Puissances.

I Rappels et définition

1 La multiplication.

$$2 \times 3 = 6.$$

- Les nombres 2×3 ou 6 sont appelés le *produit* de la multiplication.
- Les nombres 2 et 3 sont appelés les *facteurs* du produit $2 \times 3 = 6$.
- Le symbole $\times$ se lit « fois ». Lorsque cela ne gêne pas la compréhension on simplifie l'écriture en enlevant le symbole $\times$: $2 \times (3+4) = 2(3+4)$.
- La multiplication est *commutative* : si a et b sont des nombres alors $a \times b = b \times a$.
- La multiplication est *associative* : si a, b et c sont des nombres alors $a \times (b \times c) = (a \times b) \times c$. Nous simplifierons donc l'écriture en $a \times b \times c$.
- Le nombre 1 est appelé un *élément neutre pour la multiplication* : si a est un nombre alors $a \times 1 = 1 \times a = a$.
- Un nombre b est appelé *l'inverse* du nombre a si $a \times b = 1$. On note alors $b = a^{-1}$ ou $b = \frac{1}{a}$.

2 Puissances.

Si a est un nombre et n un entier naturel, alors $a^0 = 1$, $a^1 = a$, $a^2 = a \times a$, ..., $x^n = \underbrace{x \times \cdots \times x}_{n \text{ facteurs}}$

x^n se lit « x puissance n » ou « x exposant n ».

Exemples.

1. $3^2 = 3 \times 3 = 9$,
2. $2^4 = 2 \times 2 \times 2 \times 2 = 16$,
3. $1^4 = 1 \times 1 \times 1 \times 1$,
4. $10^9 = 10 \times 10 \times 10 \times 10 \times 10 \times 10 \times 10 \times 10 \times 10 = 1\,000\,000\,000$,
5. $2 \times 4^2 = 2 \times 4 \times 4 = 32$,
6. $(-2)^0 = 1$,
7. $(-2)^1 = -2$,
8. $(-2)^2 = (-2) \times (-2) = 4$,
9. $(-2)^3 = (-2) \times (-2) \times (-2) = -8$,
10. $(7^2)^3 = (7\times7)^3 = (7\times7)\times(7\times7)(7\times7) = 7\times7\times7\times7\times7\times7 = 7^6 = 117\,649$,

11. $\left(\frac{3}{5}\right)^2 = \frac{2}{5} \times \frac{2}{5} = \frac{2\times 2}{5\times 5} = \frac{4}{25}$,
12. $27 = 3 \times 9 = 3 \times 3 \times 3 = 3^3$.

Remarques.

1. a^2 se lit aussi « a au carré »
2. a^3 se lit aussi « a au cube ».
3. Les puissances sont prioritaires sur les produits : $2 \times 3^2 = 2 \times (3^2)$ mais $2 \times 3^2 \neq (2 \times 3)^2$.
   Donc les règles de priorité sont : parenthèses ou crochets, numérateurs et dénominateurs, puissances, produit et division en ligne, addition et soustraction.
4. L'unité de mesure d'aire cm^2 est effectivement le résultat d'un produit de mesure de longueur : $\text{cm}^2 = \text{cm} \times \text{cm}$.

Exercice 1. Simplifier une écriture.

Simplifiez les écritures suivantes en utilisant la notation des puissances.

1. $A = 2 \times 3 \times 2$.
2. $B = 3 \times 5 \times 3^4 \times 5$.
3. $C = 2^5 \times 7^2 \times 2^2 \times 7^{24}$.

Correction exercice 1

1.
$$\begin{aligned} A &= 2 \times 2 \times 3 \\ &= 2^2 \times 3 \end{aligned}$$

2.
$$\begin{aligned} B &= 3 \times 3^4 \times 5 \times 5 \\ &= 3 \times 3 \times 3 \times 3 \times 3 \times 5^2 \\ &= 3^5 \times 5^2 \end{aligned}$$

3.
$$\begin{aligned} C &= 2^5 \times 2^2 \times 7^2 \times 7^{24} \\ &= 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 7 \times 7 \times \underbrace{7 \times 7 \times \ldots \times 7}_{24 \text{ facteurs}} \\ &= 2^7 \times 7^{26} \end{aligned}$$

Exercice 2. Calculer avec des puissances.

Calculez à la main.

1. $A = 5^2$,
2. $B = 2^3$,
3. $C = (3^2)^3$,
4. $D = (-5)^2$,
5. $E = 0^{16}$,
6. $F = (-1)^{18}$,
7. $G = (-1)^{13}$,
8. $H = 7 \times 2^2$,
9. $I = 2 + 3^2$.

Correction exercice 2

1.
$$\begin{aligned} A &= 5 \times 5 \\ &= 25 \end{aligned}$$

2.
$$\begin{aligned} B &= 2 \times 2 \times 2 \\ &= 8 \end{aligned}$$

3.
$$\begin{aligned} C &= (3^2)^3 \\ &= 9^3 \\ &= 9 \times 9 \times 9 \\ &= 81 \times 9 \\ &= 729 \end{aligned}$$

4.
$$\begin{aligned} D &= (-5) \times (-5) \\ &= 25 \end{aligned}$$

5.
$$E = \underbrace{0 \times 0 \times \cdots \times 0}_{\text{16 facteurs}}$$

6.
$$\begin{aligned} F &= \underbrace{(-1) \times (-1) \times (-1) \times (-1) \times \cdots \times (-1) \times (-1)}_{\text{18 facteurs}} \\ &= 1 \times 1 \times \cdots \times 1 \qquad = 1 \end{aligned}$$

7.

$$\begin{aligned} G &= \underbrace{(-1)\times(-1)\times(-1)\times(-1)\times\cdots\times(-1)\times(-1)}_{12\text{ facteurs}}\times(-1) \\ &= 1\times 1\times\cdots\times 1\times(-1) \qquad = -1 \end{aligned}$$

8.

$$\begin{aligned} H &= 7\times 2\times 2 \\ &= 14\times 2 \\ &= 28 \end{aligned}$$

9.

$$\begin{aligned} I &= 2+3\times 3 \\ &= 2+9 \\ &= 11 \end{aligned}$$

Exercice 3. Écrire sous forme de puissance.

Exercice 12 page 45 du manuel.

Exercice 4. Problèmes : nombre de bactéries.

Exercice 20 page 45 du manuel.

Exercice 5. Recherche.

1. Retrouvez l'entier disparu dans l'égalité : $\ldots^3 + 6^3 + 8^3 = 9^3$.
2. Retrouvez les entiers disparus dans l'égalité : $\ldots^3 + \ldots^3 + \ldots^3 = 6^3$.

Exercice 6. Recherche.

1. Déterminez l'entier n tel que : $15^4 = 4^4 + 6^4 + 8^4 + n^4 + 14^4$.
2. Déterminez l'entier m tel que $12^5 = 4^5 + 5^5 + 6^5 + 7^5 + 9^5 + m^5$.

Exercice 7. Recherche.

1. Vérifiez que $1+3+3^3 = \dfrac{1-3^3}{1-3}$, puis que $1+4+4^2+4^3 = \dfrac{1-4^5}{1-4}$, enfin que $1+5+5^2+5^3+5^4 = \dfrac{1-5^5}{1-5}$.
2. Devinez (conjecturez) la valeur de $1+8+8^2+\cdots+8^7$ et vérifiez en utilisant la calculatrice.

II Puissances négatives.

Nous noterons x^{-1} l'inverse du nombre x :

$$x^{1} = \frac{1}{x}.$$

Nous généraliserons cette notation :

$$x^{-2} = \frac{1}{x^2},\ x^{-3} = \frac{1}{x^3},\dots$$

Exemples.

1. $2^{-2} = \frac{1}{2^2} = \frac{1}{4} = 0{,}25$.
2. $2^{-3} = \frac{1}{2^3} = \frac{1}{8} = 0{,}125$.
3. $3^{-1} = \frac{1}{3} = 0{,}333\dots$.
4. $10^{-5} = \frac{1}{10^5} = \frac{1}{100\,000} = 0{,}00001$.
5. $\dfrac{1}{2^{-2}} = \dfrac{1}{\frac{1}{2}} = \dfrac{\frac{1}{1}}{\frac{1}{2}} = \dfrac{1}{1} \times \dfrac{2}{1} = \dfrac{1 \times 2}{1 \times 1}$.
6. $\frac{3^3}{3^4} = \frac{3\times\times3\times3\times1}{3\times\times3\times3\times3}$.
7. $\left(\frac{3}{5}\right)^{-1} = \frac{5}{3}$. En effet $\frac{5}{3}$ est bien l'inverse de $\frac{3}{5}$ car : $\frac{3}{5} \times \frac{5}{3} = \frac{3\times5}{5\times3} = \frac{15}{15} = 1$.
8. $\left(\frac{3}{5}\right)^{-2} = \frac{1}{\frac{3}{5}} = \frac{\frac{1}{1}}{\frac{3}{5}} = \frac{1}{1} \times \frac{5}{3} = \frac{5}{3}$.

Remarques.

1. Une puissance négative signifie l'inverse de la puissance donc : $\frac{1}{3^{-7}} = 3^7$.

   De même : $\frac{2^3}{5^{-7}} = 2^3 \times 5^7$.

Exercice 8. Écrire sous forme de puissance.
Exercices 6 page 44 et 11 page 45 du manuel.

III Puissances de 10.

1 Rappels.

Si n est un nombre entier naturel :

$$10^n = \underbrace{100\dots0}_{n \text{ zéros}}$$

et

$$10^{-n} = \underbrace{0,00\ldots01}_{n \text{ chiffres après la virgule}}.$$

Exemples.

1. $10^1 = 10$.
2. $10^3 = 1\,000$.
3. $10^9 = 1\,000\,000\,000$. Un milliard.
4. $10^{-3} = 0{,}001$. Un millième.
5. $10^{-6} = 0{,}000001$. Un millionième.

Exercice 9.

Écrire sous forme de puissances de 10 :

1. $10\,000$; $1\,000$; 1 ; $0{,}1$.
2. 10 ; $0{,}001$; $0{,}000\,000\,1$.

Exercice 10.

Écrivez sous forme d'une puissance de 10.

1. $10^{-3} \times 10^5$; $10^7 \times 10^9$; $10^{-1} \times 10^{-3}$.
2. $10^5 \times 10^{-7}$; $10^{-3} \times 10$; $10^7 \times 10^{-5} \times 10^{-2}$.

Exercice 11.

Écrivez sous forme d'une puissance de 10.

1. $10^0 \times 10^3$; 10×0^{-1}.
2. $\left(10^{-6}\right)^2$; $\left(10^3\right)^3$; $\left(10^{-3}\right)^2 \times 10^4$.

Exercice 12.

Écrivez sous forme d'une puissance de 10.

1. $\frac{10^5}{10^{-3}}$; $\frac{10^3}{10^0}$; $\frac{10^9}{10^7}$.
2. $\frac{10^{-3}}{10^{-1}}$; $\frac{10^{-7}}{10^5}$; $\frac{10}{10^{-3}}$.
3. $\frac{10^{-1}}{10}$; $\frac{10^2}{0{,}1}$; $\frac{10^{-6}}{10^{h}-6}$.

Exercice 13.

Écrivez sous forme d'une puissance de 10, puis sous forme décimale les nombres suivants.

1. $(0{,}01)^2$; $\left(10^{-3}\right)^2 \times (100)^3$; $10^{-3} \times 0{,}001$.
2. $\frac{0{,}01}{10^{-3}}$; $10^5 \times 0{,}0001$; $\frac{10^{-4}}{0{,}01}$.

Exercice 14.

Donnez sous forme d'une puissance de 10 l'inverse des nombres suivants : 10 ; 0,01 ; 10^3 ; 10^{-6} ; 0,0001.

2 Unités.

Exercice 15. Cubes.

Combien un cube de 1 m de côté contient-il de cubes de 1 mm de côté.

Exercice 16.

Convertissez en mètre.

1. 1 mm ; 1 000 km.
2. 1 μm (1 μm = 10^{-3} mm) ;
3. 10 Gm (1 Gm = 10^6 km).

Exercice 17.

Convertissez en kg.

1. 0,1 g ; 1 000 tonnes ;
2. 0,01 mg ; 100 Mégatonnes (1 Mégatonne = 10^6 tonnes).

Exercice 18.

Convertissez en m^3.

1. 100 km^3 ; 1 mm^3 ; 1 μm^3.
2. 10 cm^3 ; 0,1 dm^3.

3 Écriture scientifique.

L'écriture scientifique d'un nombre positif c'est l'écriture d'un nombre sous forme d'un produit d'un nombre supérieur ou égale à 1 et inférieur strictement à 10 par une puissance de 10.

On définit de même l'écriture scientifique d'un nombre négatif.

Exemples.

1. $324 = 3{,}24 \times 10^2$.
2. $0{,}00789 = 7{,}89 \times 10^3$.
3. $0{,}345 \times 10^4 = 3{,}45 \times 10^3$.
4. $2{,}34 \times 10^2 + 5{,}67 \times 10^3 =$.
5. $2{,}34 \times 10^2 \times 5{,}67 \times 10^3 =$.

Remarques.

1. Lorsqu'un nombre est très grand, très petit ou très proche de zéro la calculatrice en donnera l'écriture scientifique.

Exercice 19. Écriture scientifique.

Exercices 7 et 8 page 44, 13 et 18 page 45 du manuel.

Exercice 20. Intérêt de l'écriture scientifique.

Exercice 19 page 45 du manuel.