Double distributivité.

I La propriété.

Proposition 1 - double distributivité.

Soient a, b, c et d des nombres.

Nous avons :

$$(a+b)\times(c+d) = a\times c + a\times d + b\times c + b\times d.$$

Démonstration 1

Notons $k = a + b$.

Nous avons donc

$$\begin{aligned}(a+b)\times(c+d) &= k\times(c+d)\\ &= k\times c + k\times d\\ &= (a+b)\times c + (a+b)\times d\\ &= a\times c + b\times c + a\times d + b\times d\\ &= a\times c + a\times d + b\times c + b\times d\end{aligned}$$

Exemples.

1. $(a+2)\times(3+b)$.
2. $$(a-2)\times(3+a) = (a+(-2))\times(3+a)$$

Exercice 1.

Exercices 20, 21, 19, 24 page 68.

Correction exercice 1

Exercice 24 page 68.

(a)

$$\begin{aligned}(2x-3)(5x+7) &= [2x+(-3)](5x+7)\\ &= 2x\times 5x + 2x\times 7 + (-3)\times 5x + (-3)\times 7\\ &= 10x^2 + 14x - 15x - 21\\ &= 10x^2 - x - 21\end{aligned}$$

(b)

$$\begin{aligned}-4x(6-3x) &= -4x\left[6+(-3)x\right]\\ &= -4x\times 6+(-4)x\times(-3)x\\ &= -24x+12x^2\\ &= 12x^2-24x\end{aligned}$$

(c)

$$\begin{aligned}3(2x+1)-(6-x) &= 3\times 2x+3\times 1-6+x\\ &= 6x+3-6+x\\ &= 7x-3\end{aligned}$$

(d)

$$\begin{aligned}(3x+5y)(2x-3y) &= (3x+5y)(2x+(-3)y)\\ &= 3x\times 2x+3x\times(-3)y+5y\times 2x+5y\times(-3)y\\ &= 6x^2+(-9)xy+10xy+(-15)y^2\\ &= 6x^2+xy-15y^2\end{aligned}$$

(e)

$$\begin{aligned}5(x+3)-(2x-6) &= 5\times x+5\times 3-2x+6\\ &= 5x+15-2x+6\\ &= 3x+21\end{aligned}$$

(f)

$$\begin{aligned}(2x+1)(5-3x)-(7-x^2) &= (2x+1)\left[5+(-3)x\right]-7+x^2\\ &= 2x\times 5+2x\times(-3)x+1\times 5+2\times(-3)x-7+x^2\\ &= 10x+(-6)x^2+5+(-6)x-7+x^2\\ &= -5x^2+4x-2\end{aligned}$$

Exercice 19 page 68.

(a)

$$\begin{aligned}6+(3x-2) &= 6+3x-2\\ &= 3x+4\end{aligned}$$

(b)

$$\begin{aligned}-4x+(8-3x) &= -4x+8-3x\\ &= -7x+8\end{aligned}$$

(c)

$$\begin{aligned} 10-(5-3x) &= 10-5+3x \\ &= 3x+5 \end{aligned}$$

(d)

$$\begin{aligned} 8x-(-3-5x) &= 8x+3+5x \\ &= 13x+3 \end{aligned}$$

(e)

$$\begin{aligned} 5-(2x+3)\times 4 &= 5-2x-3 \\ &= -8x-7 \end{aligned}$$

(f)

$$\begin{aligned} 2x-5(3x+4) &= 2x+(-5)(3x+4) \\ &= 2x+(-5)\times 3x+(-5)\times 4 \\ &= 2x+(-15)x+(-20) \\ &= -13x-20 \end{aligned}$$

Exercice 2.

Exercices 28 page 69.

Exercice 3.

Exercice 33 page 69.

II Une identité remarquable.

Proposition 2

Soient a et b des nombres.

On a :

$$a^2-b^2=(a-b)\times(a+b).$$

Démonstration 2

Une égalité est symétrique ($x=y$ c'est la même chose que $y=x$) donc nous pouvons partir du côté qui nous arrange pour faire notre démonstration.

$$(a - b) \times (a + b) =$$

Exemples.

1.

$$x^2 - 6^2 = (x - 6)(x + 6)$$

2.

$$\begin{aligned} x^2 - 4 &= x^2 - 2^2 \\ &= (x - 2)(x + 2) \end{aligned}$$

3.

$$\begin{aligned} 4x^2 - 49 &= 2x \times 2x - 7 \times 7 \\ &= (2x)^2 - 7^2 \\ &= (2x - 7)(2x + 7) \end{aligned}$$

4.

$$\begin{aligned} x^2 - 7 &= x^2 - \sqrt{7}^2 \\ &= (x - \sqrt{7})(x + \sqrt{7}) \end{aligned}$$

Remarques.

1. Nous n'utiliserons (hormis certaines astuces de calcul mental) cette formule que pour des expressions littérales (avec des lettres). L'expression littérales ne pouvant être évaluée nous devons parfois l'écrire autrement.
2. Écrite : $a^2-b^2 = (a-b)(a+b)$ est une formule pour factoriser (transformer une addition ou soustraction en produit). Écrite dans l'autre sens : $(a-b)(a+b) = a^2 - b^2$ c'est une formule pour développer.
3. Nous utiliserons essentiellement cette formule pour factoriser (pour développer nous nous contenterons le plus souvent de la double distributivité).
   La factorisation sera importante pour la résolution d'équation (équation produit-nul) et pour l'étude du signe d'expression littérales.
4. Il existe deux autres identités remarquables que vous étudierez au lycée :

$$a^2 + 2ab + b^2 = (a + b)^2$$
$$a^2 - 2ab + b^2 = (a - b)^2$$

Nous aurons dorénavant deux outils pour factoriser que nous essayerons d'utiliser dans cet ordre :

- la recherche d'un facteur commun (ce qui signifie de facto l'utilisation de la distributivité),
- la recherche de l'identité remarquable $a^2 - b^2 = (a-b)(a+b)$.

Exercice 4.

Exercices 22, 23, 25, 26 page 68.

Exercice 5.

Exercices 29, 30 page 69.

Exercice 6.

Exercices 31, 32, 34 page 69.

Exercice 7.

Exercice 35 page 69.