Agrégation externe 2014 : composition de mathématiques générales.

Introduction.

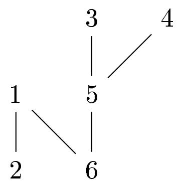
Une matrice carrée à coefficients réels est dite totalement positive (TP en abrégé) si tous ses mineurs sont positifs. Les matrices TP apparaissent naturellement dans diverses questions d'analyse et jouissent de propriétés remarquables ; par exemple, on peut démontrer que les valeurs propres d'une matrice TP sont toutes réelles positives.

Ce problème vise à étudier l'ensemble des matrices TP inversibles de taille $n \times n$ donnée. Deux outils seront mis à contribution. le premier est la décomposition de Bruhat, qui décrit les doubles classes dans $\mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$ selon le sous-groupe des matrices triangulaires supérieures. Le second est l'étude des écritures des permutations comme produit de transpositions de deux éléments consécutifs.

Dépendance des parties entre elles.

L'épreuve commence par une partie 0 consacrée au rappel de quatre résultats classiques utilisés dans le problème. Il est ici demandé aux candidats de rappeler les preuves de deux de ces résultats, à savoir les théorèmes A et B.

Le problème lui-même fait l'objet des parties 1 à 6. Le graphe suivant indique les dépendances entre ces parties : une arête relie x (en haut) à y (en bas) si la partie y s'appuie sur des résultats ou des notions présentés dans la partie x. On voit par exemple qu'il est possible de commencer par n'importe laquelle des parties 1, 3 ou 4.



Notations et conventions.

Afin de facilité leur repérage par les candidats, les définitions, les conventions et les notations utilisées seront indiquées par un losange noir dans la marge gauche.

♦ Pour deux ensembles X et Y, la notation $X \setminus Y$ désigne l'ensemble des éléments de X n'appartenant pas à Y.

Le cardinal d'un ensemble fini X est noté $\mathrm{Card}(X)$.

Le minimum de deux entiers m et n sera noté $\min(m,n)$.

Étant donnés deux entiers $m \leq n$, on pose $[\![m,n]\!] = \{m, m+1, \dots, n\}$.

Étant donné un entier $n \geq 1$, le groupe des permutations de $[\![1,n]\!]$ est noté S_n.

Étant donnés un corps $\mathbb{K}$ et deux entiers strictement positifs m et n, on note $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ l'espace vectoriel des matrices de taille $m \times n$ à coefficients dans $\mathbb{K}$; quand $m = n$, on simplifie la notation en $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.

Le groupe des éléments inversibles de l'anneau $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ est noté $\mathrm{GL}_n(\mathbb{K})$.

La dimension d'un espace vectoriel E sera notée $\dim E$.

♦ Une matrice carrée est dite **unitriangulaire** inférieure (respectivement, supérieure) si elle est triangulaire inférieure (respectivement, supérieure) et si tous ses éléments diagonaux sont égaux à 1.

♦ Supposons que $\mathbb{K}$ soit le corps $\mathbb{R}$ des nombres réels ou le corps $\mathbb{C}$ des nombres complexes. Étant donné un entier $n \geq 1$, le $\mathbb{K}$-espace vectoriel $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ de dimension finie ; par suite, toutes les normes dont il peut être muni définissent la même topologie. Sur chacun des sous-ensembles de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ que nous serons amenés à considérer, la topologie utilisée sera la topologie induite.

Mineurs d'une matrice.

Par convention, tous les corps sont supposés être commutatifs.

♦ Pour deux entiers $n \geq 1$ et $k \geq 0$, on note $\mathcal{P}_k(n)$ l'ensemble des parties à k éléments de $[\![1,n]\!]$.

♦ Soit $\mathbb{K}$ un corps. Le déterminant d'une matrice carrée $A = (a_{i,j})$ à coefficients dans $\mathbb{K}$ est un élément de $\mathbb{K}$ noté $\det A$. Il est parfois commode d'utiliser la notation alternative

$$\begin{vmatrix} a_{1,1} & \dots & a_{1,n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n,1} & \dots & a_{n,n} \end{vmatrix}$$

quand on souhaite mentionner explicitement la taille et les coefficients de A ; ici A est de taille $n \times n$, où n est un entier strictement positif.

♦ Soient à présent m et n deux entiers strictement positifs, et soit $A = (a_{i,j})$ une matrice de taille $m \times n$ à coefficients dans $\mathbb{K}$. Par définition, étant donné $k \in [\![1, \min(m,n)]\!]$, un mineur d'ordre k de A est le déterminant d'une matrice carrée de taille $k \times k$ extraite de A. Chaque couple $(I,J) \in \mathcal{P}_k(m) \times \mathcal{P}_k(n)$ définit ainsi un mineur

$$\begin{vmatrix} a_{i_1,j_1} & \dots & a_{i_1,j_k} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{i_k,j_1} & \dots & a_{i_k,j_k} \end{vmatrix}$$

d'ordre k de A, où $i_1, \dots, i_k$ (respectivement, $j_1, \dots, j_k$) sont les éléments de I (respectivement, J) **rangés dans l'ordre croissant**. Ce mineur sera noté $\Delta_{I,J}(A)$.

0 Questions de cours et autre résultats classiques.

Les candidats sont invités à rédiger des preuves concises et convaincantes des théorèmes A et B ci-dessous. les théorèmes C et D seront en revanche admis.

Théorème A. (**à démontrer**) - Soit E un espace vectoriel de dimension finie sur un corps $\mathbb{K}$, et soient F et G deux sous-espaces vectoriels de E. Alors

$$\dim(F+G) + \dim(F \cap G) = \dim F + \dim G$$

Démonstration 1 du *Théorème A* : formule de Grassman.

*
$$\begin{cases} F \subset E \\ G \subset E \\ \dim E < \infty \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \dim F < \infty \\ \dim G < \infty \end{cases}$$

* Le résultat est trivial si l'un ou l'autre sous-espace est réduit à $\{0\}$.
* Si les sous-espaces sont disjoints il suffit de considérer des bases de chacun pour obtenir la formule.
* $F \cap G$ est un sous-espace vectoriel et du fait des inclusions : $\dim F \cap G \leq \min(\dim F, \dim G)$. Soit $(e_i)_{i \in [\![1, \dim F \cap G]\!]}$ une base de $F \cap G$.
* D'après le théorème de la base incomplète, la famille libre (e_i) de F peut être complétée en une famille $\{e_1, \dots, e_{\dim F \cap G}, f_{\dim F \cap G + 1}, \dots, f_{\dim F}\}$ libre et génératrice de F.
* D'après le théorème de la base incomplète, la famille libre (e_i) de G peut être complétée en une famille $\{e_1, \dots, e_{\dim F \cap G}, g_{\dim F \cap G + 1}, \dots, g_{\dim G}\}$ libre et génératrice de G.
* La famille $\{e_1, \dots, e_{\dim F \cap G}, f_{\dim F \cap G + 1}, \dots, f_{\dim F}, g_{\dim F \cap G + 1}, \dots, g_{\dim G}\}$ est clairement une famille libre et génératrice de $F + G$, donc une base. D'où : $\dim(F+G) = \dim F \cap G + [\dim F - (\dim F \cap G + 1) + 1] + [\dim G - (\dim F \cap G + 1) + 1] = \dim F + \dim G - \dim F \cap G$.

Démonstration 2 du *Théorème A* : formule de Grassman.

* $F \cap G$ est un sous-espace de F et F est de dimension finie donc $F \cap G$ admet un supplémentaire F' dans F. Autrement dit : $F' \oplus (F \cap G) = F$, et donc :

$$\dim F' + \dim F \cap G = \dim F \tag{1}$$

* Montrons : $G \oplus F' = F + G$.

. Montrons que $F + G \subset G \oplus F'$.

Soit $x \in F + G$.

◇ $x \in F + G \Rightarrow \exists (f, g) \in F \times G,\ x = f + g$

◇ $\left\{ \begin{array}{l} f \in F \\ F = F' \oplus (F \cap G) \end{array} \right. \Rightarrow \exists (f_{F'}, f_G) \in F' \times G,\ f = f_{F'} + f_G$

◇ Des deux points précédents nous déduisons : $x = f_{F'} + (f_G + g)$ avec $f_{F'} \in F$ et $f_G + g \in G$.

. Clairement $G \oplus F' \subset F + G$.

* Du point précédent on déduit :

$$\dim F' + \dim G = \dim F + G \tag{2}$$

* Des égalités (1) et (2) on déduit l'égalité de Grassman.

Démonstration 3 du *Théorème A* : formule de Grassman.

* Les espaces vectoriels et applications linéaires :

$$0 \to F \cap G \xrightarrow{f} F \times G \xrightarrow{g} F + G \to 0$$

avec $f : x \mapsto (x, x)$ et $g : (x, y) \mapsto x - y$ forment une suite exacte courte.

* D'après le théorème du rang :

. $\dim(F \cap G) = \mathrm{rg}(f) + \dim[\ker(f)]$

. $\dim(F \times G) = \mathrm{rg}(g) + \dim[\ker(g)]$

Or :

◇ La suite étant exacte f est injective et g est surjective donc : $\dim[\ker(f)] = 0$ et $\mathrm{rg}(g) = \dim(F + G)$.

◇ La suite étant exacte : $\ker(g) = \mathrm{Im}(f)$ et donc : $\dim[\ker(g)] = \mathrm{rg}(f)$.

donc :

$$\dim(F \cap G) = \dim(F \times G) - \dim(F + G) \tag{3}$$

Enfin, comme $\dim(F \times G) = \dim F + \dim G$, en remplaçant dans (3) nous pouvons conclure.

Théorème B. (**à démontrer**) - Le déterminant d'une matrice carrée A, à coefficients dans un corps, admettant une décomposition par blocs de la forme

$$A = \left(\begin{array}{c|c} B & C \\ \hline 0 & F \end{array} \right) \text{ou} \qquad A = \left(\begin{array}{c|c} B & 0 \\ \hline D & F \end{array} \right)$$

où B et F sont des matrices carrées, est donné par la formule $\det A = (\det B)(\det F)$.

Démonstration 1 du *Théorème B*.

Remarquons :

$$\begin{pmatrix} B & C \\ 0 & F \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} I & 0 \\ 0 & F \end{pmatrix} \begin{pmatrix} B & C \\ 0 & I \end{pmatrix} \tag{4}$$

* En développant par rapport à la première ligne de façon itérée :

$$\det \begin{pmatrix} I & 0 \\ 0 & F \end{pmatrix} = \det F \tag{5}$$

* En développant par rapport à la dernière ligne de façon itérée :

$$\det \begin{pmatrix} B & C \\ 0 & I \end{pmatrix} = \det B \tag{6}$$

* Comme , nous en déduisons de (4), (5) et (6) que $\det \begin{pmatrix} B & C \\ 0 & F \end{pmatrix} = (\det B) \times (\det F)$.

* Comme : $\forall M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K}),\ \det({}^tM) = \det M$, nous trouvons le même résultat pour une matrice symétrique par blocs inférieure.

Théorème C. (**admis**) - Soit $\mathbb{K}$ un corps et n un entier supérieur ou égal à 2. Si $x_1, \ldots, x_n$ sont des éléments de $\mathbb{K}$, alors

$$\begin{vmatrix} 1 & x_1 & x_1^2 & \ldots & x_1^{n-1} \\ 1 & x_2 & x_2^2 & \ldots & x_2^{n-1} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & x_n & x_n^2 & \ldots & x_n^{n-1} \end{vmatrix} = \Pi_{1 \leq i,j \leq n}(x_i - x_j)$$

Démonstration du *Théorème C*.

Théorème D. (**admis**) - Soit $\mathbb{K}$ un corps, soit n un entier strictement positif, et soit $A \in \mathcal{M}_n[\mathbb{K})$. Les deux propositions suivantes sont équivalentes :

(i) Pour tout $p \in [\![1, n]\!]$, le mineur $\Delta_{[\![1,p]\!],[\![1,p]\!]}(A)$ est différent de 0.

(ii) Il existe dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ une unique factorisation $A = LDU$, où D est une matrice diagonale inversible et où L et U sont des matrices unitriangulaires inférieure et supérieure, respectivement.

Démonstration du *Théorème D*.

1 Matrices totalement positives.

1. 1

Soit $\mathbb{K}$ un corps , soient m, n et p trois entiers strictement positifs, et soient $A \in \mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{H})$ et $B \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$. Formons le produit $C = AB$ et écrivons $A = (a_{h,i})$, $B = (b_{i,j})$, $C = (c_{h,j})$, avec $h \in [\![1, m]\!]$, $i \in [\![1, n]\!]$, $j \in [\![1, p]\!]$.

Soit $k \in [\![1 \min(m, p)]\!]$ et soit $(H, J) \in \mathcal{P}_k(m) \times \mathcal{P}_k(p)$. Notons $h_1, \dots, h_k$ (respectivement, $j_1, \dots, j_k$) les éléments de H (respectivement, J), rangés dans l'ordre croissant. Notons $X_1, \dots X_n$ et $Y_1, \dots Y_k$ les colonnes des matrices

$$\begin{pmatrix} a_{h_1,1} & \dots & a_{h_1,n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{h_k,1} & \dots & a_{h_k,n} \end{pmatrix} \text{ et } \begin{pmatrix} c_{h_1,j_1} & \dots & c_{h_1,j_k} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ c_{h_k,j_1} & \dots & c_{h_k,j_k} \end{pmatrix}$$

respectivement. Ces colonnes appartiennent à l'espace vectoriel $E = \mathbb{K}^k$.

(a) Exprimer $Y_1, \dots, Y_k$ en fonction de $X_1, \dots, X_n$ et des coefficients $b_{i,j}$ de la matrice B.

Soit $(l, s) \in [\![1, k]\!]^2$.

$$(C = AB) \Rightarrow \left(c_{l,s} = \sum_{i=1}^{n} a_{h_l,i} b_{i,j_s} \right)$$

Donc :

$$Y_s = \begin{pmatrix} c_{h_1,j_s} \\ \vdots \\ c_{h_k,j_s} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sum_{i=1}^{n} a_{h_1,i} b_{i,j_s} \\ \vdots \\ \sum_{i=1}^{n} a_{h_k,i} b_{i,j_s} \end{pmatrix} = \sum_{i=1}^{n} b_{i,j_s} \begin{pmatrix} a_{h_1,i} \\ \vdots \\ a_{h_k,i} \end{pmatrix} = \sum_{i=1}^{n} b_{i,j_s} X_i$$

(b) Soit $f : E^k \to \mathbb{K}$ une forme k-linéaire alternée. Montrer que

$$f(Y_1, \dots, Y_k) = \sum_{\substack{\varphi : [\![1,k]\!] \to [\![1,n]\!] \\ \text{injective}}} b_{\varphi(1),j_1} \dots b_{\varphi(k),j_k} \; f(X_{\varphi(1)}, \dots, X_{\varphi(k)}),$$

la somme portant sur l'ensemble des applications injectives de $[\![1, k]\!]$ dans $[\![1, n]\!]$.

D'après la question précédente :

$$f(Y_1, \dots, Y_k) = f\left(\sum_{i_1=1}^{n} b_{i_1,j_1} X_{i_1}, \dots, \sum_{i_k=1}^{n} b_{i_k,j_k} X_{i_k} \right)$$

f forme k-linéaire donc :

$$f(Y_1,\dots,Y_k) = \sum_{\substack{1\leq i_1\leq n\\ \vdots \\ 1\leq i_k\leq n}} b_{i_1,j_1}\dots b_{i_k,j_k} f\left(X_{i_1},\dots,X_{i_k}\right)$$

Puisque f est alternée : $X_{i_r} = X_{i_m} \Rightarrow f(X_{i_1},\dots,X_{i_k}) = 0$ et donc :

$$f(Y_1,\dots,Y_k) = \sum_{\substack{1\leq i_1\leq n\\ \vdots \\ 1\leq i_k\leq n \\ i_r \text{ distincts}}} b_{i_1,j_1}\dots b_{i_k,j_k} f\left(X_{i_1},\dots,X_{i_k}\right)$$

Ainsi :

$$\left\{\begin{array}{c} \forall r\in[\![1,k]\!],\ i_r\in[\![1,n]\!] \\ \forall (r,u)\in[\![1,n]\!]^2,\ i_r=i_u\Rightarrow r=u \end{array}\right. \Leftrightarrow \begin{array}{ccc} [\![1,k]\!] & \rightarrow & [\![1,n]\!] \\ r & \mapsto & i_r \end{array} \text{ est injective}$$

(c) Sous les hypothèses de la question précédente, montrer que

$$f(Y_1,\dots,Y_k) = \sum_{I\in\mathcal{P}_k(n)}\sum_{\sigma\in S_k} b_{i_{\sigma(1)},j_1}\dots b_{i_{\sigma(k)},j_k} f(X_{i_{\sigma(1)}},\dots,X_{i_{\sigma(k)}}),$$

où $i_1,\dots,i_k$ sont les éléments de I rangés par ordre croissant.

Montrons que $E_1 = \{(\varphi(1),\dots\varphi(k))|\varphi : [\![1,k]\!]\to[\![1,n]\!], \varphi \text{ injective}\}$ et $E_2 = \{(i_{\sigma(1)},\dots,i_{\sigma(k)}|I\in\mathcal{P}_k(n), i_1,\dots,i_k\in I, \sigma\in S_k\}$.

Clairement $E_2\subset E_1$. Montrons l'inclusion réciproque.

Soit $\varphi : [\![1,k]\!]\to[\![1,n]\!]$ injective. Notons $I=\varphi([\![1,k]\!])$ et $i_1<\dots<i_k$ les éléments de I. Nous définissons une permutation $\sigma\in S_k$ en posant : $\forall s\in[\![1,k]\!],\ \varphi(s) = i_{\sigma(s)}$. Donc $\varphi([\![1,k]\!])\in E_1$ puis $E_1=E_2$.

D'où :

$$\begin{aligned} f(Y_1,\dots,Y_k) &= \sum_{\substack{\varphi:[\![1,k]\!]\to[\![1,n]\!]\\ \text{injective}}} b_{\varphi(1),j_1}\dots b_{\varphi(k),j_k}\ f(X_{\varphi(1)},\dots,X_{\varphi(k)}) \\ &= \sum_{I\in\mathcal{P}_k(n)}\sum_{\sigma\in S_k} b_{i_{\sigma(1)},j_1}\dots b_{i_{\sigma(k)},j_k} f(X_{i_{\sigma(1)}},\dots,X_{i_{\sigma(k)}}) \end{aligned}$$

(d) Montrer la formule de Binet-Cauchy :

$$\Delta_{H,J}(C) = \sum_{I \in \mathcal{P}_k(n)} \Delta_{H,I}(A)\Delta_{I,J}(B).$$

Le déterminant est une forme k-linéaire alternée, donc, d'après la question précédente nous obtenons successivement :

$$\begin{aligned}
\det(Y_1,\dots,Y_k) &= \sum_{I\in\mathcal{P}_k(n)} \sum_{\sigma\in S_k} b_{i_{\sigma(1)},j_1}\dots b_{i_{\sigma(k)},j_k} \det(X_{i_{\sigma(1)}},\dots,X_{i_{\sigma(k)}}) \\
\Delta_{H,J}(C) &= \sum_{I\in\mathcal{P}_k(n)} \sum_{\sigma\in S_k} b_{i_{\sigma(1)},j_1}\dots b_{i_{\sigma(k)},j_k} \epsilon(\sigma) \det(X_{i_1},\dots,X_{i_k}) \\
\Delta_{H,J}(C) &= \sum_{I\in\mathcal{P}_k(n)} \sum_{\sigma\in S_k} b_{i_{\sigma(1)},j_1}\dots b_{i_{\sigma(k)},j_k} \epsilon(\sigma)\Delta_{H,I}(A) \\
\Delta_{H,J}(C) &= \sum_{I\in\mathcal{P}_k(n)} \Delta_{H,I}(A) \sum_{\sigma\in S_k} \epsilon(\sigma) b_{i_{\sigma(1)},j_1}\dots b_{i_{\sigma(k)},j_k} \\
\Delta_{H,J}(C) &= \sum_{I\in\mathcal{P}_k(n)} \Delta_{H,I}(A)\Delta_{I,J}(B)
\end{aligned}$$

♦ Une matrice carrée à coefficients réels est dite totalement positive (TP en abrégé) si chacun de ses mineurs est positif.

Autrement dit, étant donné un entier $n \geq 1$, une matrice $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ est dite TP si $\Delta_{I,J}(A) \geq 0$ pour chaque $k \in [\![1, n]\!]$ et chaque $(I, J) \in \mathcal{P}_k(n)^2$.

1. 2

Dans cette question, les matrices considérées sont carrées à coefficients réels.

1. Montrer que les coefficients d'une matrice TP sont positifs.
   Les coefficients de la matrice sont les mineurs d'ordre 1 de la matrice donc sont positifs si elle est TP.
2. Montrer que la transposée d'une matrice TP est TP.
   Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ telle que A soit TP.
   Si A' est une matrice extraite de ${}^tA$ alors ${}^tA'$ est une matrice extraite de A.
   Or $\det A' = \det {}^tA'$ donc $\det A' \geq 0$.
   Nous avons établi que si une matrice est TP sa transposée l'est aussi.
3. Montrer que pour tout $n \geq 1$, la matrice identité de taille $n \times n$ est TP.
4. Montrer que le produit de deux matrices TP de même taille est TP.
5. L'inverse d'une matrice TP inversible est-elle toujours TP ?

1. 3

Soit $n \geq 1$ un entier. Soit $\mathcal{C}_n \subset \mathbb{R}^n$ l'ensemble des n-uplets strictement croissants de réels.

(a) Soit $b_1, \ldots, b_n) \in \mathcal{C}_n$ et soit $(\lambda_1, \ldots, \lambda_n) \in \mathbb{R}^n$. Montrer que si la fonction à valeurs réelles définie sur $\mathbb{R}$ ar

$$x \mapsto \lambda_1 e^{b_1 x} + \cdots + \lambda_n e^{b_n x}$$

s'annule en n points distincts de $\mathbb{R}$, alors $\lambda_1 = \cdots = \lambda_n = 0$.
(Indication : raisonner par récurrence sur n en se ramenant au cas où $b_n = 0$. Utiliser la dérivation.)

(b) Étant donnés deux éléments $\underline{a} = (a_1, \ldots, a_n)$ et $\underline{b} = (b_1, \ldots, b_n)$ de $\mathcal{C}_n$ on peut construire la matrice $E = (e_{i,j})$ de taille $n \times n$ et de coefficients donnés par $e_{i,j} = e^{a_i b_j}$. Montrer que cette matrice E est inversible.
Étudier le système homogène associé.

(c) Montrer que $\mathcal{C}_n$ est connexe.

(d) Avec les notations de la question (b), montrer que $\det E > 0$ quelque soit $(a, b) \in (\mathcal{C}_n)^2$.

♦ Fixons nous un entier $n \geq 1$. Désignons le groupe $\mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$ par le symbole $\mathcal{G}$. Notons $\mathcal{G}_+$ l'ensemble des matrices TP appartenant à $\mathcal{G}$, c'est-à-dire l'ensemble des matrices TP inversibles de taille $n \times n$. Notons enfin $\mathcal{G}_+^*$ l'ensemble des matrices de $\mathcal{G}$ dont tous les mineurs sont strictement positifs : une matrice $A \in \mathcal{G}$ appartient à $\mathcal{G}_+^*$ si $\Delta_{I,J}(A) > 0$ pour chaque $k \in [\![1, n]\!]$ et chaque $(I, J) \in \mathcal{P}_k(n)^2$.

1. 4

(a) Soient A et B deux éléments de $mathcalG$. Montrer que si $A \in \mathcal{G}_+$ et $B \in \mathcal{G}_+$, alors $AB \in \mathcal{G}_+^*$.

(b) Montrer que pour tout $\theta \in]0, 1[$, la matrice $Y = (t_{i,j})$ de taille $n \times n$ et de coefficients donnés par $t_{i,j} = \theta^{(i-j)^2}$ appartient à $\mathcal{G}_+^*$.
(Indication : développer $(i - j)^2$ et utiliser la question 1.3(d).)

(c) Construire une suite de matrices appartenant à $\mathcal{G}_+^*$ ayant pour limite la matrice identité dans $\mathcal{G}$.

(d) Montrer que $\mathcal{G}_+$ est l'adhérence de $\mathcal{G}_+^*$ dans $\mathcal{G}$.

2 Factorisation LDU d'une matrice TP inversible.

Le but de cette partie est de montrer que pour tous entiers n et p tels que $n > p \geq 1$ et toute matrice A totalement positive $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, on a

$$\det A \leq \Delta_{[\![1,p]\!],[\![1,p]\!]}(A) \Delta_{[\![p+1,n]\!],[\![p+1,n]\!]}(A) \quad (*)$$

Nous prouverons cette inégalité par récurrence sur n, en écrivant (*) pour un matrice D de taille plus petite construite à partir de A. Le nœud de l'argument est l'identité de Sylvester, qui permet d'exprimer les mineurs de D en fonction de ceux de A.

2. 1

Soit $\mathbb{K}$ un corps, soient q et n deux entiers tels que $n > q \geq 1$, et soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. on considère la matrice $D \in \mathcal{M}_{n-q}(\mathbb{K})$ de coefficients

$$d_{i,j} = \Delta_{[\![1,q]\!]\cup\{q+i\},[\![1,q]\!]\cup\{q+j\}}(A),$$

pour $(i,j) \in [\![1, n-q]\!]^2$.

Dans les questions (a), (b) et(c) on suppose que le mineur $\Delta_{[\![1,q]\!],[\![1,q]\!]}(A)$ est non nul.

(a) Montrer que A se factorise de façon unique comme produit de deux matrices par blocs

$$A = \left(\begin{array}{c|c} I_q & 0 \\ \hline E & I_{n-q} \end{array}\right) \left(\begin{array}{c|c} B & F \\ \hline 0 & C \end{array}\right)$$

avec $B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K}), C \in \mathcal{M}_{n-q}(\mathbb{K}), E \in \mathcal{M}_{n-q,q}(\mathbb{K}), F \in \mathcal{M}_{q,n-q}(\mathbb{K})$ où les symboles I_q et I_{n-q} désignent les matrices identités dans $\mathcal{M}_q(\mathbb{K})$ et $\mathcal{M}_{n-q}(\mathbb{K})$, respectivement.

(b) Exprimer la matrice D en fonction de B et C.

Indication : utiliser la formule de Binet-Cauchy prouvée dans la question 1.1(d)

(c) Montrer l'identité de Sylvester : $\det D = (\Delta_{[\![1,q]\!],[\![1,q[\![}(A)^{n-q-1}(\det 1)$.

(d) Montrer que l'identité de Sylvester est vraie de façon générale, même si l'hypothèse $\Delta_{[\![1,q]\!],[\![1,q]\!]}(A) \neq 0$ n'est pas satisfaite.

(Note : dans le cas $q = n-1$, on adopte la convention que $0^0 = 1$.)

Dans la suite de cette partie, toutes les matrices considérées sont à coefficients réels.

2. 2

Soient n et q deux entiers naturels avec $n > q \geq 1$, soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, et soit $D \in \mathcal{M}_{n-q}(\mathbb{R})$ la matrice construite à partir de A comme dans la question 2.1. Montrer que si A est TP, alors D est aussi TP.

2. 3

Dans cette question, nous démontrerons (*) par récurrence sur n.

Le cas $n = 2$ ne présente pas de difficulté : nécessairement $p = 1$, et si on appelle$a_{i,j}$ les coefficients de A, alors (*) s'écrit

$$a_{1,1}a_{2,2} - a_{1,2}a_{2,1} \leq a_{1,1}a_{2,2}$$

et découle directement de la positivité de $a_{1,2}$ et $a_{2,1}$ (*cf.* question 1.2(a)).

On prend alors $n \geq 3$ et on suppose le résultat acquis pour les matrices de taille strictement inférieure à n. Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ une matrice TP. Comme (*) est banalement vraie si $\det A = 0$, on se place dans le cas où A est inversible.

1. Montrer que $a_{1,1} > 0$.
   Indication : raisonner par l'absurde et utiliser la positivité des mineurs $\Delta_{\{1,i\},\{1,j\}}(A)$ *pour* $(i,j) \in [\![2,n]\!]^2$*.)*
2. Montrer que A satisfait l'inégalité (*) pour tout $p \in [\![2, n-1]\!]$.
   (Indication : introduire la matrice D *de la question 2.1 pour* $q = 1$ *et prouver la majoration* $\Delta_{[\![p,n-1]\!],[\![p,n-1[\![}(D) \leq (a_{1,1})^{n-p}\Delta_{[\![p,n-1[\![}(A)$*.)*
3. Traiter le cas $p = 1$ en le ramenant au cas $p = n - 1$ d'une autre matrice.

Soit A une matrice TP inversible. L'inégalité (*) entraîne que $\Delta_{[\![1,p]\!],[\![1,p]\!]}(A) > 0$ pour chaque $p \in [\![1, n]\!]$. D'après le théorème D, il existe une unique factorisation $A = LDU$, où D est une matrice diagonale inversible et où L et U sont des matrices unitriangulaires inférieure et supérieure, respectivement. Les coefficients de ces matrices peuvent s'écrire comme des quotients des mineurs de A ; ils sont donc positifs. En fait, il même possible de montrer que les matrices L, D et U sont TP. Ce résultat ramène l'étude des matrices TP inversibles à celle des matrices TP untriangulaires. Nous entreprendrons celle-ci dans la partie 6, après avoir développé les outils nécessaires.

3 Position relative de deux drapeaux.