Fonctions affines et linéaires.

I Fonctions affines.

1 Définition.

Définition 1

Nous appellerons *fonction affine* toute fonction f pour laquelle il est possible de trouver des nombres a et b tels que

$$f : x \mapsto ax + b.$$

Remarques.

1. a est appelé le *coefficient directeur.*
2. b est appelé l'*ordonnée à l'origine*.
3. La courbe représentative d'une fonction affine est une droite.

Exemples.

1. $f : x \mapsto 7x - \frac{1}{2}$ est une fonction affine avec $a = 7$ et $b = -\frac{1}{2}$.
2. $f : x \mapsto -x + 3$ est une fonction affine avec $a = -1$ et $b = 3$.
3. $f : x \mapsto -4x$ est une fonction affine avec $a = -4$ et $b = 0$.
   Les fonctions affines dont l'ordonnée à l'origine est nulle seront appelées *fonction affine.*
4. $f : x \mapsto 2$ est une fonction affine avec $a = 0$ et 2.
   Les fonctions affines dont le coefficient directeur est nul sont appelées des *fonctions constantes.*
5. $f : x \mapsto x^2$ n'est pas une fonction affine.
6. Pour jouer à jeu d'échecs en ligne il faut payer 10 euros à l'inscription puis 0,99 euros par jours. Le coût du jeu est une fonction affine du temps x d'inscription en jours : $f : x \mapsto 0{,}99x + 10$.

Exercice 1.
Exercices 16 page 132 à 30 page 133 du manuel sauf les 20, 21 et 23.

Correction de l'exercice 1

Exercice 16 page 132.

(a) $0 \mapsto 4 \times 3 - 3 = 9$ Donc R n'appartient pas à la droite représentative de la fonction. S non. T non.

(b) R oui. S non. T oui.

(c) R non. S non. T oui.

(d) R non. S oui. T non.

Exercice 17 page 132.

b, c, d, f.

Exercice 18 page 132.

(a) $x \mapsto 5x - 2$.

(b) $x \mapsto -2x + 5$.

Exercice 19 page 132.

(a) $a = 9$ et $b = -4$.

(b) $a = 1$ et $b = 10$.

(c) $a = 6$ et $b = 0$.

(d) $a = 0$ et $b = 6$.

(e) $a = -1$ et $b = 8$.

(f) $a = \frac{1}{2}$ et $b = \frac{1}{2}$.

Exercice 22 page 133.

(a) $f(1) = 2 \times 1 - 5 = -3$. $f(10) = 15$. $f(-6) = -17$.

(b) $g(0) = 100$. $g(12) = 52$. $g(-6) = 120$.

Exercice 24 page 133.

(a)

x	0	1	2	3	4
$f(x)$	7	2	-3	-8	-13

(b)

Exercice 25 page 133.

(a)

(b) Toutes les droites sont parallèles.

Exercice 26 page 133.

(a)

(b) Toutes les droites passent par le point de coordonnées $(0; -2)$.

Exercice 27 page 133.

x	0	-3	3	6
$f(x)$	-1	-2	0	1

Exercice 28 page 133.

(a) $g(0) = -4$ et $g(-4) = 4$.

(b) Un antécédent de 2 et -3. Un antécédent de -2 est -1.

Exercice 29 page 133.

(a) $g(0) = -5 \times 0 + 850 = 850$. Lors de la parution de l'annonce le vélo était proposé à 850 €.

(b) $g(1) = 845$, $g(2) = 840$, $g(3) = 835$.
-5 signifie que chaque jour le vélo vaut 5 € de moins.

(c) $g(x) = 500$ si et seulement si $x = 70$.

Exercice 30 page 133.

(a)

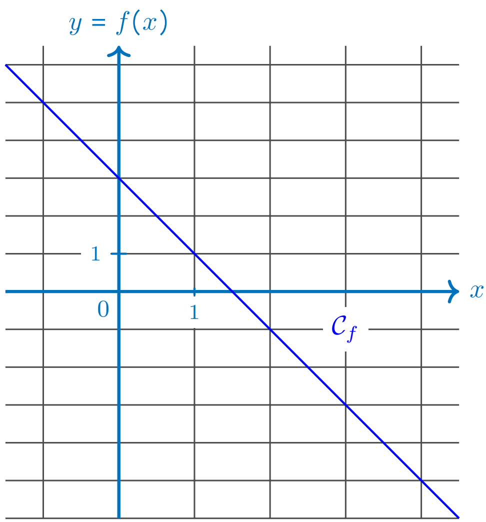
2 Les coefficients.

L'ordonnée à l'origine, b, d'une fonction affine f, doit son nom au fait que $b = f(0)$.

Autrement dit, sur la représentation graphique, b est l'ordonnée du point d'intersection de la courbe représentative de f et de l'axe des ordonnées.

Exemples.

1. Déterminons graphique de b.
   On a représenté ci-dessous une fonction affine $f : x \mapsto -2x + b$.
   Déterminons par lecture graphique l'expression algébrique de b.



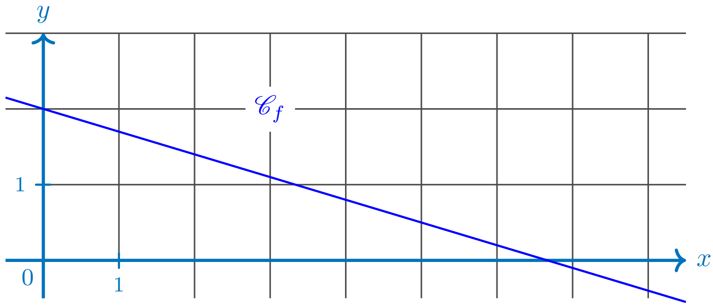
Donc $b = 3$.

Le coefficient directeur de la fonction indique la direction de la droite qui est sa courbe représentative.

Il indique l'inclinaison de la droite. C'est pourquoi on l'appelle aussi, en géométrie, la *pente* de la droite.

Lorsque $a > 0$ la droite monte, si $a < 0$ elle descente, et si $a = 0$ la droite est horizontale.

Exemples.

1. Si $f : x \mapsto \frac{1}{3}x - 1$.
2. Si $f : x \mapsto -0{,}5x + 2$.
3. 

   La courbe représentative est une droite donc nous pouvons affirmer que c'est une fonction affine.

   De plus $b = 2$ (intersection avec l'axe des ordonnées et $a < 0$ (la droite descend).

Proposition 1

Si $f : x \mapsto ax + b$ est une fonction affine alors a est le *taux de variation de f* entre deux valeurs quelconques mais distinctes, x_1 et x_2, de la variable x.

$$a = \frac{f(x_1) - f(x_2)}{x_1 - x_2}.$$

Remarques.

1. Autrement dit il y a proportionnalité entre la variation des images $(f(x_1) - f(x_2))$ et la variation des antécédents $(x_1 - x_2)$.
2. Le fait que le taux d'accroissement est constant permet de vérifier qu'une fonction est affine. S'il n'est pas constant la fonction n'est pas affine.

Exemples.

1.
2.
3.
4.

Exercice 2.

Exercices 20 et 21 page 132 du manuel.

Exercice 3.

Exercices 33 à 36 page 134 du manuel. Coefficient directeur.

Exercice 4.

Exercices 37 à 40 page 135 du manuel : détermination de a puis de b par équation.

Exercice 5.

Exercices 41 page 135 du manuel : a et b par lecture graphique.

3 Rechercher des antécédents.

Rechercher des antécédents par une fonction affine, dont on connaît l'expression algébrique, revient à résoudre des équations du premier degré.

Exemples.

1.

Exercice 6.

Exercices 23 page 133 du manuel.

Correction de l'exercice 6

1. -4 et $\frac{6}{5}$.
2. -8 et1,5.

II Fonctions linéaires.

1 Définition.

Comme nous l'avons déjà dit dans des exemples nous appellerons *fonction linéaire* toute fonction affine pour laquelle $b = 0$.

Autrement dit une fonction linéaire est une fonction de la forme $x \mapsto ax$.

2 Fonction linéaire et proportionnalité.

Les fonctions linéaires permettent de modéliser des situations de proportionnalité.

Autrement dit tout tableau de valeurs d'une fonction linéaire est un tableau de proportionnalité entre les x et leurs images.

De plus dans ce cas les coefficient directeur, a, de la fonction linéaire, est le coefficient multiplicateur qui permet de passer de la ligne des x à la ligne des images.

Remarques.

1. Si pour les mathématiques les fonctions linéaires sont des cas particuliers de fonctions affines, pour les sciences expérimentales la situation de proportionnalité est un cas important.

Exemples.

1.

3 Représentation graphique.

Proposition 2

Une fonction f est linéaire si et seulement si sa courbe représentative est une droite passant par l'origine du repère.

Démonstration

■

4 Exercices.

Exercice 7.

Exercices 1 page 130 à 14 page 131 du manuel.

III Brevet.

Exercice 8.

Exercice 9.

Exercice 10.

Exercice 11.

Exercice 12.