Expression littérale.

I Évaluer une expression littérale en remplaçant la lettre par un nombre.

1 Expression littérale.

Une *expression littérale* est une formule de calcul dans laquelle à la place des nombres ont peut trouver des lettres.

Exemples.

1.

Exercice 1.
Exercices 2, 9, 10 page 66, 11, 12 page 67.

Exo 11 page 67.

(a) Il faut 7 allumettes.

(b) Pour faire un triangle de plus il faut ajouter 2 allumettes. À partir du premier triangle nous rajoutons 11 fois deux allumettes : $3+2+2+2+2+2+2+2+2+2+2+2 = 3+11\times 2 = 25$.

(c) $3+999\times 2 = 2001$.

(d) Il faut $3+(n-1)\times 2$ allumettes pour construire n triangles.

Exo 12 page 67.

(a)

TVA 20 %	$= B1 * 20/100$
TVA 10 %	$= B1 * 10/100$
TVA 8,5 %	$= B1 * 8{,}5/100$
TVA 5,5 %	$= B1 * 5{,}5/100$
TVA 2,1 %	$= B1 * 2{,}1/100$

(b)

TVA 20 %	$P \times \frac{20}{100}$
TVA 10 %	$P \times \frac{20}{100}$
TVA 8,5 %	$P \times \frac{8{,}5}{100}$
TVA 5,5 %	$P \times \frac{5{,}5}{100}$
TVA 2,1 %	$P \times \frac{2{,}1}{100}$

2 Évaluer.

Évaluer une expression littérale c'est calculer sa valeur lorsqu'on remplace ses lettres par des nombres.

Exemples.

1. Si $x = 3$ alors

$$\begin{aligned}(2x+1)^2 &= (2\times 3+1)^2\\ &= (6+1)^2\\ &= 7^2\\ &= 49\end{aligned}$$

2. S $x = -2$ alors

$$\begin{aligned}3(1-2x) &= 3(1-2\times(-2))\\ &= 3(1+4)\\ &= 15\end{aligned}$$

Cela nécessite de connaître les règles de priorité :

1. parenthèses ou crochets,
2. numérateurs et dénominateurs,
3. puissances,
4. produit et division en ligne,
5. addition et soustraction.

Exercice 2. Évaluer.

Exercices 4, 5, 6 et page 66.

Exo 4 page 67.

(a) Si $x = 0$ alors

$$\begin{aligned}2x^3+4x^2+3 &= 2\times 0^3+4\times 0^2+3\\ &= 2\times 0+4\times 0+3\\ &= 3\end{aligned}$$

(b) Si $x = 4$ alors

$$\begin{aligned} 2x^3 + 4x^2 + 3 &= 2 \times 4^3 + 4 \times 4^2 + 3 \\ &= 2 \times 64 + 4 \times 16 + 3 \\ &= 195 \end{aligned}$$

(c) Si $x = 10$ alors

$$2x^3 + 4x^2 + 3 = 2403$$

Exo 6 page 67.

(a) Si $x = -7$ alors

$$10x - 2 = -72$$

(b) Si $x = -7$ alors

$$13 - x = 20$$

(c) Si $x = -7$ alors

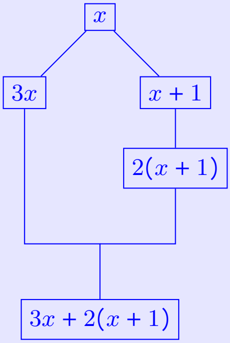
$$x^2 + 11 = 60$$

Exercice 3. Programme de calcul.

Exercice 8 page 66.

Exercice 4.

L'expression littérale $3x + 2(x+1)$ peut se représenter par le programme de calcul suivant :



Donnez le programme de calcul qui s'applique à x traduisant les expressions littérales suivantes.

1. $A = 2x + 3$.
2. $B = -3x - (x+1)$.
3. $C = 3x^2$.
4. $D = -2x + x^2$.
5. $E = 5(x+1) - (x+1)x^2$.

Exercice 5.

Calculez les expressions suivantes.

1. $2 \times 3 + 3 \times 5$.
2. $5 + 3 \times 12$.
3. $3 + 3 \times 3 + 3$.
4. $5 - 2 \times 1$.

Correction exercice 5

1.

$$\begin{aligned} 2 \times 3 + 3 \times 5 &= 6 + 15 \\ &= 21 \end{aligned}$$

2.

$$\begin{aligned} 5 + 3 \times 12 &= 5 + 36 \\ &= 41 \end{aligned}$$

3.

$$\begin{aligned}3+3\times3\times3 &= 3+9\times3\\ &= 3+27\\ &= 30\end{aligned}$$

4.

$$\begin{aligned}5-2\times1 &= 5-2\\ &= 3\end{aligned}$$

Exercice 6.

Calculez les expressions suivantes.

1. $5\times5+5\times5$.
2. $5+5\times5+5$.
3. $5+5\times5\times5$.
4. $5+5+5\times5$.

Correction exercice 6

1.

$$\begin{aligned}5\times5+5\times5 &= 25+25\\ &= 50\end{aligned}$$

2.

$$\begin{aligned}5+5\times5+5 &= 5+25+5\\ &= 30+5\\ &= 35\end{aligned}$$

3.

$$\begin{aligned}5+5\times5\times5 &= 5+25\times5\\ &= 5+125\\ &= 130\end{aligned}$$

4.

$$\begin{aligned}5+5+5\times 5 &= 5+5+25\\ &= 10+25\\ &= 35\end{aligned}$$

Exercice 7.

Parmi les égalités suivantes, certaines sont vraies. Lesquelles ?

1. $2\times 5{,}3+0{,}4-1=10$.
2. $3\times 0{,}1-0{,}1=0$.
3. $53+3\times 10=560$
4. $9+5\times 4=29$.

Correction exercice 7

1. Vraie.
2. Fausse.
3. Fausse.
4. Vraie.

Exercice 8.

Parmi les égalités suivantes, certaines sont fausses. Lesquelles ?

1. $5\times 24+30=270$.
2. $9\times 21-10=179$.
3. $5\times 4+3\times 9=155$.
4. $9\div 3\times 6-1=17$.

Correction exercice 8

1. Fausse.
2. Vraie.
3. Fausse.
4. Vraie.

Exercice 9.

Dans les expressions suivantes supprimez les parenthèses inutiles.

1. $((4 \times 9) + (3 \times 5))$.
2. $(3 \times 5) \times (5 \times 9)$.
3. $(3 + 5) + (5 \times 9)$.
4. $(5 - (3 + 1))$.

Correction exercice 9

1. $4 \times 9 + 3 \times 5$.
2. $3 \times 5 \times 5 \times 9$.
3. $3 + 5 + 5 \times 9$.
4. $5 - (3 + 1)$.

Exercice 10.

Dans les expressions suivantes supprimez les parenthèses inutiles.

1. $(2 \times 10) + ((10 \times 15) + (15 \times 20))$.
2. $((9 \div 8) \times 5 + (8 \times 7))$.
3. $2 \times (3 + (5 \times 4))$.
4. $(2 \times (3 \times (5 \times (6 + 7))))$.

Correction exercice 10

1. $2 \times 10 + 10 \times 15 + 15 \times 20$.
2. $9 \div 8 \times 5 + 8 \times 7$.
3. $2(3 + 5 \times 4)$.
4. $2 \times 3 \times 5 \times (6 + 7)$.

II Nature d'une expression littérale.

On dit qu'une expression littérale est un somme si la dernière opération effectuée en respectant les priorités opératoires est une somme lorsqu'on évalue cette expression.

Nous dirons de même produit, quotient, différence, si la dernière opération est un produit, un quotient, une somme.

Exemples.

1.

Exercice 11.

1. $2x + 3$.
2. $3(x + 2)$.
3. $7x - (x + 1)$.
4. $3x^2 + x$.
5. $(x + 1)(x + 1)$.
6. $4(x + 3)^2$.
7. $(x - 2)^2$.

Exercice 12.

1. $3x + 4x$.
2. $2 + 3x^2$.
3. $7 \div (x + 1)^2$.
4. $(2x + 3)x$.
5. $x^2 - 7^2$.
6. $x + 2 + x^2$.
7. $(x - 1)(x + 3)$.
8. x^3.

Correction exercice 12

1. Somme.
2. Somme.
3. Quotient.
4. Produit.
5. Différence.
6. Somme.
7. Produit.
8. Produit.

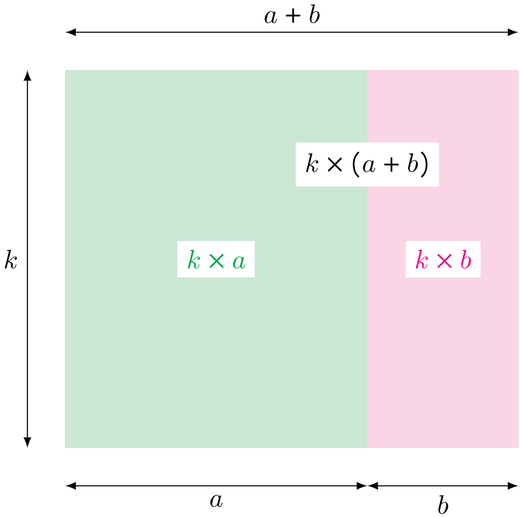
III Distributivité.

1 La propriété.

Nous dirons que *la multiplication est distributive par rapport à l'addition* car, quelque soient les nombres a, b et k nous avons :

$$k \times (a + b) = k \times a + k \times b.$$

Ce résultat peut s'interpréter comme un calcul d'aire :



Exemples.

1. Voici deux façon, de d'effectuer $7 \times (3+5)$.

$$\begin{aligned} & 7 \times \underbrace{(3+5)}_{} \\ = \; & 7 \times 8 \\ = \; & 56 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & 7\times (3+5) \\ = \; & \underbrace{7\times 3}_{} + \underbrace{7\times 5}_{} \\ = \; & 21 + 35 \\ = \; & 56 \end{aligned}$$

2. Cela peut parfois permettre du calcul mental : $123 \times 12 = 123 \times (10+2) =$.
3. $-3 \times (a+b)$
4. $5 - 2(x-1)$.

Il est possible de présenter différemment la distributivité :

$$(a+b) \times k = (a \times k) + (b \times k)$$
$$k \times (a-b) = k \times a + k \times b$$
$$(a-b) \times k = a \times k + b \times b$$

Exercice 13.

Calculez de deux façons les expressions suivantes :

1. $A = 2{,}1 \times (3{,}4 + 5{,}7)$.
2. $B = 5{,}5 \times (2 - 3{,}6)$.
3. $C = \frac{2}{3} \times (3{,}9 + 5{,}1)$.
4. $D = \left(\frac{2}{3} - \frac{5}{4} + 1\right) \times \frac{12}{7}$.

Correction exercice 13

1. 19,11.
2. $-8{,}8$.
3. 6.
4. $\frac{52}{35}$.

Exercice 14.

Calculez de deux façons les expressions suivantes :

1. $A = -3{,}1 \times (3 - 5{,}7)$.
2. $B = -3{,}2 \times \left(-\frac{1}{4} + \frac{1}{16}\right)$.
3. $C = \left(\frac{5}{7} + \frac{7}{5}\right) \times \left(-\frac{35}{3}\right)$.
4. $D = \left(\frac{1}{2} - \frac{2}{3} - \frac{3}{4}\right) \times \frac{9}{4}$

Correction exercice 14

1. 8,37.
2. 0,6.
3. $-\frac{74}{3}$.
4. $-\frac{33}{16}$.

2 Simplifier l'écriture.

La distributivité permet de simplifier les expressions littérales.

Exemples.

1.

$$\begin{aligned} 2a + 3a &= (2+3)a \\ &= 5a \end{aligned}$$

2.

$$\begin{aligned} 2b + b &= 2b + 1 \times b \\ &= (2+1)b \\ &= 3b \end{aligned}$$

Exercice 15.

Simplifiez les expressions suivantes en utilisant la distributivité.

1. $2{,}5c + 3c$.
2. $4t + 0{,}5t$.
3. $3t + t$.
4. $5{,}6b - 2b$.

Exercice 16.

Simplifiez les expressions suivantes en utilisant la distributivité.

1. $2x + 5x - 3x$.
2. $2x + 5x - x$.
3. $3y - 2{,}4y - 1$.
4. $2a + 5x - x + 3a$.

Correction exercice 16

1. $2x + 5x - 3x = 4x$.
2. $2x + 5x - x = 5x$.
3. $3y - 2{,}4y - 1 = -0{,}4y$.
4. $2a + 5x - x + 3a = 5a + 4x$.

Exercice 17.

Simplifiez les expressions suivantes en utilisant la distributivité.

1. $x + x$.
2. $y + y + y$.
3. $x + x + y + y + y$.
4. $x + 2x + y + 3y + z + 4z$.

Correction exercice 17

1. $x + x = 2x$.
2. $y + y + y = 3y$.
3. $x + x + y + y + y = 2x + 3y$.
4. $x + 2x + y + 3y + z + 4z = 3x + 4y + 5z$.

Exercice 18.

Simplifiez les expressions suivantes en utilisant la distributivité.

1. $2(3x+5x)$.
2. $(3z-2z)\times 8$.
3. $(5t+2t)(3w-w)$.
4. $2x+x\times x$.

Correction exercice 18

1. $2(3x+5x) = 16x$.
2. $(3z-2z)\times 8 = 8z$.
3. $(5t+2t)(3w-w) = 12tw$.
4. $2x+x\times x = x^2+2x$.

Exercice 19.

Simplifiez les expressions suivantes en utilisant la distributivité.

1. $(t+t)\times 3$.
2. $3+t\times 3$.
3. $(t+t)+3$.
4. $t\times(t\times 3)$.

Correction exercice 19

1. $(t+t)\times 3 = 6t$.
2. $3+t\times 3 = 3t+3$.
3. $(t+t)+3 = 2t+3$.
4. $t\times(t\times 3) = 3t^2$.

Exercice 20.

Complétez les égalité suivantes.

1. $8x = 5x + \dots$
2. $8x = 4x \times \dots$
3. $8x = 2 \times \dots$
4. $8x = 12x - \dots$

Correction exercice 20

1. $8x = 5x + 3x$
2. $8x = 4x \times 2$
3. $8x = 2 \times 4x$
4. $8x = 12x - 4x$

Exercice 21.

Complétez les égalité suivantes.

1. $14ab = 7ab + \dots$
2. $14ab = 7a \times \dots$
3. $14ab = 20ab - \dots$
4. $14ab = 7b \times \dots$

Correction exercice 21

1. $14ab = 7ab + 7ab$
2. $14ab = 7a \times 2$
3. $14ab = 20ab - 6ab$
4. $14ab = 7b \times 2a$

Exercice 22.

Complétez les égalité suivantes.

1. $6x^2 = 2x^2 + \dots$
2. $6x^2 = 12x^2 - \dots$
3. $6x^2 = 2 \times \dots$
4. $6x^2 = 3x \times \dots$

Correction exercice 22

1. $6x^2 = 2x^2 + 4x^2$
2. $6x^2 = 12x^2 - 6x^2$
3. $6x^2 = 2 \times 3x^2$
4. $6x^2 = 3x \times 2x$

3 Montrer que deux expressions littérales sont égales.

Il est possible qu'il existe plusieurs formules littérales pour un même calcul.

Ainsi les formules $-2(x-1)^2+8$ et $-2(x-3)(x+1)$ permettent le même calcul ; vous pouvez le conjecturer en testant différentes valeurs de x.

Pour démontrer que deux expressions littérales sont égales (*i.e.* elles réalisent le même calcul) il faut essayer de

— les développer avec la distributivité,

— puis de les simplifier avant de les comparer.

Exemples.

1. $A = (2x-4) \times 3$ et $B = 2 \times (3x-6)$ sont égales car avec la distributivité on a d'une part :

$$\begin{aligned} A &= 2x \times 3 - 4 \times 3 \\ &= 2 \times 3x - 12 \\ &= 6x - 12 \end{aligned}$$

et d'autre part

$$\begin{aligned} B &= 2 \times 3x - 2 \times 6 \\ &= 6x - 12 \end{aligned}$$

On remarque que $A = B$.

2. Montrons que $(x+3) \times 2 - 3 \times (x-4) = -x + 18$.

Exercice 23.

Simplifiez les expressions suivantes où a, b e m désignent des nombres relatifs.

1. $A = 2 \times (a+3) - 5 \times (b-4)$.
2. $B = -3 \times (3-a) - 4 \times (3-b)$.
3. $C = 9 \times (4 - a + b) - 3 \times (5 - 3a + 3b)$.
4. $D = (2m-3) - 2(-5+m)$.

Exercice 24.

Simplifiez les expressions suivantes où a, b e m désignent des nombres relatifs.

1. $A = \frac{2}{3} \times (9 - 3 \times (a+8))$.
2. $B = (5 \times (a+8) - a(5+a)) \div 2$.
3. $C = 2 \times (a + a(-b+a))$.
4. $D = 2 - (a-2b) \times \left(-\frac{4}{5}\right)$.

Exercice 25.

Développez les produits et réduisez la somme obtenue. Par exemple : $2{,}1a - 0{,}3a = (2{,}1 - 0{,}3) \times a = 1{,}8a$.

1. $A = a \times (a-2) - a \times (3+a)$.
2. $B = 2 \times (a - 1{,}1) + 3 \times (5-a)$.
3. $C = 2{,}3 \times (a-b) - 5 \times (a+b)$.
4. $D = a \times (b-a) + b \times (a+b)$.

Exercice 26.

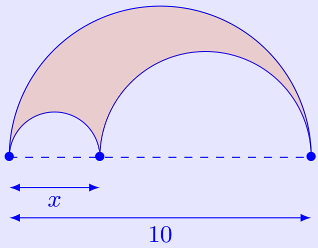
Montrez en distribuant que A et B sont en fait la même expression littérale.

1. $A = 3 \times (x+3) - 4$ et $B = 2(x-6) + 17 + x$.
2. $A = x + 3 \times (x+4) - 10$ et $B = 2 \times (2 \times x + 1)$.
3. $A = x \times (2+x) - 3$ et $B = x^2 + 2x - 3$.
4. $A = x \times (2-x) + x^2$ et $B = (x-1) \times 2 + 2$.

IV Exercices.

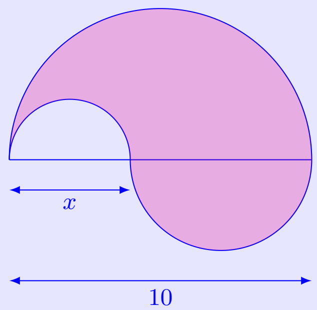
Exercice 27.

Exercice 28. Arbelos ou tricercle de Mohr



Calculez le périmètre de la surface colorée en fonction de x.
Que constatez-vous ?

Exercice 29. Un autre tricercle.



1. Calculez l'aire de la surface coloriée en fonction de x.
2. Vérifiez que l'expression obtenue pour $x = 0$ puis $x = 10$ puis $x = 5$ convient (faire un dessin dans chaque cas).

Correction exercice 29

1. * Aire du demi-disque de diamètre 10 :

$$\begin{aligned}
\mathscr{A}_1 &= \frac{1}{2} \times \pi R^2 \\
&= \frac{1}{2} \times \pi \times \left(\frac{10}{2}\right)^2 \\
&= \frac{1}{2} \times \pi \times 5^2 \\
&= \frac{25}{2}\pi
\end{aligned}$$

* Aire du demi-disque de diamètre x :

$$\begin{aligned}
\mathscr{A}_2 &= \frac{1}{2} \times \pi R^2 \\
&= \frac{1}{2} \times \pi \times \left(\frac{x}{2}\right)^2 \\
&= \pi \times \frac{1}{2} \times \frac{x}{2} \times \frac{x}{2} \\
&= \pi \times \frac{x^2}{2^3} \\
&= \pi \times \frac{x^2}{8} \\
&= \frac{\pi}{8}\pi x^2
\end{aligned}$$

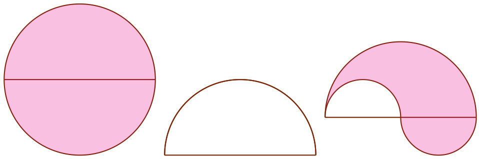
* Aire du demi-disque de diamètre $10 - x$:

$$\begin{aligned}
\mathscr{A}_3 &= \frac{1}{2} \times \pi R^2 \\
&= \frac{1}{2} \times \pi \times \left(\frac{10-x}{2}\right)^2 \\
&= \pi \times \frac{1}{2} \times \frac{10-x}{2} \times \frac{10-x}{2} \\
&= \pi \times \frac{(10-x)^2}{2^3} \\
&= \pi \times \frac{(10-x)^2}{8} \\
&= \frac{\pi}{8}(10-x)^2
\end{aligned}$$

Donc l'aire coloriée est

$$\begin{aligned}
\mathscr{A} &= \mathscr{A}_1 - \mathscr{A}_2 + \mathscr{A} - 3 && (1) \\
&= 12{,}5\pi - \frac{\pi}{8}x^2 + \frac{\pi}{8}(10-x)^2 && (2)
\end{aligned}$$

2. Puisqu'il s'agit de faire plusieurs dessins en changeant des valeurs il est pertinent ici d'utiliser un logiciel de géométrie dynamique (géogébra).



Nous devrions donc avoir 25π, 0 et $\frac{25}{2}\pi$ respectivement pour aire des différentes figures.

- Si $x = 0$ alors

$$\begin{aligned}\mathscr{A} &= 12{,}5\pi - \frac{\pi}{8} \times 0^2 + \frac{\pi}{8}(10-0)^2 \\ &= 12{,}5\pi + \frac{\pi}{8} \times 100 \\ &= 12{,}5\pi + 12{,}5\pi \\ &= 25\pi\end{aligned}$$

- Si $x = 10$ alors

$$\begin{aligned}\mathscr{A} &= 12{,}5\pi - \frac{\pi}{8} \times 10^2 + \frac{\pi}{8}(10-10)^2 \\ &= 12{,}5\pi - \frac{\pi}{8} \times 100 \\ &= 12{,}5\pi - 12{,}5\pi \\ &= 0\end{aligned}$$

- Si $x = 5$ alors

$$\begin{aligned}\mathscr{A} &= 12{,}5\pi - \frac{\pi}{8} \times 5^2 + \frac{\pi}{8}(10-5)^2 \\ &= 12{,}5\pi - 25\frac{\pi}{8} + 25\frac{\pi}{8} \\ &= 12{,}5\pi\end{aligned}$$

Exercice 30.