Devoir sur table du 29/09/2021.

Indications portant sur l'ensemble du sujet

Toutes les réponses doivent être justifiées, sauf si une indication contraire est donnée.

Pour chaque question, si le travail n'est pas terminé, laisser tout de même une trace de la recherche ; elle sera prise en compte dans la notation.

I Exercice.

Cet exercice est un Q.C.M. (Questionnaire à Choix Multiples).

Chaque question n'a qu'une seule bonne réponse.

Pour chaque question, précisez sur la copie le numéro de la question et la réponse choisie.

Aucune justification n'est demandée pour cet exercice.

1. $\frac{4}{7}+\frac{5}{21}=\dots$

   (a) $\frac{9}{21}$.

   (b) $\frac{9}{28}$.

   (c) $\frac{17}{21}$.

   La bonne stratégie consiste ici à utiliser la calculatrice. Mais nous allons détailler le calcul.

   $$\begin{aligned}\frac{4}{7}+\frac{5}{21} &= \frac{4\times3}{7\times3}+\frac{5}{21}\\ &= \frac{12}{21}+\frac{5}{21}\\ &= \frac{17}{21}\end{aligned}$$

   Réponse (c).

2. $\frac{1}{(-2)\times(-2)\times(-2)}=\dots$

   (a) $(-2)^{-3}$.

(b) $(-2)^3$.

(c) 2^{-3}.

Là encore une stratégie possible consiste à utiliser la calculatrice puisqu'il y a des valeurs numériques et pas littérale.
Avec la calculatrice : $\frac{1}{(-2)\times(-2)\times(-2)} = -0{,}125$. et $(-2)^{-3} = -0{,}125$.

$$\begin{aligned}\frac{1}{(-2)\times(-2)\times(-2)} &= \frac{1}{(-2)^3}\\ &= (-2)^{-3}\end{aligned}$$

Réponse (a).

3. Si a est un nombre alors $a^{10} \times a^{12} = \dots$

   (a) a^{120}.

   (b) a^{22}.

   (c) a^{12}.

Ici pas de calculatrice car il s'agit d'une expression littérale.

$$\begin{aligned}a^{10} \times a^{12} &= \underbrace{a\times\cdots\times a}_{10 \text{ fois}} \times \underbrace{a\times\cdots\times a}_{12 \text{ fois}}\\ &= \underbrace{a\times\cdots\times a}_{22 \text{ fois}}\\ &= a^{22}\end{aligned}$$

Réponse (b).

II Exercice.

On considère le programme de calcul ci-dessous.

- Choisir un nombre.
- Ajouter 7 à ce nombre.
- Prendre le triple du résultat précédent.
- Soustraire le nombre de départ au résultat précédent.

On a utilisé la feuille de calcul ci-dessous pour appliquer ce programme de calcul au nombre 5 ; le résultat obtenu est 31.

	A	B
1	Programme	Résultat
2	Choisir un nombre	5
3	Ajouter 7 à ce nombre	12
4	Prendre le triple du résultat précédent	36
5	Soustraire le nombre de départ au résultat précédent	31

1. Pour les questions suivantes, faire apparaître les calculs sur la copie.

   (a) Si on choisit 2 comme nombre de départ, vérifier qu'on obtient 25 comme résultat.

   Il est possible de représenter les calculs avec des schémas de programmes de calculs.

   Indiquons les calculs successifs sous forme d'un tableau.

Étapes	Calculs
1	2.
2	$2+7=9$.
3	$3\times 9=27$.
4	$27-2=25$.

   Si on choisit 2 comme nombre de départ on obtient 25.

   (b) Si on choisit -8 comme nombre de départ, quel résultat obtient-on ?

Étapes	Calculs
1	-8.
2	$-8+7=-1$.
3	$3\times(-1)=-3$.
4	$-3-(-8)=5$.

   Si on choisit -8 comme nombre de départ on obtient 5.

2. Parmi les trois propositions suivantes, recopier sur votre copie la formule qui a été saisie dans la cellule B5.

=B4 − B2	=B4 + B2	= B4 * B2

Le résultat obtenu à l'étape précédente du programme de calcul est dans la cellule B4 et la valeur choisie au départ est dans la cellule B2 donc il faut choisir :

=B4 − B2

3. (a) Si l'on choisit x comme nombre de départ, exprimer en fonction de x (expression littérale), le résultat final de ce programme de calcul.

Étapes	Calculs
1	$x.$
2	$x+7.$
3	$3\times(x+7).$
4	$3\times(x+7)-x.$

Si on choisit x comme nombre de départ on obtient $3(x+7)-x$.

(b) Montrer que $3(x+7)-x=2x+21$.

Pour montrer une égalité entre deux expressions algébriques il faut les développer et les réduire. Celle dans le membre de droite est déjà développée nous allons donc développer le membre de gauche.

$$\begin{aligned}
&3(x+7)-x\\
&=3\times x+3\times 7-x\\
&=3x+21-x\\
&=3\times x-1\times x+21\\
&=(3-1)\times x+21\\
&=2x+21
\end{aligned}$$

On a bien : $3(x+7)-x=2x+21$.

4. Si on choisit un nombre entier au départ, est-il exact que le résultat du programme est toujours un nombre pair ? Justifier.

En testant avec quelques valeurs on se rend compte que le résultat est faux.

On peut aussi remarquer que $2x$ est pair mais 21 est impair, donc $2x+21$ est aussi impair.

Pour montrer qu'un résultat général est faux il suffit de trouver un contre-exemple.

Lorsque nous avons choisi 2 nous avons obtenu 25 qui est impair donc

le résultat obtenu n'est pas toujours un nombre impair.

III Exercice.

1. La pyramide de Khéops, située en Égypte, est une pyramide dont la base est un carré de côté de longueur 230,35 m et de hauteur 137 m. Calculez son volume.

   Calculons le volume $\mathscr{V}_1$ de la pyramide de Khéops.

   Puisque c'est une pyramide :

$$\mathscr{V}_1 = \frac{\mathscr{B} \times h}{3}$$

   Or, la base étant un carré de côté 230,35 m :

$$\begin{aligned}\mathscr{B} &= (230{,}35 \text{ m})^2 \\ &= 230{,}35^2 \text{ m}^2\end{aligned}$$

   et la hauteur est $h = 137$ m, donc :

$$\begin{aligned}\mathscr{V}_1 &= \frac{230{,}35^2 \text{ m}^2 \times 137 \text{ m}}{3} \\ &= \frac{230{,}35^2 \times 137}{3} \text{ m}^3 \\ &\approx 2\,423\,124{,}594 \text{ m}^3\end{aligned}$$

La pyramide de Khéops à un volume de $2\,423\,125$ m^3.

2. Déterminez le volume d'un cône de révolution dont la base est un disque de rayon 2 m et de hauteur 3 m.

   Calculons le volume $\mathscr{V}_2$ du cône.

   Puisque c'est un cône de révolution :

$$\mathscr{V}_2 = \frac{\mathscr{B} \times h}{3}$$

   Or, la base étant un disque de rayon 2 m :

$$\begin{aligned}\mathscr{B} &= \pi \times (2\text{ m})^2 \\ &= \pi \times 2^2\text{ m}^2 \\ &= 4\pi\text{ m}^2\end{aligned}$$

   et la hauteur est $h = 3$ m, donc :

$$\begin{aligned}\mathscr{V}_2 &= \frac{4\pi\text{ m}^2 \times 3\text{ m}}{3} \\ &= \frac{4\pi \times 3}{3}\text{ m}^3 \\ &= 4\pi\text{ m}^3 \\ &\approx 12{,}566\text{ m}^3\end{aligned}$$

   Le volume du cône est 12,57 m^3.

IV Exercice.

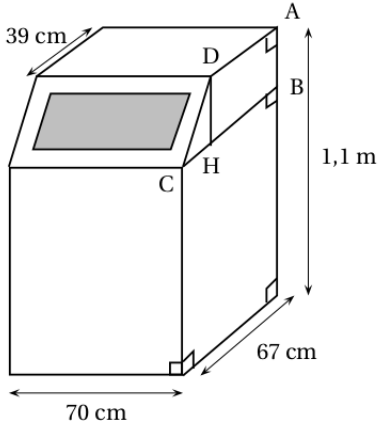
La production annuelle de déchets par Français était de 5,2 tonnes par habitant en 2007.

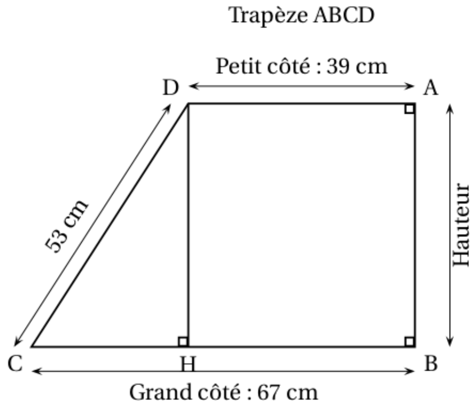
Entre 2007 et 2017, elle a diminué de 6,5 %.

Pour continuer à diminuer leur production de déchets de nombreuses familles utilisent désormais un composteur.

Une de ces familles a choisi le modèle ci-dessous, composé d'un pavé droit et d'un prisme droit (la figure du composteur n'est pas à l'échelle). Le descriptif indique qu'il a une contenance d'environ 0,5 m^3,

On souhaite vérifier cette information.





1. Dans le trapèze ABCD, calculer la longueur CH.

   Calculons CH.

   Puisque C, H et B sont alignés dans cet ordre :

$$\begin{aligned} CH &= CB - HB \\ &= CB - DA \\ &= 67 \text{ cm} - 39 \text{ cm} \\ &= (67 - 39) \text{ cm} \end{aligned}$$

$$\boxed{CH = 28 \text{ cm.}}$$

2. Montrer que la longueur DH est égale à 45 cm.

   Calculons DH.

   CDH est rectangle en H donc, d'après le théorème de Pythagore :

$$\begin{aligned} CH^2 + HD^2 &= CD^2 \\ 28^2 + HD^2 &= 53^2 \\ 784 + HD^2 &= 2809 \end{aligned}$$

D'où :

$$\begin{aligned} HD^2 &= 2809 - 784 \\ &= 2025 \end{aligned}$$

Enfin, HD étant une longueur c'est un nombre positif donc :

$$HD = 45$$

$$\boxed{DH = 45 \text{ cm.}}$$

3. Vérifier que l'aire du trapèze ABCD est de 2 385 cm^2.

   Calculons l'aire $\mathscr{A}$ de $ABCD$.

   Puisque $ABCD$ est un trapèze d'après la formule rappelée dans l'énoncé :

$$\begin{aligned} \mathscr{A} &= \frac{(AD + BC) \times AB}{2} \\ &= \frac{(39 + 67) \times 45}{2} \\ &= 2385 \end{aligned}$$

$$\boxed{\mathscr{A} = 2\,385 \text{ cm}^3.}$$

4. Calculer le volume du composteur.
   L'affirmation « il a une contenance d'environ 0,5 m^3 » est-elle vraie ? Justifier.

   Déterminons le volume $\mathscr{V}$ du composteur.

   * Le haut du composteur est un prisme donc son volume est

$$\mathscr{V}_1 = \mathscr{B}_1 \times h$$

   Or sa base est trapèze dont l'aire a déjà été calculée :

$$\begin{aligned} \mathscr{B}_1 &= \mathscr{A} \\ &= 2\,385 \text{ cm}^2 \end{aligned}$$

et la hauteur est $h = 70$ cm, donc

$$\begin{aligned}\mathscr{V} &= 2\,385 \text{ cm}^2 \times 70 \text{ cm} \\ &= 2\,385 \times 70 \text{ cm}^2 \cdot \text{cm} \\ &= 166\,950 \text{ cm}^3\end{aligned}$$

Le haut du composteur a un volume de 0,166 95 m^3.

* Le bas du composteur est un pavé droit donc son volume est

$$\begin{aligned}\mathscr{V}_2 &= 70 \times 67 \times (110 - 45) \\ &= 304850\end{aligned}$$

Le volume du composteur est donc :

$$\begin{aligned}v &= v_1 + v_2 \\ &= 166950 \text{ cm}^3 + 304850 \text{ cm}^3 \\ &= 471800 \text{ cm}^3 \\ &= 0{,}4718 \text{ m}^3\end{aligned}$$

Le composteur a un volume de 0,471 8 m^3.

Le composteur a un volume d'environ 0,5 m^3.

Rappels :

Aire du trapèze $= \dfrac{(\text{Petit côté} + \text{Grand côté}) \times \text{Hauteur}}{2}$

Volume du prisme droit = Aire de la base × hauteur

Volume du pavé droit = Longueur × largeur × hauteur.