Diviseurs, multiples, nombres premiers.

I Diviseurs et multiples.

1 Définitions.

Définition 1

> Nous dirons que le nombre entier a est *un diviseur* du nombre entier b s'il est possible de trouver un nombre entier k tel que : $k \times a = b$.

Nous dirons aussi que b est *un multiple de* a : autrement dit b est dans la table de multiplication de a.

Nous pourrons encore dire que b est *divisible par* a : autrement dit le reste de la division euclidienne de b par a est zéro.

Exemples.

1. 3 est une diviseur de 12 puisqu'il existe un nombre k tel que $k \times 3 = 12$: il suffit de choisir $k = 4$.
2. 7 est un diviseur de 28 puisque $4 \times 7 = 28$.
3. 42 est un multiple de 7 puisque 42 est dans la table de multiplication de 6. En effet $6 \times 7 = 42$.
4. 42 est divisible par 3 puisque

$$\begin{array}{r|l} 4\,2 & 3 \\ \cline{2-2} -\;3 & 1\,4 \\ \cline{1-1} 1\,2 & \\ -\;1\,2 & \\ \cline{1-1} 0 & \end{array}$$

et donc le reste de la division euclidienne de 42 par 3 est 0.

Exercice 1.
Exercice 26 page 46 du manuel : multiples. Oral.

Exercice 2.
Exercice 28 page 46 du manuel : division euclidienne.

2 Critères de divisibilité.

Des astuces à connaître par cœur.

- Un nombre entier est divisible par 2 si son chiffre des unités est 0, 2, 4, 6 ou 8.
- Un nombre entier est divisible par 3 si la somme des chiffres composant ce nombre est divisible par 3.
- Un nombre entier est divisible par 4 si ses deux derniers chiffres forment un nombre divisible par 4.
- Un nombre entier est divisible par 5 si son chiffre des unités est 0 ou 5.
- Un nombre entier est divisible par 9 si la somme de ses chiffres est divisible par 9.
- Un nombre entier est divisible par 10 si son chiffre des unités est 0.

Exemples.

1. Utilisez les critères de divisibilité appliqués à 180.

Exercice 3.
Exercices 23 et 24 page 46 du manuel : critère de divisibilité. Oral.

Exercice 4.
Exercice 29 page 46 du manuel : recherche d'un nombre par élimination à la façon du crible d'Ératosthène.

3 Recherche de tous les diviseurs.

Pour rechercher tous les diviseurs (positifs) d'un nombre entier nous procéderons de manière exhaustive en testant tous les entiers 1 par 1.

Exemples.

1. Testons tous les entiers qui pourraient être des diviseurs de 132.
   - $132 = 1 \times 132$.
   - $132 = 2 \times 66$.
   - $132 = 3 \times 44$.
   - $132 = 4 \times 33$.
   - $132 = 6 \times 22$.
   - $132 = 11 \times 12$.
   - $132 = 12 \times 11$.
   - ... ensuite les diviseurs se répètent.

   Il y a 12 diviseurs en tout.

2. De même pour 315.

Exercice 5.

Exercice 25 page 46.

Correction exercice 5

1. Détaillons la démarche pour le premier : il s'agit de tester si tous les entiers plus petits que 8 sont des diviseurs de 8.

   - $1 \times 8 = 8$.
   - $2 \times 4 = 8$.
   - Par contre 3 n'est pas un diviseur de 8.
   - $4 \times 2 = 8$. Mais nous commençons à retrouver des diviseurs que nous avions déjà obtenu et nous n'en n'aurons plus de nouveau.
   - 5 n'est pas un diviseur de 8.
   - 6 n'est pas un diviseur de 8.
   - 7 n'est pas un diviseur de 8.
   - $8 \times 1 = 8$.

   Une présentation élégante en mathématiques consiste à rassembler toutes les diviseur dans un paquet appelé « un ensemble ».

   L'ensemble des diviseurs de 8 est $\{1; 2; 4; 8\}$.

2. De même :

   L'ensemble des diviseurs de 8 est $\{1; 2; 7; 14\}$.

3. L'ensemble des diviseurs de 20 est $\{1; 2; 4; 5; 10; 20\}$.

4. L'ensemble des diviseurs de 28 est $\{1; 2; 4; 7; 14; 28\}$.

   L'ensemble des diviseurs de 32 est $\{1; 2; 4; 8; 16; 32\}$.

   L'ensemble des diviseurs de 34 est $\{1; 2; 17; 34\}$.

5. L'ensemble des diviseurs de 40 est $\{1; 2; 4; 5; 8; 10; 20; 40\}$.

6. L'ensemble des diviseurs de 55 est $\{1; 5; 11; 55\}$.

4 Exercices.

Exercice 6.

Exercices 31 à 38 page 47.

II Nombres premiers.

1 Définition.

Définition 2

Nous dirons qu'un nombre entier est *premier* s'il admet exactement (ni plus ni moins) deux diviseurs positifs distincts.

Exemples.

1. L'entier 0 n'est pas premier car il a une infinité de diviseurs distincts.
2. L'entier 1 n'est pas premier car il n'a q'un diviseur : lui-même.
3. L'entier 2.
4. L'entier 3.
5. L'entier 4.
6. L'entier 5.
7. L'entier 6.
8. L'entier 7.
9. L'entier 8.

Le crible d'Ératosthène permet de trouver les nombres premiers jusqu'au nombre que l'on souhaite mais ce peut être long.

Il faut à minima connaître la liste des nombres premiers plus petits que 20.

2 Décomposition en facteurs premiers.

Théorème 1 - Théorème fondamental de l'arithmétique.

> Tout nombre entier admet une décomposition unique en produit de facteurs premiers.

Démonstration 1

L'idée de la démonstration repose sur l'algorithme présenté ci-dessous pour déterminer la décomposition en facteurs premiers d'un entier. Il faut bien évidemment le faire dans le cadre général et non pas sur une valeur en particulier.

Autrement dit tout nombre entier s'écrit comme une multiplication de nombres premiers.

Exemples.

1. $26 = 2 \times 13$.
2. $8 = 2 \times 2 \times \times 2 = 2^3$.
3. $12 = 2^2 \times 3$.

Présentons un algorithme qui permet de trouver la décomposition en facteurs premier d'un entier.

Il suffit d'essayer de diviser autant de fois que possible en commençant par les entiers les nombres premiers en commençant par les plus petits.

$$\begin{array}{c|c} 264 & 2 \\ 132 & 2 \\ 66 & 2 \\ 33 & 3 \\ 11 & 11 \\ 1 & \end{array}$$

Nous avons donc : $264 = 2^3 \times 3 \times 11$.

Exercice 7.

Exercices 45 à 47 page 48 du manuel.

Correction exercice 7

Exercice 45 page 48. $36 = 2^2 \times 3^2$, $54 = 2 \times 27$, $98 = 2 \times 49$, $126 = 2 \times 3^2 \times 7$.

Exercice 46 page 48. $42 = 2 \times 3 \times 7$. $88 = 2^2 \times 11$. $195 = 3 \times 5 \times 11$. $396 = 2^2 \times 3^2 \times 11$.

Exercice 47 page 48. $306 = 2 \times 3^2 \times 17$. $124 = 2^2 \times 31$. $2220 = 2^2 \times 3 \times 5 \times 37$. $4692 = 2^2 \times 3 \times 17 \times 23$.

3 Forme irréductible d'une fraction.

Rappelons qu'il est possible de simplifier une fraction si son numérateur et son dénominateur sont des produits avec un facteur commun.

Si b et k sont non nuls :

$$\frac{a \times k}{b \times k} = \frac{a}{b},$$

car ici k est facteur commun au numérateur et au dénominateur.

Exemples.

1. $\frac{7\times4}{5\times4} = \frac{7}{5}$.
2. $\frac{2\times5\times7\times26}{3\times5\times26}$.
3. $\frac{5}{5\times3} = \frac{5\times1}{5\times3} = \frac{1}{3}$.
4. $\frac{3^4}{3^5} = \frac{3\times3\times3\times3}{3\times3\times3\times3\times3} = \frac{\cancel{3}\times\cancel{3}\times\cancel{3}\times\cancel{3}}{\cancel{3}\times\cancel{3}\times\cancel{3}\times\cancel{3}\times\cancel{3}} = \frac{1}{3}$.

Définition 3

Soient a et b des entiers avec $b \neq 0$.
Nous dirons que la fraction $\frac{a}{b}$ est *irréductible* si les nombres a et b n'ont pas de diviseur commun.

1. $-\frac{1}{3}$, $\frac{1}{2}$, $-\frac{1}{7}$, $\frac{5}{3}$ sont des formes irréductibles.
2. $\frac{18}{12}$ n'est pas une forme irréductible puisque : $\frac{18}{12} = \frac{6\times3}{4\times3} = \frac{6}{4}$.

L'écriture irréductible d'une fraction est une sorte de carte d'identité pour une fraction. Elle permet de vérifier si deux fractions sont égales ou pas.

Pour trouver la forme irréductible d'une fraction il faut simplifier les facteurs communs dans la décomposition en facteurs premiers des numérateurs et dénominateurs.

Exemples.

1.

Exercice 8.

Exercices 41 à 44 et 48 page 48.

Correction exercice 8

Exercice 41 page 48. $\frac{8}{11} = \frac{2^3}{11}$. $\frac{7}{14} = \frac{1\times7}{2\times7} = \frac{1}{2}$. $\frac{15}{9} = \frac{3\times5}{3^2} = \frac{5}{3}$. $\frac{17}{18} = \frac{17}{2\times3^2}$. $\frac{24}{17} = \frac{2^3\times3}{17}$.

Exercice 42 page 48. $\frac{5}{15} = \frac{1\times5}{3\times5} = \frac{1}{3}$. $\frac{12}{7} = \frac{2^2\times3}{7}$. $\frac{19}{16} = \frac{19}{2^4}$. $\frac{12}{9} = \frac{2^2\times3}{3^2} = \frac{2^2}{3} = \frac{4}{3}$. $\frac{36}{23} = \frac{2^2\times3^2}{23}$.

Exercice 44 page 48. $\frac{444}{814} = \frac{2\times3}{11}$. $\frac{814}{444} = \frac{11}{2\times3}$. $\frac{4440}{8140} = \frac{2\times3}{11}$.

Exercice 48 page 48. $\frac{126}{168} = \frac{2\times3^2\times7}{2^3\times3\times7} = \frac{3}{2}$. $\frac{140}{340} = \frac{2^2\times5\times7}{2^2\times5\times17} = \frac{7}{17}$. $\frac{625}{1125} = \frac{5^4}{3^2\times5^3} = \frac{5}{3^2} = \frac{5}{9}$. $\frac{7140}{2310} = \frac{2^2\times3\times5\times7\times17}{2\times3\times7\times11} = \frac{2\times17}{11} = \frac{34}{11}$.

4 Exercices.

Exercice 9.

Exercice 51 page 49 : plus grand diviseur commun.

Correction exercice 9

1. $80 = 2^4 \times 5$. $110 = 2 \times 5 \times 11$.
2. Le plus grand diviseur commun : $2 \times 5 = 10$.
3. (a) 10.
   (b) 8 et 11 dans chaque lot.

Exercice 10.

Exercices 55 page 49 : plus grand diviseur commun.

Correction exercice 10

1. $7950 = 2 \times 3 \times 5^2 \times 53$. $5400 = 2^3 \times 3^3 \times 5^2$.
2. Le plus grand commun diviseur, p, est formé du produit de tous les facteurs premiers commun au deux nombres répétés autant de fois qu'ils sont facteurs commun. Par exemple 2 est diviseur commun mais pas 2^2, ou encore 52 est diviseur commun. Donc : $p = 2 \times 3 \times 5^2 = 150$.
3. (a) Le nombre maximum de bol est de 150.
   (b) La masse dans un bol est alors en gramme

$$\begin{aligned} m &= \frac{7950 + 5400}{150} \\ &= 89 \end{aligned}$$

Exercice 11.

Exercices 56 page 49 : plus grand diviseur commun.

Correction exercice 11

1. $2700 = 2^2 \times 3^3 \times 5^2$. $4050 = 2 \times 3^4 \times 5^2$. $5400 = 2^3 \times 3^3 \times 5^2$.
2. $a \times b = 2^2 \times 3^3 \times 5^2$ et $b \times c = 3^4 \times 5^2$ et $a \times c = 2^3 \times 3^3 \times 5^2$.