Trigonométrie.

I Cosinus.

Exercice 1. Recherche.

1. On considère des réductions et agrandissements d'un même triangle ABC rectangle en A.
   Complétez le tableau suivant avec les longueurs des triangles 1, 2 et 3.

AB			
BC			

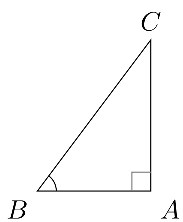
   Que constatez-vous ?
2. On considère des réductions et agrandissements d'un même triangle EFG rectangle en E.
   Complétez le tableau suivant avec les longueurs des triangles 1, 2 et 3.

EF			
FG			

   Que constatez-vous ?

Définition 1

Soit ABC un triangle rectangle en A.



Nous appellerons *cosinus de l'angle* $\widehat{ABC}$ le nombre, noté $\cos\left(\widehat{ABC}\right)$ défini par :

$$\cos\left(\widehat{ABC}\right) = \frac{AB}{BC}.$$

Remarques.

1. Pour se souvenir de cette définition on utilise souvent la formulette traditionnelle : « côté adjacent sur hypoténuse ».

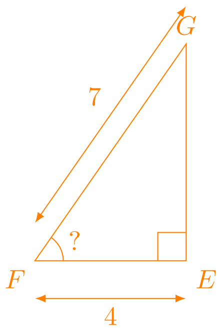
2. Le rapport de longueur $\frac{AB}{BC}$ reste le même si le triangle est agrandi ou réduit. Autrement dit le rapport de longueur dépend de l'angle $\widehat{ABC}$.
3. Puisque la somme des angles d'un triangle égale l'angle plat et puisque l'un des angles est droit, $\widehat{ABC}$ est forcément compris entre 0° et 90°. Autrement dit le cosinus ne s'applique qu'à des angles aigus.
4. L'hypoténuse d'un triangle (forcément rectangle) étant le plus grand côté du triangle d'après le théorème de Pythagore, le cosinus d'un angle est toujours un nombre compris entre 0 et 1 :

$$0 \leqslant \cos\left(\widehat{ABC}\right) \leqslant 1.$$

5. Les valeurs du cosinus pour les différents angles sont très difficiles à calculer. Depuis l'origine de la trigonométrie les hommes compiles des tables de trigonométrie donnant des valeurs approchées de cosinus. Vous disposez de telles tables dans votre calculatrice. C'est ce qui nous permettra d'utiliser le cosinus dans les exercices.
6. Ce résultat est très intéressant puisqu'il fait un lien entre des grandeurs a priori différentes : les angles et les longueurs.

Exemples.

1. Soit EFG un triangle rectangle en E tel que $EF = 4$ cm et $FG = 7$ cm.
   On fait un schéma à main levée en indiquant les informations.



On souhaite calculer la mesure en degré de l'angle $\widehat{EFG}$.

Puisque EFG est rectangle en E on a :

$$\cos\left(\widehat{EFG}\right) = \frac{EF}{FG}$$

En remplaçant par les valeurs numériques dont nous diposons :

$$\cos\left(\widehat{EFG}\right) = \frac{4}{7}$$

Nous connaissons les cosinus de l'angle, c'est $\frac{4}{7}$, et nous devons retrouver l'angle correspondant à ce cosinus. Il n'y pas de moyens simple de calculer la valeur de cet angle. Ce calcul compliqué est confié à la calculatrice.

Pour retrouver l'angle ce n'est pas cosinus mais arccos que nous utilisons. Il faut appuyer sur : $\boxed{\text{2nde}}$, $\boxed{\cos}$; ce qui correspond à la fonction indiquée au-dessus de la touche arccos. Sur l'écran nous tapons : $\arccos\left(\frac{4}{7}\right)$.

Avec la calculatrice nous obtenons :

$$\widehat{EFG} \approx 55{,}15°.$$

2. Soit MNP un triangle rectangle en N tel que $\widehat{NMP} = 40°$ et $MP = 12\text{cm}$.
   On souhaite calculer NM.
   Puisque MNP est rectangle en N :

$$\begin{aligned}\cos\left(\widehat{NMP}\right) &= \frac{NM}{MP}\\ \cos(40°) &= \frac{NM}{12}\\ 12\times\cos(40°) &= 12\times\frac{NM}{12}\\ 12\cos(40) &= NM\end{aligned}$$

   Avec la calculatrice :

$$NM \approx 9{,}1925\ldots$$

3. Soit ABC un triangle rectangle en A tel que $\widehat{ABC} = 80°$ et $AB = 4\text{cm}$.
   On souhaite calculer BC.
   Puisque ABC est rectangle en A :

$$\begin{aligned}
\cos\left(\widehat{ABC}\right) &= \frac{AB}{BC} \\
\cos(80^\circ) &= \frac{6}{BC} \\
BC \times \cos(80^\circ) &= BC \times \frac{6}{BC} \\
BC\cos(80) &= 6 \\
\frac{BC\cos(80)}{\cos(80)} &= \frac{6}{\cos(80)} \\
BC &= \frac{6}{\cos(80)}
\end{aligned}$$

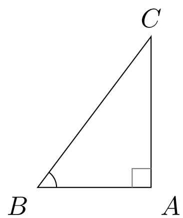
Avec la calculatrice :

$$BC \approx 34{,}5526.$$

II Sinus.

Définition 2

Soit ABC un triangle rectangle en A.



Nous appellerons *sinus de l'angle* $\widehat{ABC}$ le nombre, noté $\sin\left(\widehat{ABC}\right)$ défini par :

$$\sin\left(\widehat{ABC}\right) = \frac{AC}{BC}.$$

Remarques.

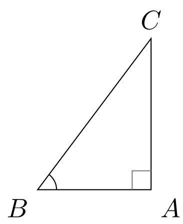
1. Formulette : « côté opposé sur hypoténuse ».

2. $0 \leqslant \sin\left(\widehat{ABC}\right) \leqslant 1$.
3. Là encore c'est la calculatrice qui nous donnera la valeur des sinus ou l'angle dont le sinus est tant.

III Tangente.

Définition 3

Soit ABC un triangle rectangle en A.



Nous appellerons *tangente de l'angle $\widehat{ABC}$* le nombre, noté $\tan\left(\widehat{ABC}\right)$ défini par :

$$\tan\left(\widehat{ABC}\right) = \frac{AB}{AC}.$$

Remarques.

1. Formulette : « côté opposé sur côté adjacent ».
2. Tangente n'est pas borné : il peut prendre des valeurs infiniment grandes.
3. Là encore c'est la calculatrice qui nous donnera la valeur des tangentes ou l'angle dont la tangente est tant.

Exercice 2.
Exercices 1 à 5 page 242 : application directe sans résolution d'équation.

Exercice 3.
Exercices 17 à 25 page 244 : résolution d'équation.

Correction exercice 3

Exercice 18 page 244.

ABC est rectangle en A donc :

$$\cos(\widehat{B}) = \frac{AB}{BC}$$
$$\cos(35) = \frac{AB}{9}$$
$$9\times\cos\left(\widehat{B}\right) = 9\times\frac{AB}{9}$$
$$9\times\cos\left(\widehat{B}\right) = AB$$

Avec la calculatrice :

$$\boxed{AB \approx 7{,}37.}$$

ABC est rectangle en A donc :

$$\sin(\widehat{B}) = \frac{AC}{BC}$$
$$\sin(35) = \frac{AC}{9}$$
$$9\times\sin\left(\widehat{B}\right) = 9\times\frac{AC}{9}$$
$$9\times\sin\left(\widehat{B}\right) = AC$$

Avec la calculatrice :

$$\boxed{AC \approx 5{,}16.}$$

Exercice 19 page 244.

EDF est rectangle en E donc :

$$\sin(\widehat{F}) = \frac{DE}{DF}$$
$$\sin(56) = \frac{7}{FD}$$
$$FD\times\sin(56) = FD\times\frac{7}{FD}$$
$$FD\times\sin(56) = 7$$
$$\frac{FD\times\sin(56)}{\sin(\widehat{56})} = \frac{7}{\sin(56)}$$
$$FD = \frac{7}{\sin(56)}$$

Avec la calculatrice :

$$\boxed{FD \approx 8{,}44.}$$

EDF est rectangle en E donc :

$$\begin{aligned}
\tan(\widehat{F}) &= \frac{DE}{FE} \\
\tan(56) &= \frac{7}{FE} \\
FE \times \tan(56) &= FE \times \frac{7}{FE} \\
FE \times \tan(56) &= 7 \\
\frac{FE \times \tan(56)}{\tan(56)} &= \frac{7}{\tan(56)} \\
FE &= \frac{7}{\tan(56)}
\end{aligned}$$

Avec la calculatrice :

$$\boxed{FE \approx 4{,}72.}$$

Exercice 20 page 244.

$GH = \frac{3}{\cos(64)} \approx 6{,}84.$

$GI = 3 \times \sin(64) \approx 2{,}70.$

Exercice 21 page 244.

(a)

(b) $JK = 7\cos(38) \approx 5{,}52.$

(c) $JL = 7\sin(38) \approx 4{,}31.$

Exercice 22 page 244.

(a) $MN = 11{,}7\sin(57) \approx 9{,}81.$

(b) $MO = 11{,}7\cos(57) \approx 6{,}37.$

Exercice 23 page 244.

(a) $QP = \frac{8}{\tan(23)} \approx 18{,}85.$

(b) $QR = \frac{8}{\cos(23)} \approx 8{,}69.$

Exercice 24 page 244.

(a) $TS = \frac{8{,}7}{\sin(61)} \approx 9{,}95.$

(b) $SU = \frac{8{,}7}{\tan(61)} \approx 4{,}82.$

Exercice 25 page 244.

(a) $VW = 12\tan(34) \approx 8{,}09$.

(b) $VX = \frac{12}{\cos(34)} = \approx 14{,}48$.

Exercice 4.

Exercice 28 page 245 : résolution d'équation.

Exercice 5.

Exercice 29 page 245 : résolution d'équation.

Exercice 6.

Exercice 30 page 245 : résolution d'équation.

Exercice 7.

Exercice 31 page 245 : résolution d'équation.

Exercice 8.

Exercice 33 page 246 : application directe retrouver un angle.

Exercice 9.

Exercices 33 à 41 page 246 : retrouver un angle.

IV Lien entre cosinus, sinus et tangente.

Proposition 1

Soit ABC un triangle rectangle en A, non aplati.

$$\tan\left(\widehat{ABC}\right) = \frac{\sin\left(\widehat{ABC}\right)}{\cos\left(\widehat{ABC}\right)}.$$

Démonstration 1

Pour démontrer une égalité le plus simple est de partir d'un côté de transformer l'expression jusqu'à obtenir l'autre côté. Ici il n'y a de calcul que d'un seul côté. Essayons donc de partir du membre de droite.

$$\begin{aligned}
\frac{\sin\left(\widehat{B}\right)}{\cos\left(\widehat{B}\right)} &= \frac{\frac{AC}{BC}}{\frac{AB}{BC}} \\
&= \frac{AC}{BC}\left(\frac{AB}{BC}\right)^{-1} \\
&= \frac{AC}{BC} \times \frac{BC}{AB} \\
&= \frac{AC \times BC}{BC \times AB} \\
&= \frac{AC}{AB} \\
&= \tan\left(\widehat{B}\right)
\end{aligned}$$

Exercice 10.

Exercice 7 page 242 du manuel Myriade.