
Agrégation 2016 : mathématiques générales.

Les calculatrices, téléphones, tablettes, ordinateurs et autres appareils électroniques similaires, ainsi que les documents sont interdits. La qualité de la rédaction sera un facteur important d'appréciation des copies. On invite donc le candidat à produire des raisonnements clairs, complets et concis. Le candidat peut utiliser les résultats énoncés dans les questions ou parties précédentes ; il veillera toutefois à préciser la référence du résultat utilisé.

Notations.

On note \mathbb{N} l'ensemble des entiers naturels, \mathbb{N}^* l'ensemble des entiers strictement positifs, \mathbb{Z} l'ensemble des entiers relatifs, \mathbb{R} le corps des nombres réels. On note $\mathcal{M}_m(\mathbb{R})$ l'algèbre des matrices carrées de taille m à coefficients dans \mathbb{R} , $\mathcal{M}_{m,p}(\mathbb{R})$ l'espace vectoriel des matrices de taille (m,p) à coefficients dans \mathbb{R} .

On considère E un \mathbb{R} -espace vectoriel de dimension $m \in \mathbb{N}^*$ et on note E^* son dual.

On notera I_m la matrice identité de $\mathcal{M}_m(\mathbb{R})$, et pour tout $M \in \mathcal{M}_m(\mathbb{R})$, on notera $P_M = \det(M - XI_n) \in \mathbb{R}[X]$ le polynôme caractéristique de la matrice M . Par ailleurs, on identifiera les éléments de $\mathcal{M}_{m,1}(\mathbb{R})$ et ceux de \mathbb{R}^m .

Pour $A \in \mathcal{M}_m(\mathbb{R})$, on désignera par tA la transposée de A . On notera $\mathcal{A}_m(\mathbb{R})$ l'ensemble des matrices antisymétriques de $\mathcal{M}_m(\mathbb{R})$, $\mathcal{S}_m(\mathbb{R})$ l'ensemble des matrices symétriques, et $\mathcal{S}_m^{++}(\mathbb{R})$ l'ensemble des matrices symétriques définies positives. De plus, $\text{GL}_n(\mathbb{R})$ désignera le groupe linéaire des matrices à coefficients réels inversibles, et $\text{O}(m) = \text{O}_m(\mathbb{R})$ le groupe des matrices réelles orthogonales.

De même, pour $n \in \mathbb{N}^*$, dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$, on notera $\text{GL}_n(\mathbb{C})$ le groupe des matrices à coefficients complexes inversibles, et $\text{U}(n)$ celui des matrices complexes unitaires.

Dans tout le sujet, la matrice $J = J_n$ désignera la matrice $\begin{pmatrix} 0 & I_n \\ -I_n & 0 \end{pmatrix}$ de $\mathcal{M}_{2n}(\mathbb{R})$. On remarquera que J est antisymétrique et orthogonale.

Objectif du sujet.

Dans une première partie, on présentera les propriétés générales d'un espace vectoriel symplectique.

Dans une seconde partie, on étudiera les propriétés du groupe symplectique et l'un de ses sous-groupes compacts.

La troisième partie sera consacrée à l'étude de sous-espaces vectoriels particuliers, appelés sous-espaces lagrangiens ; on regardera notamment l'action du groupe symplectique sur les triplets de sous-espaces lagrangiens deux à deux transverses et on définira un indice associé à ces triplets, invariant par cette action.

Dans la dernière partie, on introduira plusieurs indices de Maslov. Le premier est défini sur l'ensemble des chemins fermés dans $\text{Sp}(2n)$, le second sur l'ensemble des chemins fermés dans l'espace des lagrangiens. Enfin, un dernier indice entre deux espaces lagrangiens est introduit ; et on conclut avec la formule de Leray qui fait le lien entre cet indice de Maslov et l'indice introduit dans la troisième partie.

I Espace vectoriel symplectique.

On considère une forme bilinéaire $\omega : E \times E \rightarrow \mathbb{R}$.

Soit $e = (e_1, \dots, e_m)$ une base de E . On définit la matrice de la forme bilinéaire ω dans la base e comme étant la matrice $M = (\omega(e_i, e_j))_{1 \leq i, j \leq m} \in \mathcal{M}_m(\mathbb{R})$.

1. Vérifier que pour tout $(x, y) \in E^2$, $\omega(x, y) = {}^tXMY$, où X est le vecteur des coordonnées de x dans la base e et Y est le vecteur des coordonnées de y dans la base e .

$$\begin{aligned} {}^tXMY &= \begin{pmatrix} x_1 & \cdots & x_m \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \omega(e_1, e_1) & \cdots & \omega(e_1, e_m) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \omega(e_m, e_1) & \cdots & \omega(e_m, e_m) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_m \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} x_1 & \cdots & x_m \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1\omega(e_1, e_1) + \cdots + y_m\omega(e_1, e_m) \\ \vdots \\ y_1\omega(e_m, e_1) + \cdots + y_m\omega(e_m, e_m) \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Par linéarité à droite :

$$\begin{aligned} {}^tXMY &= \begin{pmatrix} x_1 & \cdots & x_m \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \omega(e_1, y_1e_1 + \cdots + y_me_m) \\ \vdots \\ \omega(e_m, y_1e_1 + \cdots + y_me_m) \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} x_1 & \cdots & x_m \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \omega(e_1, y) \\ \vdots \\ \omega(e_m, y) \end{pmatrix} \\ &= (x_1\omega(e_1, y) + \cdots + x_m\omega(e_m, y)) \end{aligned}$$

Par linéarité à gauche :

$$\begin{aligned} {}^tXMY &= (\omega(x_1e_1 + \cdots + x_me_m, y)) \\ &= (\omega(x, y)) \end{aligned}$$

On dit que la forme bilinéaire ω est **non dégénérée** si $N_E = \{x \in E, \forall y \in E, \omega(x, y) = 0\}$ est réduit à $\{0_E\}$.

2. On note M la matrice d'une forme bilinéaire ω dans une base e . Démontrer l'équivalence entre :
- la forme ω est non dégénérée.
 - la matrice M est inversible.
 - $\forall f \in E^*, \exists !x \in E, \forall y \in E, \omega(x, y) = f(y)$.

Notons (i), (ii) et (iii) les trois propositions dont nous devons établir l'équivalence.

(a) Montrons que (i) \Leftrightarrow (iii).

$$\text{Notons } \psi : \begin{cases} E & \rightarrow E^* \\ x & \mapsto \begin{cases} E & \rightarrow \mathbb{R} \\ y & \mapsto \omega(x, y) \end{cases} \end{cases} .$$

ψ est une application \mathbb{R} -linéaire entre deux espaces vectoriels de même dimension finie m , dont le noyau est $\ker(\psi) = N_E$.

Nous avons donc les équivalences :

$$\begin{aligned} \omega \text{ non-dégénérée} &\Leftrightarrow N_E = \{0_E\} \\ &\Leftrightarrow \ker(\psi) = \{0_E\} \\ &\Leftrightarrow \psi \text{ injective} \\ &\Leftrightarrow \psi \text{ bijective} \\ &\Leftrightarrow \forall f \in E^*, \exists !x \in E, \forall y \in E, \omega(x, y) = f(y) \end{aligned}$$

(b) Montrons que (i) \Leftrightarrow (ii).

$$\begin{aligned} \omega \text{ non-dégénérée} &\Leftrightarrow N_E = \{0_E\} \\ &\Leftrightarrow \{X \in \mathcal{M}_{m,1}(\mathbb{R}) \mid \forall Y \in \mathcal{M}_{m,1}(\mathbb{R}) \quad {}^tXMY = 0\} \\ &\Leftrightarrow [\forall X \in \mathcal{M}_{m,1}(\mathbb{R}), (\forall Y \in \mathcal{M}_{m,1}(\mathbb{R}), {}^tXMY = 0) \Rightarrow X = 0] \\ &\Leftrightarrow [\forall X \in (\mathbb{R}), {}^tXM = 0 \Rightarrow X = 0] \\ &\Leftrightarrow {}^tM \text{ est inversible} \\ &\Leftrightarrow M \text{ est inversible} \end{aligned}$$

Une forme *symplectique* sur E est une forme bilinéaire ω vérifiant les deux conditions suivantes :

- ω est antisymétrique : pour tout $(x,y) \in E^2$, $\omega(x,y) = -\omega(y,x)$.
- ω est non dégénérée.

3. *Modèle de \mathbb{R}^{2n} :*

On se place dans cette question sur l'espace vectoriel $E_0 = \mathbb{R}^{2n}$. On considère ω_0 la forme bilinéaire sur $E_0 \times E_0$ dont la matrice dans la base canonique de \mathbb{R}^{2n} est J . Montrer que ω_0 est une forme symplectique sur E_0 .

(a) Montrons que ω_0 est antisymétrique.

$$\begin{aligned}\omega(x,y) &= {}^tXJY \\ &= {}^t({}^tXJY) \\ &= {}^tY{}^tJ({}^tX)\end{aligned}$$

Or J est antisymétrique, donc

$$\begin{aligned}&= {}^tY(-J)X \\ &= -{}^tYJX \\ &= -\omega(y,x)\end{aligned}$$

Deuxième présentation.

Travaillons avec les matrices par blocs : soit $X = \begin{pmatrix} X_1 \\ X_2 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{2n,1}$ avec $(X_1, X_2) \in (\mathcal{M}_{n,1})^2$ et $Y = \begin{pmatrix} Y_1 \\ Y_2 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{2n,1}$ avec $(Y_1, Y_2) \in (\mathcal{M}_{n,1})^2$.

$$\begin{aligned}{}^tXMY &= (X_1X_2) \begin{pmatrix} 0 & I_n \\ -I_n & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} Y_1 \\ Y_2 \end{pmatrix} \\ &= (X_1X_2) \begin{pmatrix} Y_2 \\ -Y_1 \end{pmatrix} \\ &= X_1Y_2 - X_2Y_1\end{aligned}$$

Par permutation sur les lettres : ${}^tYMX = Y_1X_2 - Y_2X_1$. Et donc : ${}^tYMX = {}^tXMY$.

- (b) D'après la question précédente ω_0 est non dégénérée si et seulement si J est inversible. Or $\det J = \det(0) \times \det(0) - \det(-I_n) \det(I_n) = (-1)^{n+1} \det(I_n)^2 = (-1)^{n+1} \neq 0$, donc J est inversible et ω_0 est non-dégénérée.

Désormais, ω est une forme symplectique sur un espace vectoriel E de dimension finie.

Pour tout F sous-espace vectoriel de E , on définit l'orthogonal de F (pour la forme bilinéaire ω) $F^\circ = \{x \in E, \forall y \in F, \omega(x,y) = 0\}$.

4. Montrer que pour tout F sous-espace vectoriel de E , F° est de dimension $\dim F^\circ = \dim E - \dim F$. A-t-on pour tout F sous-espace vectoriel de E , $F \oplus F^\circ = E$?

* Il est clair du fait de la linéarité de ω par rapport à la deuxième variable que F° est un sous espace vectoriel de E .

$$\text{Considérons } \psi : \begin{cases} E & \rightarrow & F^* \\ x & \mapsto & \begin{cases} F & \rightarrow & \mathbb{R} \\ y & \mapsto & \omega(x,y) \end{cases} \end{cases} .$$

ψ est une application \mathbb{R} -linéaire dont le noyau est F° . Les espaces considérés étant de dimension finie

$$\dim(E) = \dim(F^*) + \dim(\ker(\psi))$$

Or $\dim(F^*) = \dim(F)$ et $\ker(\psi) = F^\circ$ donc

$$\dim F^\circ = \dim E - \dim F$$

*

5. Soit F un sous-espace vectoriel de E . montrer que la restriction de ω à $F \times F$ est encore une forme symplectique si et seulement si $F \oplus F^\circ = E$.

La restriction, $\tilde{\omega}$ de ω à $F \times F$ est évidemment une forme bilinéaire anti-symétrique. Il faut donc montrer que $\tilde{\omega}$ est non-dégénérée si et seulement si $F \oplus F^\circ = E$.

Procédons par conditions nécessaires et suffisantes.

* Supposons que $\tilde{\omega}$ est non dégénérée et démontrons qu'alors $F \oplus F^\circ = E$.

D'après la question 4. $\dim(F) + \dim(F^\circ) = \dim(E)$, donc : $F \oplus F^\circ = E \Leftrightarrow F \cap F^\circ = \{0_E\}$.

Montrons donc $F \cap F^\circ = \{0_E\}$.

Soit $x_0 \in F \cap F^\circ$.

Si $x_0 \in F^\circ$ alors $\forall y \in F, \omega(x_0, y) = 0$.

Par conséquent $x_0 \in N_F = \{x \in F | \forall y \in F, \omega(x, y) = 0\}$. Mais comme $\tilde{\omega}$ est non-dégénérée $N_F = \{0_E\}$ et donc $x_0 = 0_E$.

Donc $F \cap F^\circ = \{0_E\}$ et donc $F \oplus F^\circ = E$.

* Supposons que $F \oplus F^\circ = E$ et démontrons qu'alors $\tilde{\omega}$ est non dégénérée.

Nous avons établi lors de la question 2. que $\tilde{\omega}$ est non-dégénérée si et

seulement si $\tilde{\psi} : \begin{cases} F & \rightarrow F^* \\ x & \mapsto \tilde{\omega}(x, \cdot) \end{cases}$ est un isomorphisme.

Comme F et F^* sont de dimensions finies pour démontrer que $\tilde{\psi}$ est un isomorphisme il suffit de démontrer que son noyau est réduit à 0_E . Pour cela nous allons démontrer que $\ker(\psi) \subset F \cap F^* = \{0_E\}$.

. Par définition du noyau $\ker(\psi) \subset F$.

. $\ker(\psi) = \{x \in F | \forall y \in F, \tilde{\omega}(x, y) = 0\} \subset \{x \in E | \forall y \in F, \omega(x, y) = 0\} = F^\circ$.

6. Lien entre structure symplectique et scalaire :

On se place sur un espace vectoriel réel E , de dimension finie muni d'un produit scalaire $\langle \cdot | \cdot \rangle$. Pour tout endomorphisme $u \in \mathcal{L}(E)$, on notera u^* l'endomorphisme adjoint, c'est-à-dire l'unique endomorphisme de $\mathcal{L}(E)$ vérifiant pour tout $(x, y) \in E^2$, $\langle u(x) | y \rangle = \langle x | u^*(y) \rangle$.

(a) Soit $u \in \text{GL}(E)$, un automorphisme de E vérifiant $u^* = -u$. Pour tout $(x, y) \in E^2$ on pose $\omega(x, y) = \langle x | u(y) \rangle$. Montrer que ω est alors une forme symplectique.

ω est clairement une forme bilinéaire de $E \times E$ dans \mathbb{R} du fait de la bilinéarité du produit scalaire et de la linéarité de u .

* Démontrons que ω est anti-symétrique.

Soit $(x, y) \in E^2$.

$$\begin{aligned} \omega(x, y) &= \langle x | u(y) \rangle \\ &= \langle x | -u^*(y) \rangle \end{aligned}$$

Par bilinéarité du produit scalaire

$$\omega(x, y) = -\langle x | u^*(y) \rangle$$

Par définition de l'adjoint

$$\omega(x,y) = -\langle u(x)|y \rangle$$

Par symétrie du produit scalaire

$$\begin{aligned}\omega(x,y) &= -\langle y|u(x) \rangle \\ &= -\omega(y,x)\end{aligned}$$

* Démontrons maintenant que ω est non-dégénérée.

E étant de dimension finie il existe une base e orthonormale pour le produit scalaire $\langle \cdot | \cdot \rangle$. Notons M la matrice de u dans cette base e . En confondant \mathbb{R} et $\mathcal{M}_1(\mathbb{R})$ nous pouvons écrire :

$$\begin{aligned}\omega(x,y) &= \langle x|u(y) \rangle \\ &= {}^tX(MY) \\ &= {}^tXMY\end{aligned}$$

Ainsi M est la matrice de la forme bilinéaire ω dans la base e .

Comme, par hypothèse, u est inversible, M l'est aussi. Par conséquent (question I.2.) ω est non dégénérée.

- (b) Réciproquement, soit ω une forme symplectique sur E . Expliquer qu'il existe un unique endomorphisme u de E tel que pour tout $(x,y) \in E^2$, $\omega(x,y) = \langle x|u(y) \rangle$. Démontrer que $u^* = -u$ et que u est inversible. en déduire que m est paire.
- (c) On reprend l'exemple de la question 3 et on munit E_0 du produit scalaire canonique. Montrer que pour tout $(x,y) \in E_0^2$, $\omega_0(x,y) = \langle x|Jy \rangle$ et $\langle x|y \rangle = \omega_0(Jx,y)$. Et expliquer que pour tout sous-espace vectoriel F , $F^\circ = JF^\perp$ (où F^\perp désigne l'orthogonal pour le produit scalaire).

On considère désormais une forme symplectique ω fixée sur un espace de dimension $m = 2n$.

7. Montrer qu'il existe une base $\mathcal{B} = (e_1, \dots, e_n, f_1, \dots, f_n)$ de E telle que pour tout $(i,j) \in \llbracket 1, n \rrbracket^2$:

$$\begin{cases} \omega(e_i, e_j) = \omega(f_i, f_j) = 0 \\ \omega(e_i, f_j) = \delta_{i,j} \end{cases}$$

On pourra procéder par récurrence.

Dans une telle base \mathcal{B} , quelle est la matrice de la forme bilinéaire ω ?

Ainsi tout espace vectoriel symplectique peut se ramener (via un choix de base approprié) au modèle (E_0, ω_0) défini à la question 3.

Groupe symplectique réel.

Soit $v \in \mathcal{L}(E)$. on dit que v est un *endomorphisme symplectique* s'il préserve ω , c'est-à-dire si pour tout $(x,y) \in E^2$, $\omega(v(x),v(y)) = \omega(x,y)$.

1. On considère une base adaptée \mathcal{B} vérifiant les propriétés de la question I.7 et note $M = \text{Mat}_{\mathcal{B}}(v)$.

Montrer que v est un endomorphisme symplectique si et seulement si ${}^tMJM = J$.

On note $\text{Sp}(2n)$ l'ensemble des matrices *symplectiques réelles* :

$$\text{Sp}(2n) = \{M \in \mathcal{M}_{2n}(\mathbb{R}) \mid {}^tMJM = J\}$$

2. Montrer que $\text{Sp}(2n)$ est un sous-groupe de $\mathcal{M}_{2n}(\mathbb{R})$ stable par la transposée.
3. Soit $M \in \text{Sp}(2n)$. Montrer que pour toute racine complexe $\lambda \in \mathbb{C}$ du polynôme caractéristique P_M , $\bar{\lambda}$ et $\frac{1}{\lambda}$ sont également racines de P_M , avec la même multiplicité.
4. Soit $M \in \mathcal{M}_{2N}(\mathbb{R})$. Montrer l'équivalence entre
 - $M \in \text{Sp}(2n) \cap \text{O}(2n)$.
 - $M \in \text{Sp}(2n)$ et $MJ = JM$.
 - $M \in \text{O}(2n)$ et $MJ = JM$.

On note $G = \text{Sp}(2n) \cap \text{O}(2N)$.

5. Montrer que G est un sous-groupe compact de $\text{O}(2N)$.
6. Pour toute matrice $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$, on écrit $M = A+iB$ avec $(A,B) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})^2$.

On lui associe alors $i_r(M) = M_r = \begin{pmatrix} A & -B \\ B & A \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{2n}(\mathbb{R})$.

(a) Montrer que pour tout $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$, $\det(M_r) = |\det M|^2$.

(b) Pour toute matrice $N \in \mathcal{M}_{2n}(\mathbb{R})$, montrer l'équivalence entre :

- $N \in G = \text{Sp}(2n) \cap \text{O}(2n)$
- il existe $M \in \mathbb{U}(n)$ telle que $N = i_r(M)$.

(c) En déduire que i_r restreinte à $\mathbb{U}(n)$ définit un isomorphisme de groupes et un homéomorphisme de $\mathbb{U}(n)$ sur G .

On notera $i_c : G \rightarrow \mathbb{U}(n)$ la bijection réciproque.

Ainsi, en identifiant les matrices $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ et leurs images par i_r , on écrit :

$$\mathbb{U}(n) \stackrel{=}{=} G = \text{Sp}(2n) \cap \text{O}(2n).$$

Pour toute matrice $M \in \mathcal{M}_{2n}(\mathbb{R})$ symétrique définie positive, on rappelle l'existence et l'unicité d'une matrice définie positive A telle que $A^2 = M$; on appellera A la racine carrée de M et on notera $A = M^{\frac{1}{2}}$.

On rappelle également que pour tout $M \in \text{GL}_{2n}(\mathbb{R})$, il existe un unique couple $(S, W) \in \mathcal{S}_{2n}^{++}(\mathbb{R}) \times \text{O}(2n)$ tel que $M = SW$ avec $S = (M^t M)^{\frac{1}{2}}$ et $W = (M^t M)^{-\frac{1}{2}} M$. Cette décomposition est appelée décomposition polaire et l'application $M \mapsto (S, W)$ ainsi définie sur $\text{GL}_{2n}(\mathbb{R})$ est continue.

7. (a) Montrer que la racine carrée d'une matrice symplectique, symétrique, définie positive est encore une matrice symplectique. en déduire que pour tout $M \in \text{Sp}(2n)$, si on note $M = SW$ sa décomposition polaire, alors S et W sont des matrices symplectiques.
- (b) Montrer que $\text{Sp}(2n) \cap \mathcal{S}_{2n}^{++}(\mathbb{R})$ est connexe par arcs et en déduire que $\text{Sp}(2n)$ est connexe par arcs. *On rappelle que $\text{U}(n)$ est connexe par arcs.*
8. On souhaite décrire les sous-groupe compacts maximaux de $\text{Sp}(2n)$. pour cela, on considère H un sous-groupe compact de $\text{Sp}(2n)$. On va démontrer qu'il est conjugué à un sous-groupe de G .

On admet dans cette question l'existence, l'existence sur le sous-groupe H d'une mesure borélienne finie non nulle, que l'on notera μ , invariante par translation, c'est-à-dire elle vérifie que pour tout borélien $B \subset H$, pour tout $g \in H$, $\mu(Bg) = \mu(B)$.

- (a) Pour tout $(x, y) \in E_0^2$, on pose

$$\langle x|y \rangle_H = \frac{1}{\mu(H)} \int_H \langle gx|gy \rangle \, d\mu(g).$$

Expliquer que $\langle \cdot | \cdot \rangle_H$ définit un produit scalaire sur E_0 invariant par tous les éléments de H .

- (b) On note S la matrice de ce produit scalaire dans la base canonique. Expliquer que $S \in \mathcal{S}_{2n}^{++}$ et que pour tout $M \in H$, ${}^t M S M = S$.
 - (c) Démontrer que l'endomorphisme canoniquement associé à la matrice $T = S^{-1} J$ est antisymétrique pour le produit scalaire $\langle \cdot | \cdot \rangle_H$ et que T commute avec tous les éléments de H .
 - (d) Démontrer que l'endomorphisme associé à $-T^2$ est symétrique défini positif pour le produit scalaire $\langle \cdot | \cdot \rangle_H$. En déduire l'existence d'une matrice R telle que $R^2 = -T^2$ et ${}^t R S = S R$.
Vérifier qu'elle commute avec tous les éléments de H et avec T .
 - (e) En déduire l'existence d'une matrice $S_0 \in \mathcal{S}_{2n}^{++}$ symétrique, définie positive telle que $S_0 \in \text{Sp}(2n)$ et pour tout $M \in H$, ${}^t M S_0 M = S_0$.
 - (f) Conclure sur la nature des sous-groupes compacts maximaux de $\text{Sp}(2n)$.
9. *Structures de sous-variétés de $\text{Sp}(2n)$:*

On considère l'application $\xi : \begin{cases} \mathcal{M}_{2n}(\mathbb{R}) & \rightarrow \mathcal{A}_{2n}(\mathbb{R}) \\ M & \mapsto {}^t M J M \end{cases}$.

- (a) Démontrer que ξ est une application de classe \mathcal{C}^∞ et calculer la différentielle $d\xi|_M$ en un point $M \in \mathcal{M}_{2n}(\mathbb{R})$.
- (b) Décrire le noyau de la différentielle $d\xi|_M$ et montrer que celle-ci est surjective de $\mathcal{M}_{2n}(\mathbb{R})$ sur $\mathcal{A}_{2n}(\mathbb{R})$.
- (c) Montrer que $\text{Sp}(2n)$ est une sous-variété de $\mathcal{M}_{2n}(\mathbb{R})$. Décrire l'espace tangent à I_{2n} , puis en tout point. Quelle est la dimension de $\text{Sp}(2n)$.

II Espaces lagrangiens.

Soit ω une forme symplectique fixée sur E .

On dit qu'un sous-espace vectoriel F est **isotrope** (resp. **lagrangien**) si $F \subset F^\circ$ (resp. $F = F^\circ$).

1. Soit F un sous-espace vectoriel isotrope. Montrer l'équivalence entre :
 - F est lagrangien.
 - F est isotrope maximal au sens de l'inclusion.
 - $\dim E = 2 \dim F$.
2. On dit que deux espaces lagrangiens L et L' sont transverses si $L \cap L' = \{0_E\}$. Expliquer que dans ce cas $L \oplus L' = E$. Démontrer que pour tout sous-espace lagrangien L , il existe un sous-espace lagrangien transverse L' .
3. Soient L et L' deux sous-espace lagrangiens transverses (on notera $2n = \dim E$).

(a) Montrer que $\sigma_{L,L'} : \begin{cases} L & \rightarrow & L'^* \\ x & \mapsto & \sigma_{L,L'}(x) = \begin{cases} L' & \rightarrow & \mathbb{R} \\ y & \mapsto & \omega(x,y) \end{cases} \end{cases}$ est un isomorphisme de \mathbb{R} -espace vectoriels.

(b) Montrer qu'il existe pour toute base (e_1, \dots, e_n) de L , une base (f_1, \dots, f_n) de L' qui vérifie : en notant $\mathcal{B} = (e_1, \dots, e_n, f_1, \dots, f_n)$, $\text{Mat}_{\mathcal{B}}(\omega) = J$.

On se place sur $E_0 = \mathbb{R}^{2n}$ muni de la structure symplectique ω_0 . On note $\mathcal{L}(n)$ l'ensemble des sous-espace vectoriels lagrangiens de E_0 .

4. Démontrer que $\begin{cases} \text{Sp}(2n) \times \mathcal{L}(n) & \rightarrow & \mathcal{L}(n) \\ (M, L) & \mapsto & ML = \{Mx, x \in L\} \end{cases}$ définit une action du groupe $\text{Sp}(2n)$ sur $\mathcal{L}(n)$. Expliquer que $\text{Sp}(2n)$ agit transitivement sur les couples de lagrangiens transverses.
5. Soient L_1, L_2 et L_3 trois sous-groupes lagrangiens deux à deux transverses.
 - (a) Vérifier que $g_{L_1, L_2, L_3} = \sigma_{L_1, L_2} \circ \sigma_{L_1, L_3}^{-1} \circ \sigma_{L_2, L_3}$ est un isomorphisme de L_2 vers L_2^* .

(b) Démontrer qu'en posant pour tout $(x,y) \in L_2^2$, $g(x,y) = g_{L_1,L_2,L_3}(x)(y)$, on définit une forme bilinéaire symétrique non dégénérée sur L_2 .

On pourra vérifier que pour tout $(x,y) \in L_2^2$, $g(x,y) = \omega_0(p_1(x),p_3(y))$ où p_1 et p_3 sont les projecteurs associés à la décomposition $E_0 = L_1 \oplus L_3$.

(c) En notant (r,s) la signature de cette forme g , on pose

$$\operatorname{sgn}(L_1,L_2,L_3) = r - s.$$

Vérifier que cette valeur est un entier compris entre $-n$ et n , de même parité que n , et montrer que toutes ces valeurs sont effectivement atteintes (pour des choix appropriés de L_1 , L_2 et L_3).

On pourra prendre $L_1 = \mathbb{R}^n \times \{0_{\mathbb{R}^n}\}$, $L_3 = \{0_{\mathbb{R}^n}\} \times \mathbb{R}^n$ et choisir ensuite L_2 de manière appropriée.

6. L'action de groupe définie à la question 4 permet de faire agir $\operatorname{Sp}(2n)$ sur les triplets de sous-espaces lagrangiens (l_1,L_2,L_3) deux à deux transverses (en posant pour tout $M \in \operatorname{Sp}(2n)$, $M \cdot (L_1,L_2,L_3) = (ML_1,ML_2,ML_3)$). Montrer que l'orbite d'un tel triplet (L_1,L_2,L_3) par cette action est l'ensemble des (L'_1,L'_2,L'_3) sous-espaces lagrangiens deux à deux transverses tels que $\operatorname{sgn}(L'_1,L'_2,L'_3) = \operatorname{sgn}(L_1,L_2,L_3)$.

III Indices de Maslov.

Pour tout $M \in \operatorname{Sp}(2n)$, on pose $\rho(M) = \det \left(i_c \left(M^t M \right)^{-\frac{1}{2}} M \right)$ (avec les notations de la partie II).

On rappelle que pour tout chemin continu γ d'un intervalle I de \mathbb{R} dans $\mathbb{U} = \{z \in \mathbb{C}, |z| = 1\}$ il existe $\theta \in \mathcal{C}^0(I,\mathbb{R})$ un relèvement de γ , c'est-à-dire une application vérifiant pour tout $t \in I$, $\gamma(t) = e^{2i\pi\theta(t)}$. De plus ce relèvement est uniquement à l'ajout d'une constante de \mathbb{Z} près.

On dit qu'un chemin γ , défini sur $[a,b]$, est fermé si $\gamma(a) = \gamma(b)$.

1. Pour tout chemin $\Gamma : [0,1] \rightarrow \operatorname{SP}(2n)$ continu et fermé, expliquer que $\gamma = \rho \circ \Gamma$ est un chemin continu fermé de $[0,1]$ dans \mathbb{U} .

On considère θ un relèvement de γ et on définit l'**indice de Maslov** de Γ : $\mu(\Gamma) = \theta(1) - \theta(0)$.

2. Vérifier que $\mu(\Gamma) \in \mathbb{Z}$ et qu'il est indépendant du relèvement choisi.

3. Pour tout $k \in \mathbb{Z}$, construire un chemin Γ_k continu, fermé de $[0,1]$ dans $\operatorname{Sp}(2n)$, d'indice $\mu(\Gamma_k) = k$.

4. Démontrer que $G = \operatorname{Sp}(2n) \cap \operatorname{O}(2n)$ (isomorphe à $\mathbb{U}(n)$ d'après la question II.6) agit lui aussi transitivement sur $\mathcal{L}(n)$ via l'action définie à la question III.4.

5. On note $L_0 = \mathbb{R}^n \times \{0\}$.

(a) Expliquer que $L_0 \in \mathcal{L}(n)$ et caractériser le stabilisateur S_0 de L_0 par l'action de G ci-dessus.

Expliquer que le groupe S_0 est isomorphe à $O(n)$.

(b) Montrer que pour tout $(U_1, U_2) \in \mathbb{U}(n)^2$, $i_r(U_1)L_0 = i_r(U_2)L_0$ si et seulement si $U_1^t U_1 = U_2^t U_2$.

Ainsi pour tout sous-espace lagrangien L , la quantité $\Lambda_L = U^t U$, où $L = i_r(U)L_0$ ne dépend que de L et pas du choix de U .

6. Pour tout $L \in \mathcal{L}(n)$, on pose $\xi(L) = \det(\Lambda_L)$. Expliquer pour tout $U \in \mathbb{U}(n)$ tel que $L = i_r(U)L_0$, $\xi(L) = \det(U^2)$ et que $\xi(L) \in \mathbb{U}$.

D'après la question 5a on dispose d'un isomorphisme naturel entre $\mathcal{L}(n)$ et $\mathbb{U}/O(n)$. Cela nous permet de munir $\mathcal{L}(n)$ d'une topologie et de définir ce qu'est un chemin continu Γ dans l'espace $\mathcal{L}(n)$: c'est la donnée d'une application continue V de $[0,1]$ dans $\mathbb{U}(n)$, telle que pour tout $t \in [0,1]$, $\Gamma(t) = i_r(V(t))L_0$.

7. Soit Γ un chemin continu fermé de $[0,1]$ dans l'espace $\mathcal{L}(n)$; avec les notations ci-dessus, il vérifie : $\Gamma(0) = i_r(V(0))L_0 = i_r(V(1))L_0 = \Gamma(1)$.

On considère θ un relèvement de l'application continue $\xi \circ \Gamma : [0,1] \rightarrow \mathbb{U}$. On définit l'indice de Maslov de Γ par : $\mu_{\mathcal{L}}(\Gamma) = \theta(1) - \theta(0)$.

Montrer que si Γ est un chemin fermé dans l'espace $\mathcal{L}(n)$ et γ un chemin fermé dans G , alors $\mu_{\mathcal{L}(n)}(\gamma\Gamma) = \mu_{\mathcal{L}(n)}(\gamma) + 2\mu(\gamma)$.

8. Montrer que $\mu_{\mathcal{L}}$ est surjectif de l'ensemble des chemins fermés de $\mathcal{L}(n)$ dans \mathbb{Z} .

9. Montrer qu'un lagrangien L est transverse à L_0 si et seulement si (avec les notations ci-dessus) $\Lambda_L - I_n$ est inversible. Plus généralement, montrer que deux lagrangiens L et L' sont transverses si et seulement si $\Lambda_L - \Lambda_{L'}$ est inversible.

On note $\widehat{\mathcal{L}(n)}$ l'ensemble des couples (L, θ) avec $L \in \mathcal{L}(n)$ sous-espace lagrangien, et $\theta \in \mathbb{R}$ tel que $\xi(L) = e^{i\theta}$. (On le muni de la topologie produit).

Pour tous couples (L, θ) et (L', θ') de $\widehat{\mathcal{L}(n)}$, avec L et L' sous-espaces lagrangiens transverses, on définit l'indice de Maslov par :

$$m((L, \theta), (L', \theta')) = \frac{1}{2\pi}(\theta' - \theta) + \frac{i}{2\pi} \sum_{j=1}^n \log(\lambda_j),$$

où $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ sont les valeurs propres avec multiplicité de la matrice $-\Lambda_{L'}\Lambda^{-1}$, et où \log désigne la détermination principale du logarithme sur $\mathbb{C}_{\text{setminus} \text{minus}}\mathbb{R}_-$.

10. Expliquer que, pour tous sous-espaces lagrangiens transverses L et L' , $m((L, \theta), (L', \theta'))$ est bien défini et $e^{2i\pi m((L, \theta), (L', \theta'))} = e^{in\pi}$. En déduire que $m((L, \theta), (L', \theta')) \in \mathbb{Z}$ si n est pair, et $\mathbb{Z} + \frac{1}{2}$ si n est impair.

-
11. Pour tout $M \in G$, et pour $\alpha \in \mathbb{R}$ tel que $\det(i_c(M)) = e^{i\alpha}$, on pose $M_\alpha = (M, \alpha)$. Pour tout $(L, \theta) \in \widehat{\mathcal{L}(n)}$, on définit $M_\alpha \cdot (L, \theta) = (ML, \theta + 2\alpha)$.

Expliquer que pour tout (L, θ) et (L', θ') dans $\widehat{\mathcal{L}(n)}$, avec L et L' deux sous-espaces lagrangiens transverses, on peut définir $m(M_\alpha \cdot (L, \theta), M_\alpha \cdot (L', \theta'))$. Puis démontrer que pour tout $M \in G$, $m(M_\alpha \cdot (L, \theta), M_\alpha \cdot (L', \theta')) = m((L, \theta), (L', \theta'))$.

12. Pour tout triplet (L_1, L_2, L_3) de sous-espaces lagrangiens deux à deux transverses, vérifier que la quantité $m((L_1, \theta_1), (L_2, \theta_2)) + m((L_2, \theta_2), (L_3, \theta_3)) + m((L_3, \theta_3), (L_1, \theta_1))$ est indépendante des angles $(\theta_i)_{1 \leq i \leq 3}$. On la note $C(L_1, L_2, L_3)$.

Expliquer que cette quantité est invariante par l'action de G sur les triplets de sous-espaces lagrangiens deux à deux transverses.

13. En admettant la continuité de C , généraliser ce résultat d'invariance à l'action des matrices $m \in \text{Sp}(2n)$.
14. Montrer que pour tout triplet (L_1, L_2, L_3) de sous-espaces lagrangiens deux à deux transverses, on a :

$$C(L_1, L_2, L_3) = \frac{1}{2} \text{sgn}(L_1, L_2, L_3).$$

Commentaires finaux : les résultats de la première partie permettent de montrer (en utilisant que $\text{Sp}(2n) \cap \mathcal{S}_{2n}^{++}(\mathbb{R})$ est contractile) que le groupe fondamental de $\text{Sp}(2n)$ est le même que celui de G , et donc celui de $\mathbb{U}(n)$, c'est-à-dire \mathbb{Z} . Le premier indice de Maslov construit dans la quatrième partie donne un isomorphisme explicite entre ce groupe fondamental $\pi_1(\text{Sp}(2n))$ et \mathbb{Z} .

D'après la formule de Leray démontrée ci-dessus, $\frac{1}{2} \text{sgn}$ apparaît comme le cobord de l'indice de Maslov m . Cette formule (combinée avec l'antisymétrie de m) permet de démontrer l'antisymétrie de sgn et la formule cohomologique :

$$\text{sgn}(L_1, L_2, L_3) + \text{sgn}(L_0, L_1, L_3) + \text{sgn}(L_0, L_2, L_1) = \text{sgn}(L_0, L_2, L_3)$$