Équations.

I Généralités sur les équations.

Une *équation* est une égalité dans laquelle se trouvent des lettres (des *inconnues* ou *variables*) qui représentent des nombres (expression littérale).

Une équation est soit vraie, soit fausse, suivant les valeurs choisies pour remplacer les lettres.

Résoudre une équation c'est trouver toutes les valeurs qui rendent l'équation vraie.

Résoudre une équation c'est trouver toutes les valeurs qui rendent l'équation vraie. Une valeur qui rend une équation vraie est appelée une *solution* de l'équation.

Il n'y a pas une unique méthode de résolution des équations. Il y a presque autant de méthodes que d'équations.

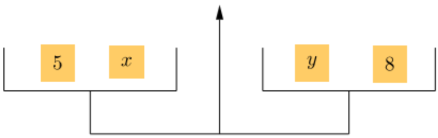
Nous apprendrons certaines de ces méthodes.

Pour simplifier la résolution et pour identifier à quel type d'équation nous avons à faire nous modifierons souvent l'équation de façon à obtenir une égalité à 0.

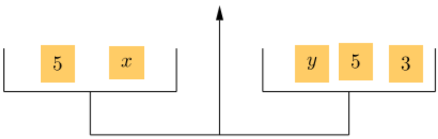
II Exemple.

Exercice 1. Recherche.

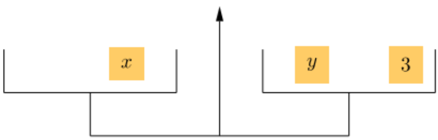
Trouvez le poids de x en fonction de celui de y grâce aux trois étapes suivantes.



. . . .



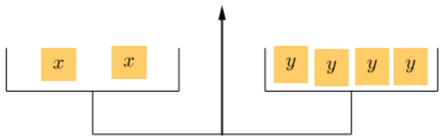
. . . .



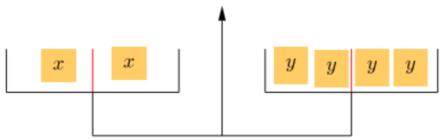
. . . .

Exercice 2. Recherche.

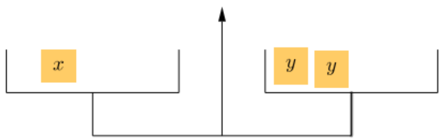
Même objectif :



....



....



....

III Modifications autorisées sur les équations.

Théorème 1

> On ne modifie pas les solutions d'une équation en additionnant (respectivement en soustrayant, respectivement en multipliant, respectivement en divisant) par un même nombre non nul des deux côtés de l'égalité.

Remarques.

1. Attention lorsque vous divisez de vérifier que vous ne divisez pas par zéro.
2. On ne peut multiplier par zéro sans modifier les résultats de l'équation. Le pouvoir absorbant du zéro fait disparaître l'information contenue dans l'équation.
3. Ce résultat constitue une boîte à outils. Il indique des transformations autorisées sur une équation pour en trouver les solutions.
4. Il faut beaucoup s'entraîner pour savoir quelles transformations utiliser pour résoudre telle ou telle équation.
5. Il est bien sûr toujours possible d'ajouter ou soustraire 0 mais c'est sans intérêt.

IV Équations du premier degré.

Définition 1

Une *équation linéaire* (ou équation polynomiale de degré 1) est une équation de la forme
$$ax + b = 0$$
avec a et b des nombres fixés et x un nombre variable.

Remarques.

Remarques.

1. Les équations linéaires de degré 1 comportent des x mais pas de x^2 ou de x^3, ni de $\sqrt{x}$ ou de division par x.
2. Pour identifier l'équation du premier degré on regroupe tous les termes d'un même côté de l'égalité. Autrement dit il faut se ramener à une égalité à 0.
3. La résolution des équations du premier degré consiste à « isoler le x ».
   Supposons que a n'est pas nul.
   $$ax + b = 0$$
   équivaut successivement à
   $$\begin{aligned} ax + b - b &= 0 - b \\ ax &= -b \\ \frac{ax}{a} &= \frac{-b}{a}, \text{ car } a \neq 0 \\ x &= -\frac{b}{a} \end{aligned}$$
   L'ensemble des solutions de l'équation $ax + b = 0$ est $\left\{-\frac{b}{a}\right\}$.

Exercice 3. ♥

Résolvez les équations du premier degré suivantes d'inconnue x :

1. $x + 4 = 7$
2. $3x = 12$
3. $-3x + 4 = 13$
4. $-3x + 4 = 14x - 7$

Exercice 4.

Exercices 1 à 7 page 88 du manuel Myriade : résolution d'équation.

Exercice 5.

Exercices 8 page 88 à 17 page 89, sauf le 15, du manuel Myriade : mise en équation, petits problèmes.

Exercice 6.

Résolvez l'équation d'inconnue x :

$$\frac{2x}{3} = \frac{5x}{7}.$$

Exercice 7.

Résolvez l'équation d'inconnue x :

$$\frac{3x+2}{7x-1} = 2.$$

Exercice 8. Application.

Exercices 15 page 89 du manuel Myriade : résolution d'équation.

Exercice 9. Application.

1. $2x - 3 = 5$,
2. $x + 4 = 5x - 2$,
3. $3(x+1) = 5x - 1$,
4. $-2(4-x) + 1 = 2$,
5. $\frac{2}{3}x = 4$,
6. $-3x = 4$,
7. $-6x = \frac{2}{3}$,
8. $-\frac{t}{3} = 2$,
9. $2(3x-1) - 5 = x + 1$,
10. $-3x + 4 = 2\left(x + \frac{2}{5}\right)$,
11. $3(x-2) - 1 = -2(x+4)$,
12. $2(4-3x) = -(x+5)$,
13. $2\left(\frac{x}{3} - 1\right) = x - \frac{1}{3}$,
14. $\frac{x-5}{7} = -3$,
15. $\frac{1}{4}x + \frac{1}{8} = -\frac{3}{2}x + \frac{1}{2}$,
16. $\frac{x-3}{2} = 2x + 1$.

Exercice 10. ♥

Identifiez puis résolvez dans $\mathbb{R}$ les équations linéaires parmi les équations d'inconnue x suivantes :

1. $x^2 = 3x - 1$
2. $-4x + 2 = 10$
3. $\sqrt{x} + 1 = 3$
4. $9x - 1 = 2x - 15$
5. $\frac{1}{x} + 3 = 1$
6. $\frac{1}{3} = \frac{3x}{6} - 7$
7. $5x - 7 - x = 4x$
8. $\sqrt{7}x - 2 = -\pi$

V Équation produit-nul.

Le résultat suivant est fondamental pour résoudre un grand nombre d'équations :

Théorème 2

Soient a et b deux quelconques nombres réels.
Dire que : $ab = 0$ équivaut à dire que $a = 0$ ou $b = 0$.

Remarques.

1. On peut formuler ce résultat de la façon suivante : pour qu'un produit soit nul il faut et il suffit que l'un des facteur (au moins) soit nul.
2. Ce résultat se généralise à un produit de plus de deux facteurs.
3. Dire que : $\frac{a}{b} = 0$ équivaut à dire que $a = 0$. (b est forcément non nul).

Exercice 11. ♥

Résolvez dans $\mathbb{R}$ l'équation d'inconnue x : $(-3x + 7)(4x - 6) = 0$

Exercice 12. Application.

Exercices 20, 21 et 22 page 90 du manuel Myriade.

Exercice 13. ♥

Résolvez dans $\mathbb{R}$ l'équation d'inconnue x : $\dfrac{(x-3)(x+4)(x+4)}{(x+2)(x+4)(x-1)} = 0$.

Les exercices qui suivent peuvent nécessiter de factoriser pour faire apparaître une équation produit-nul (revoyez la leçon sur la double distributivité).

Exercice 14. Application.

Exercice 19 page 90 du manuel Myriade.

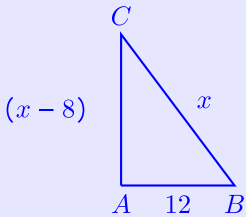
Exercice 15.

Exercices 23 page 90 à 35 page 91.

VI Exercices.

Exercice 16. Application.

Trouver x pour que le triangle ABC soit rectangle en A.



Exercice 17.

Déterminez l'ensemble des valeurs interdites pour le calcul défini pour x réel par

$$\frac{\sqrt{x}}{2x-3}$$

Exercice 18. Application.

Résolvez l'équation

$$\frac{2x-4}{x} = 3$$

Exercice 19. Application.

Dans une assemblée, quarante personnes ont plus de 40 ans, un quart a entre 30 et 40 ans et un tiers a moins de 30 ans. Quel est le nombre de personnes de cette assemblée ?

Exercice 20. Application.

Deux trains partent à 4 h du matin, l'un de la ville A vers la ville B, et l'autre de la ville B située à 315 km de A en direction de la ville A. À quelle heure se fera la rencontre, sachant que le premier roule à 90 $\text{km} \cdot \text{h}^{-1}$ et le second à 120 $\text{km} \cdot \text{h}^{-1}$?

Exercice 21. Application.

Un litre d'une boisson contient 7 % de sirop. Quel volume d'eau pure doit-on rajouter pour qu'un litre de cette nouvelle boisson contienne 5 % de sirop ?

Exercice 22. Application.

Quel est le rayon d'un disque dont l'aire égale le périmètre ?

Exercice 23. Application.

Problème publié dans le Liber Abaci *(1202) par Léonard de Pise dit Fibonacci.*

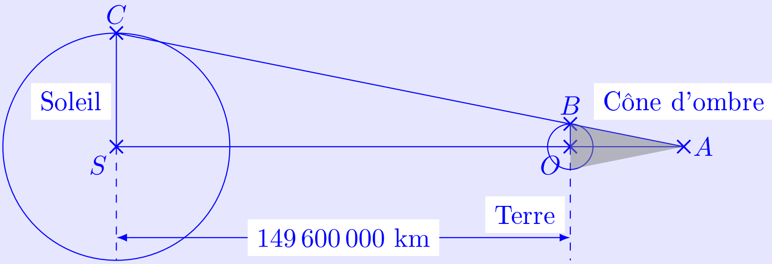
Deux tours élevées l'une de 30 pas, l'autre de 40 sont distantes de 50 pas ; entre les deux se trouve une fontaine vers le centre de laquelle deux oiseaux descendant des sommets des deux tours se dirigent du même vol et parviennent dans le même temps. Quelles sont les distances horizontales du centre de la fontaine aux deux tours ?

L'apport principal de *Léonard de Pise* (dit *Fibonacci*) fut l'introduction de la numération décimale dans le traité de comptabilité *Liber abaci* alors que l'Europe utilise encore les chiffres romains.

Son nom est resté célèbre jusqu'à nos jours grâce à une suite de nombres qui porte son nom et qui est associée au nombre d'or. Chaque terme de la suite de Fibonacci, qui commence par 0 puis 1, est la somme des deux précédents. Cette suite est souvent évoquée dans des thématiques ésotérique ou esthétique (comme le roman *Da Vinci code*).

Leonardo Fibonacci
(dall'opera *I benefattori dell'umanità*; vol. VI, Firenze, Ducci, 1850)

Exercice 24. Application.



1. La distance moyenne Soleil-Terre (calculée de centre à centre) est de 149 600 000 km.

   Le rayon du soleil est de 696 000 km, celui de la Terre de 6 360 km.

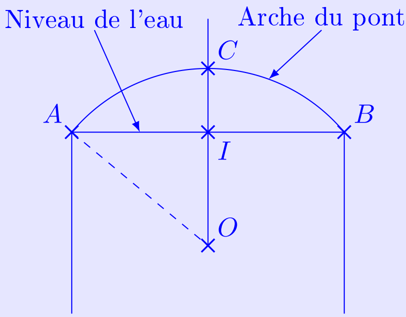
   Démontrez que la hauteur OA du cône d'ombre situé derrière la Terre est de 1 379 642 km par valeur approchée à l'unité près par excès.
2. Calculez le volume du cône d'ombre de sommet A et dont la base est formé par le disque de rayon OB.
3. La distance moyenne Terre-Lune (calculée de centre à centre) est de 382 000 km. Le rayon de la lune est de 1 738 km Étudiez la possibilité d'éclipses totales de la Lune en période de pleine lune.

Exercice 25. Application.

Extrait du C.R.P.E. 2017 (concours de recrutement des professeurs des écoles).

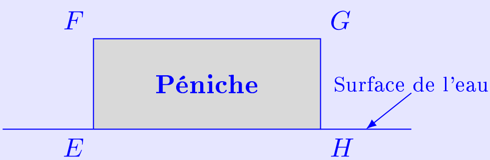
Péniche et pont.

Un pont a une arche en forme d'arc de cercle.
Lors d'une crue, l'eau atteint les sommets A et B des piliers du pont.
La hauteur maximale IC entre le niveau de l'eau et le sommet de l'arche est alors de 5 mètres. L'écartement AB entre les deux piliers du pont est de 24 mètres.
La situation est modélisée par le schéma suivant, qui n'est pas à l'échelle, sur lequel O est le centre de l'arc de cercle $\overset{\frown}{AB}$ et (CO) est l'axe de symétrie de la figure.



1. Montrer que le rayon OA de l'arche est 16,9 m.

On assimile la coupe de la partie émergée d'une péniche, vue de face, à un rectangle de 4 mètres de haut et de 12 mètres de large.



La situation est modélisée par le schéma ci-dessus, qui n'est pas à l'échelle sur lequel on a $EH = 12$ m et $FE = 4$ m.

2. Cette péniche peut-elle passer sous l'arche du pont sans dommages ? Justifier.