Γ est un chemin fermé dans l'espace $\mathcal{L}(n)$ et γ un chemin fermé dans G, alors $\mu_{\mathcal{L}(n)}(\gamma\Gamma) = \mu_{\mathcal{L}(n)} + 2\mu(\gamma)$.
8. Montrer que $\mu_{\mathcal{L}}$ est surjectif de l'ensemble des chemins fermés de $\mathcal{L}(n)$ dans $\mathbb{Z}$.
9. Montrer qu'un lagrangien L est transverse à L_0 si et seulement si (avec les notations ci-dessus) $\Lambda_L - I_n$ est inversible. Plus généralement, montrer que deux lagrangiens L et L' sont transverses si et seulement si $\Lambda_L - \Lambda_{L'}$ est inversible.

On note $\widehat{\mathcal{L}(n)}$ l'ensemble des couples (L,θ) avec $L \in \mathcal{L}(n)$ sous-espace lagrangien, et $\theta \in \mathbb{R}$ tel que $\xi(L) = \mathrm{e}^{i\theta}$. (On le muni de la topologie produit).

Pour tous couples (L,θ) et (L',θ') de $\widehat{\mathcal{L}(n)}$, avec L et L' sous-espaces lagrangiens transverses, on définit l'indice de Maslov par :

$$m\left((L,\theta),(L',\theta')\right) = \frac{1}{2\pi}(\theta' - \theta) + \frac{i}{2\pi}\sum_{j=1}^{n} \log(\lambda_i),$$

où $\lambda_1,\ldots,\lambda_n$ sont les valeurs propres avec pultiplicité de la matrice $-\Lambda_{L'}\Lambda^{-1}$, et où log désigne la détermination principale du logarithme sur $\mathbb{C} setminus \mathbb{R}_-$.

10. Expliquer que, pour tous sous-espaces lagrangiens transverses L et L', $m\left((L,\theta),(L',\theta'\right)$ est bien défini et $\mathrm{e}^{2i\pi m\left((L,\theta),(L',\theta')\right)} = \mathrm{e}^{in\pi}$. En déduire que $m\left((L,\theta),(L',\theta')\right) \in \mathbb{Z}$ si n est pair, et $\mathbb{Z} + \frac{1}{2}$ si n est impair.
11. Pour tout $M \in G$, et pour $\alpha \in \mathbb{R}$ tel que $\det\left(i_c(M)\right) = \mathrm{e}^{i\alpha}$, on pose $M_\alpha = (M,\alpha)$. Pour tout $(L,\theta) \in \widehat{\mathcal{L}(n)}$, on définit $M_\alpha.(L,\theta) = (ML,\theta + 2\alpha)$.

    Expliquer que pour tout (L,θ) et (L',θ') dans $\widehat{\mathcal{L}(n)}$, avec L et L' deux sous-espaces lagrangiens tranverses, on peut définir $m\left(M_\alpha.(L,\theta),M_{\alpha'}.(L',\theta')\right)$. Puis démontrer que pour tout $M \in G$, $m\left(M_\alpha.(L,\theta),M_\alpha.(L',\theta')\right) = m\left((L,\theta),(L',\theta')\right)$.
12. Pour tout triplet (L_1,L_2,L_3) de sous-espaces lagrangiens deux à deux transverses, vérifier que la quantité $m\left((L_1,\theta_1),(L_2,\theta_2)\right) + m\left((L_2,\theta_2),(L_3,\theta_3)\right) + m\left(L_3,\theta_3),(L_1,\theta_1)\right)$ est indépendante des angles $(\theta_i)_{1\leq i\leq 3}$. On la note $C(L_1,L_2,L_3)$.

    Expliquer que cette quantité est invariante par l'action de G sur les triplets de sous-espaces lagrangiens deux à deux transverses.

13. En admettant la continuité de C, généraliser ce résultat d'invariance à l'action des matrices $m \in \mathrm{Sp}(2n)$.
14. Montrer que pour tout triplet (L_1,L_2,L_3) de sous-espaces lagrangiens deux à deux transverses, on a :

$$C(L_1,L_2,L_3) = \frac{1}{2}\mathrm{sgn}(L_1,L_2,L_3).$$

Commentaires finaux : les résultats de la première partie permettent de montrer (en utilisant que $\mathrm{Sp}(2n) \cap \mathcal{S}_{2n}^{++}(\mathbb{R})$ est contractile) que le groupe fondamental de $\mathrm{Sp}(2n)$ est le même que celui de G, et donc celui de $\mathbb{U}(n)$, c'est-à-dire $\mathbb{Z}$. Le prmier indice de Maslov construit dans la quatrième partie donne un isomorphisme explicite entre ce groupe fondamental $\pi_1\left(\mathrm{Sp}(2n)\right)$ et $\mathbb{Z}$.

D'après la formule de Leray démontrée ci-dessus, $\frac{1}{2}\mathrm{sgn}$ apparaît comme le cobord de l'indice de Maslov m. Cette formule (combinée avec l'antisymétrie de m) permet de démontrer l'antisymétrie de sgn et la formule cohomologique :

$$\mathrm{sgn}(L_1,L_2,L_3) + \mathrm{sgn}(L_0,L_1,L_3) + \mathrm{sgn}(L_0,L_2,L_1) = \mathrm{sgn}(L_0,L_2,L_3)$$