23 Droites.

La définition moderne d'une droite.

Définition 1. Soient A et B deux points distincts du plan euclidien. Nous noterons (AB), et nous appellerons *droite passant par A et B*, l'ensemble de tous les points M du plan tels que $\overrightarrow{AM}$ soit colinéaire à $\overrightarrow{AB}$.

Remarques.

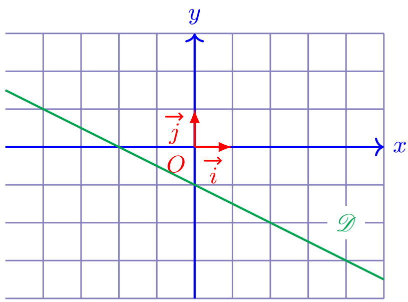
1. Le vecteur $\overrightarrow{AB}$, ou n'importe quel vecteur qui lui soit colinéaire et non nul est appelé *un vecteur directeur de la droite*.
2. Une autre formulation : (AB) est l'ensemble des points M tels que $\overrightarrow{AM} = t\overrightarrow{AB}$ lorsque t décrit $\mathbb{R}$. Si t décrit $\mathbb{R}_+$ on obtient $[AB)$. Si t décrit $\mathbb{R}_-$ on obtient $(AB]$. Si $t$décrit $[0;1]$ on obtient $[AB]$.
3. Cette définition décrit un lieu géométrique. De la même façon on peut définir un cercle comme l'ensemble des points équidistants d'un point (le centre du cercle).
4. Ainsi, si $M \in (AB)$, alors il existe $t \in \mathbb{R}$ tel que $\overrightarrow{AM} = t\overrightarrow{AB}$. Autrement dit t est l'abscisse de M dans le repère (A,B). Dans ce repère l'abscisse de A est 0 et celle de B est 1.
5. Pour définir une droite il faut et il suffit que nous en connaissions un point A et un vecteur directeur $\overrightarrow{u}$. Nous avions besoin de deux points et nous avons à nouveau besoin de deux informations.
6. Cette définition de la droite ne dépend pas d'un repère choisi et est donc très générale.
7. Interprétation de la définition en terme de translation : la droite (AB) est l'ensemble des points M images de A par les translations de vecteur $\lambda\overrightarrow{AM}$ oùλ prend toutes les valeurs possibles dans $\mathbb{R}$.
8. Si une droite passe par A et a pour vecteur directeur $\vec{u}$ alors l'image de A par la translation de vecteur $\vec{u}$ est aussi un point de la droite.

Tracer une droite connaissant un point et un vecteur directeur.

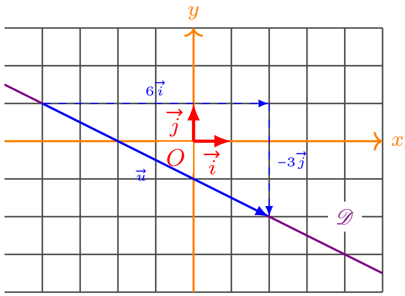
EXERCICE 1. Après avoir choisi un repère du plan dessinez la droite passant par $A(2,1)$ et dont un vecteur directeur est $\vec{u}\begin{pmatrix}3\\-2\end{pmatrix}$.

Décrire une droite par un point et un vecteur directeur.

EXERCICE 2. Sans justification donnez les coordonnées de 3 vecteurs directeurs de la droite $\mathscr{D}$ représentée ci-dessous dans un repère $\left(O;\overrightarrow{i},\overrightarrow{j}\right)$.



Exercice 2. Il suffit de trouver les coordonnées d'un vecteur « porté » par la droite. Pour avoir davantage de vecteurs directeurs on peut lire d'autres coordonnées ou prendre les coordonnées du précédent vecteur multiplié par n'importe quel nombre non nul.



Les vecteurs de coordonnées $\begin{pmatrix}6\\-3\end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix}2\\-1\end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix}-6\\3\end{pmatrix}$.

EXERCICE 3. Dans chacun des cas suivants, indiquez si le vecteur $\vec{u}$ est un vecteur directeur de la droite (AB).

a) $A(-14;2)$, $B(5;-3)$ et $\vec{u}\begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix}$.

b) $A(-7;3)$, $B(5;1)$ et $\vec{u}\begin{pmatrix}-6\\1\end{pmatrix}$.

c) $A(5;2)$, $B(0;-3)$ et $\vec{u}\begin{pmatrix}2\\-2\end{pmatrix}$.

d) $A(4;-2)$, $B(3;-4)$ et $\vec{u}\begin{pmatrix}4{,}5\\9\end{pmatrix}$.

Exercice 3.

a) Trivial : la réponse est non. Un vecteur nul ne peut être un vecteur directeur.

b) Déterminons si $\overrightarrow{AB}$ et $\vec{u}$ sont colinéaires.

$$\begin{aligned}\det\left(\overrightarrow{AB};\vec{u}\right) &= \begin{vmatrix}5-(-7) & -6\\ 1-3 & 1\end{vmatrix}\\ &= 12\times 1-(-6)\times(-2)\\ &= 0\end{aligned}$$

Ainsi $\overrightarrow{AB}$ et $\vec{u}$ sont colinéaires donc :

$\vec{u}$ est un vecteur directeur de (AB).

c) Déterminons si $\overrightarrow{AB}$ et $\vec{u}$ sont colinéaires.

$$\begin{aligned}\det\left(\overrightarrow{AB};\vec{u}\right) &= \begin{vmatrix}0-5 & 2\\ -3-2 & -2\end{vmatrix}\\ &= (-5)\times(-2)-(-5)\times 2\\ &= 20\\ &\neq 0\end{aligned}$$

Ainsi $\overrightarrow{AB}$ et $\vec{u}$ ne sont pas colinéaires donc :

$\vec{u}$ n'est pas un vecteur directeur de (AB).

d) Déterminons si $\overrightarrow{AB}$ et $\vec{u}$ sont colinéaires.

$$\begin{aligned}\det\left(\overrightarrow{AB};\vec{u}\right) &= \begin{vmatrix} 3-4 & 4{,}5 \\ -4-(-2) & 9 \end{vmatrix} \\ &= (-1)\times 9-(-2)\times 4{,}5 \\ &= 0\end{aligned}$$

Ainsi $\overrightarrow{AB}$ et $\vec{u}$ sont colinéaires donc :

$$\boxed{\vec{u} \text{ est un vecteur directeur de } (AB).}$$

EXERCICE 4. Dans chacun des cas suivants, calculez les coordonnées de trois vecteurs directeurs de (AB).

a) $A(2;3)$ et $B(-1;2)$.
b) $A(-5;4)$ et $B(3;1)$.
c) $A(3;0)$ et $B(0;3)$.
d) $A(7;8)$ et $B(7;9)$.

Exercice 4.

a) Puisque A et B sont distincts $\overrightarrow{AB}$ est un vecteur directeur de la droite (AB). $2\overrightarrow{AB}$ et $3\overrightarrow{AB}$ sont donc deux autres vecteurs directeurs de (AB).
$\begin{pmatrix}-3\\-1\end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix}-6\\-2\end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix}-9\\-3\end{pmatrix}$ sont les coordonnées de trois vecteurs directeurs de (AB).

b) $\begin{pmatrix}8\\-3\end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix}16\\-6\end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix}24\\-9\end{pmatrix}$ sont les coordonnées de trois vecteurs directeurs de (AB).

c)

d) $\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix}0\\2\end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix}0\\3\end{pmatrix}$ sont les coordonnées de trois vecteurs directeurs de (AB).

Parallélisme et vecteurs directeurs.

Maintenant que nous avons une définition de la droite nous allons reformuler les propriétés des droites avec cette définition.

Définition 2.

Nous dirons que deux droites sont *parallèles* si et seulement si elles ont des vecteurs directeurs colinéaires

Dans ce cas ont ont dit qu'elles ont la même direction.

EXERCICE 5. On considère une droite d passant par le point $A(3;1)$ et de vecteur directeur $\vec{u}\begin{pmatrix}-2\\3\end{pmatrix}$. Soient $B(7;-5)$, $C(-4;6)$ et $D(3;-4)$.

1. Tracez la droite d puis placez B, C et D.
2. Le point B appartient-il à d ?
3. Les droites d et (CD) sont-elles parallèles ?

Exercice 5.

1.
2. Déterminons si $\overrightarrow{AB}$ et $\vec{u}$ sont colinéaires.

$$\begin{aligned}\det\left(\overrightarrow{AB};\vec{u}\right) &= \begin{vmatrix} 7-3 & -2 \\ -5-1 & 3 \end{vmatrix} \\ &= 4\times 3-(-6)\times(-2) \\ &= 0\end{aligned}$$

Ainsi $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{u}$ sont colinéaires donc B appartient à la droite passant ar A et de vecteur directeur $\overrightarrow{u}$.

$$\boxed{B \in d.}$$

3. Déterminons si $\overrightarrow{CD}$ et $\overrightarrow{u}$ sont colinéaires.

$$\begin{aligned}\det\left(\overrightarrow{CD};\overrightarrow{u}\right) &= \begin{vmatrix} 3-(-4) & -2 \\ -4-6 & 3 \end{vmatrix} \\ &= 7\times 3 - (-10)\times(-2) \\ &= 1\end{aligned}$$

Ainsi $\overrightarrow{CD}$ et $\overrightarrow{u}$ ne sont pas colinéaires donc :

$$\boxed{d \text{ et } (CD) \text{ ne sont pas parallèles.}}$$

Perpendicularité et vecteurs directeurs.

La perpendicularité de deux droites nécessite d'introduire une nouvelle opération entre les vecteurs que vous verrez l'année prochaine appelée le *produit scalaire*. Donc patience ...

Équations cartésiennes.

EXERCICE 6. Soient A et B deux points du plan dont les coordonnées sont données dans un repère du plan. Soit $M(x,y)$ un troisième point.

1. Exprimez les coordonnées de $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AM}$.
2. Calculez $\det\left(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AM}\right)$.
3. À quelle condition portant sur $\det\left(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AM}\right)$ les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AM}$ sont-ils colinéaires ? Déduisez-en une condition sur x et y.
4. Si la précédente condition est vérifiée que peut-on dire des points A, B et M ?

Proposition 1. Soit $\left(O,\overrightarrow{i},\overrightarrow{j}\right)$ un repère du plan euclidien.

(i) Pour toute droite $\mathscr{D}$ il existe des réels a, b et c (avec a et b non simultanément nuls) tels que $\mathscr{D}$ est formée de tous les points $M(x,y)$ pour lesquels x et y vérifient l'équation $ax + by + c = 0$.

(ii) Réciproquement étant donné des réels a, b et c (avec a et b non simultanément nuls), l'ensemble des points $M(x;y)$ tels que x et y vérifient l'équation $ax+by+c = 0$ est une droite.

Démonstration.

(i) Soient $A(x_A,y_A)$ et $B(x_B,y_B)$ deux points distincts de $\mathscr{D}$.

$$\begin{aligned} M \in \mathscr{D} &\Leftrightarrow \det\left(\overrightarrow{AM};\overrightarrow{AB}\right) = 0 \\ &\Leftrightarrow \begin{vmatrix} x-x_A & x_B-x_A \\ y-y_A & y_B-y_A \end{vmatrix} = 0 \\ &\Leftrightarrow (x-x_A)(y_B-y_A) - (y-y_A)(x_B-x_A) = 0 \\ &\Leftrightarrow (y_B-y_A)x - (x_B-x_A)y - x_A(y_B-y_A) + y_A(x_B-x_A) = 0 \end{aligned}$$

Donc en posant $a = y_B - y_A$, $b = -(x_B - x_A)$ et $c = -x_A(y_B - y_A) + y_A(x_B - x_A)$ nous obtenons bien que x et y sont solution de l'équation $ax + by + c = 0$.

(ii) Cette démonstration est plus technique et astucieuse. Nous n'en présenterons ici que la trame.
Pour s'assurer que l'équation est celle d'une droite nous devons trouver une droite qui lui corresponde, *i.e.* un point et un vecteur directeur de cette droite.
Pour le point nous choisirons $\left(-\frac{c}{a}; 0\right)$ si $a \neq 0$ et $\left(0; -\frac{c}{b}\right)$ sinon.
Pour le vecteur directeur nous choisissons $\vec{u}\begin{pmatrix}-b\\ a\end{pmatrix}$ (ce choix astucieux s'inspire de la démonstration de (i)).
Il ne reste plus, en faisant comme au (i), qu'à vérifier que l'équation cartésienne obtenue pour ce point et ce vecteur directeur est bien : $ax + by + c = 0$.

Remarques.

1. Une équation cartésienne n'est pas unique : $x + 3y + 1 = 0$ et $2x + 6y + 2 = 0$ sont deux équations cartésiennes d'une même droite, la seconde étant obtenue en multipliant la première par 2.
2. Dans la suite de la leçon nous distinguerons trois types de droites correspondant à deux types d'équations différentes.
3. Le choix du vecteur directeur au (ii) de la démonstration est à retenir : si une droite à une équation cartésienne de la forme $ax + by + c = 0$ alors les vecteur de coordonnées $\begin{pmatrix}-b\\ a\end{pmatrix}$ en est un vecteur directeur.

EXERCICE 7. Soient $\left(O, \vec{i}, \vec{j}\right)$ un repère cartésien, $A(3; -1)$ un point et $\vec{u}\begin{pmatrix}-4\\ -102\end{pmatrix}$.

1. Déterminez une équation cartésienne de la droite $\mathscr{D}$ passant par A et de vecteur directeur $\vec{u}$.
2. Démontrer que $B\left(0; -\frac{155}{2}\right) \in \mathscr{D}$.

Exercice 7.

1. La méthode de la détermination d'une équation cartésienne à partir d'un point et d'un vecteur directeur est à connaître.

   Notons $\mathscr{D}$ la droite passant pas A et de vecteur directeur $\vec{u}$.

   Déterminons une équation cartésienne de $\mathscr{D}$.
   Soit $M(x; y) \in \mathscr{D}$.

   $M \in \mathscr{D}$ si et seulement si $\overrightarrow{AM}$ et $\vec{u}$ sont colinéaires, ce qui équivaut encore successivement à

$$\begin{aligned}
\det\left(\overrightarrow{AM}; \vec{u}\right) &= 0\\
\begin{vmatrix} x_{AM} & x_u \\ y_{AM} & y_u \end{vmatrix} &= 0\\
\begin{vmatrix} x-3 & -4 \\ y-(-1) & -102 \end{vmatrix} &= 0\\
(x-3)\times(-102) - (y+1)\times(-4) &= 0\\
-102x + 4y + 310 &= 0
\end{aligned}$$

$$\boxed{\mathscr{D} : \ -102x + 4y + 310 = 0.}$$

2. La méthode pour vérifier qu'un point appartient à une droite dont on connaît une équation est à savoir.

Vérifions que $B \in \mathscr{D}$.
$B \in \mathscr{D}$ si et seulement si ses coordonnées vérifient une équation cartésienne de $\mathscr{D}$.
Or

$$\begin{aligned} -102x_B + 4y_B + 310 &= -102 \times 0 + 4 \times \left(-\frac{155}{2}\right) + 310 \\ &= 0 \end{aligned}$$

donc

$$\boxed{B \in \mathscr{D}.}$$

Nous allons utiliser la remarque faites précédemment : si une droite a pour équation cartésienne $ax + by + c = 0$ alors $\vec{u}\begin{pmatrix}-b\\a\end{pmatrix}$ en est un vecteur directeur.

EXERCICE 8. Déterminez un vecteur directeur de la droite d.

a) $d:\ 4x - 3y + 1 = 0.$ b) $d:\ x - 5y + 2 = 0.$ c) $d:\ -x + 2y - 5 = 0.$

Exercice 8.

a) $\begin{pmatrix}-b\\a\end{pmatrix}$ est un vecteur directeur de la droite d'équation cartésienne $ax + by + c = 0$. Or ici $a = 4$, $b = -3$ et $c = 1$ donc $\vec{u}\begin{pmatrix}3\\4\end{pmatrix}$ est un vecteur directeur de d.

b) Voici une autre façon de déterminer un vecteur directeur d'une droite mais un peu plus lourde. Trouvons deux points distincts A et B de d et alors $\overrightarrow{AB}$ sera un vecteur directeur de d. Pour trouver un point choisissons une valeur de x au hasard et cherchons une valeur de y correspondante e sorte que ce soit un point de la droite.
Cherchons (si possible) $A \in d$ de sorte que $x_A = 0$ alors on devrait avoir $x_A - 5y_A + 2 = 0$ et donc $y_A = \frac{2}{5}$. $A\left(0; \frac{2}{5}\right)$ est un point de la droite.
De même si $x_B = 1$ alors $y_B = \frac{3}{5}$ et $B \in d$.
Donc $\overrightarrow{AB}$ est un vecteur directeur de d.

c) $\begin{pmatrix}-b\\a\end{pmatrix}$ est un vecteur directeur de la droite d'équation cartésienne $ax + by + c = 0$. Or ici $a = -1$, $b = 2$ et $c = -5$ donc $\begin{pmatrix}-2\\-1\end{pmatrix}$ est un vecteur directeur de d.

Équations réduites.

Les équations réduites sont des équations cartésiennes simplifiées qui font le lien entre équation cartésienne et fonction affine.

Pour une fonction affine chaque valeur indiquée sur l'axe des abscisses est reliée à une valeur sur l'axe des ordonnées. Les ordonnées, y, s'expriment en fonction des valeurs en abscisses, x.

Autrement dit pour définir un fonction nous devons obtenir une expression de la forme : $y = f(x)$. Nous allons l'obtenir à partir d'une équation cartésienne.

Exemples.

1. Soit $\mathscr{D}$ la droite dont une équation cartésienne dans un repère $\left(O; \vec{i}, \vec{j}\right)$ est $4x + 2y - 14 = 0$.

$$4x + 2y - 14 = 0$$

équivaut successivement à

$$\begin{aligned}
4x + 2y - 14 - 4x + 14 &= 0 - 4x + 14 \\
2y &= -4X + 14 \\
\frac{2y}{2} &= \frac{-4x + 14}{2} \\
y &= \frac{-4x}{2} + \frac{14}{2} \\
y &= -2x + 7
\end{aligned}$$

2. Soit d la droite dont une équation cartésienne dans un repère $\left(O; \vec{i}, \vec{j}\right)$ est $8y + 32 = 0$.
3. Soit $\mathcal{D}$ la droite dont une équation cartésienne dans un repère $\left(O; \vec{i}, \vec{j}\right)$ est $3x + 6 = 0$.

Proposition 2. Soient $\left(O; \vec{i}, \vec{j}\right)$ un repère du plan, $\mathscr{D}$ une droite du plan.

(i) Si $\mathscr{D}$ est parallèle à l'axe des ordonnées alors elle admet une équation réduite de la forme : $x = r$ avec r une constante réelle.

(ii) Si $\mathscr{D}$ n'est pas parallèle à l'axe des ordonnées alors elle admet une équation réduite de la forme : $y = mx + p$ avec m et p des constantes réelles.

Démonstration. Considérons une droite $\mathscr{D}$ d'équation cartésienne $ax + by + c = 0$ dans le repère $\left(O; \vec{i}, \vec{j}\right)$. Nous utiliserons le fait que le vecteur de coordonnées $\begin{pmatrix} -b \\ a \end{pmatrix}$ est alors un vecteur directeur de $\mathscr{D}$ et aussi le fait que a et b ne peuvent être simultanément nuls.

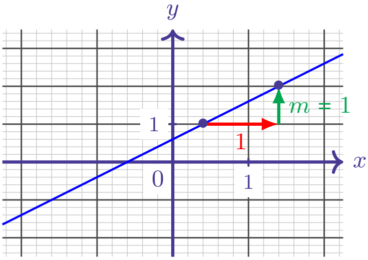
On distingue les deux cas.

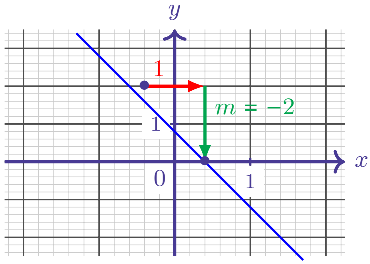
(i) Premier cas : la droite est parallèle à l'axe des ordonnées.
Donc le vecteur directeur $\vec{u}\begin{pmatrix} -b \\ a \end{pmatrix}$ est colinéaire à $\vec{j}$ et par conséquent : $-b = 0$ et $a \neq 0$.
Ainsi l'équation cartésienne de $\mathscr{D}$ se simplifie en $ax + c = 0$. Et puisque $a \neq 0$: $x = \frac{-c}{a}$.

(ii) Second cas : la droite n'est pas parallèle à l'axe des ordonnées.
Donc le vecteur directeur $\vec{u}\begin{pmatrix} -b \\ a \end{pmatrix}$ n'est pas colinéaire à $\vec{j}$ et nécessairement : $b \neq 0$.
Ainsi l'équation cartésienne de $\mathscr{D}$ peut s'écrire : $y = \frac{-a}{b}x + \frac{-c}{b}$.

Remarques.

1. Comme $y = mx + p \Leftrightarrow mx - y + p = 0$ nous pouvons affirmer que le vecteur de coordonnées $\begin{pmatrix} 1 \\ m \end{pmatrix}$ est un vecteur directeur de la droite d'équation réduite $y = mx + p$.
Nous obtenons ainsi une méthode de lecture graphique du coefficient directeur d'une droite.





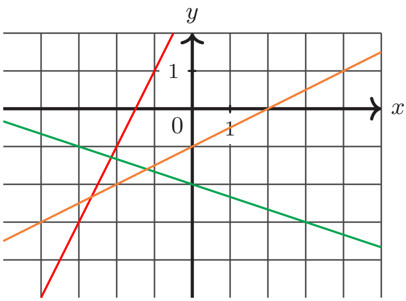
2. Nous reconnaissons, dans la seconde équation réduite, l'expression d'une fonction affine. m sera encore appelé la pente (ou le coefficient directeur) et p l'ordonnée à l'origine.

Proposition 3. Soient $\left(O;\overrightarrow{i},\overrightarrow{j}\right)$ un repère d'un plan euclidien, A et B deux points distincts du même plan.

Si (AB) admet une équation réduite de la forme $y = mx + p$ alors $m = \frac{y_B - y_A}{x_B - x_A}$.

Démonstration. En notant $f : x \mapsto mx + p$ nous remarquons que m est le taux d'accroissement de f entre x_A et x_B (puisque $y_A = f(x_A)$ et $y_B = f(x_B)$).

EXERCICE 9. Dans le repère ci-dessous sont dessinées des droites.



Déterminez les équations réduites des différentes droites.

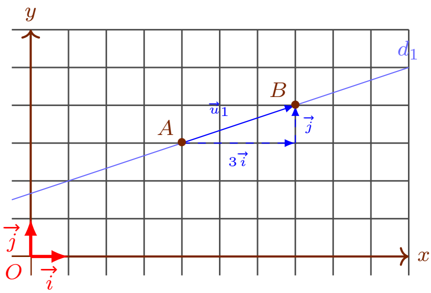
Exercice 9.

1. $\mathscr{T}_{-2}$: $y = 2x + 3$.
2. $\mathscr{T}_0$: $y = -\frac{1}{3}x - 2$.
3. $\mathscr{T}_2$: $y = \frac{1}{2}x - 1$.

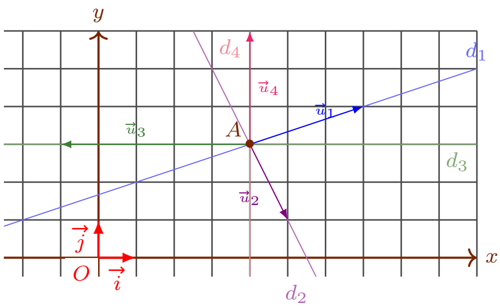
Exercices.

EXERCICE 10. On considère un point $A(4;3)$. Tracez quatre droites d_1 à d_4 passant par A et admettant respectivement pour vecteurs directeurs $\overrightarrow{u_1}\begin{pmatrix}3\\1\end{pmatrix}$, $\overrightarrow{u_2}\begin{pmatrix}1\\-2\end{pmatrix}$, $\overrightarrow{u_3}\begin{pmatrix}-5\\0\end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{u_4}\begin{pmatrix}0\\3\end{pmatrix}$.

Exercice 10. L'idée principale est la suivante pour tracer une droite nous devons en connaître deux points. Nous connaissons déjà A il faut en trouver un autre. Le plus simple est de prendre le point B tel que $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{u}$. Une autre façon de dire les choses nous cherchons l'image, B, de A par la translation de vecteur $\overrightarrow{u}$.



En procédant de même pour les autres vecteurs :



EXERCICE 11. Déterminez une équation cartésienne de la droite $\mathscr{D}$ passant par A et de vecteurs directeur $\vec{u}$.

a) $A(3;4)$ et $\vec{u}\begin{pmatrix}-1\\2\end{pmatrix}$. b) $A(-2;5)$ et $\vec{u}\begin{pmatrix}0\\-3\end{pmatrix}$. c) $A(5;-10)$ et $\vec{u}\begin{pmatrix}3\\1\end{pmatrix}$.
d) $A(0;4)$ et $\vec{u}\begin{pmatrix}5\\-1\end{pmatrix}$.

Exercice 11.

a) $\mathscr{D}:\ 2x+y-10=0$.
b) $\mathscr{D}:\ -3x-6=0$.
c) $\mathscr{D}:\ x+3y+25=0$.
d) $\mathscr{D}:\ x-5y+20=0$.

EXERCICE 12. Déterminez une équation cartésienne de la droite $\mathscr{D}$ passant par A et B.

a) $A(2;1)$ et $B(5;-6)$. b) $A(-3;0)$ et $B(1;1)$. c) $A(-1;7)$ et $B(0;3)$.
d) $A(6;8)$ et $B(3;2)$.

Exercice 12.

a) $-7x-3x+17=0$. b) $x-4y+3=0$. c) $-4x-y+3=0$.
d) $6x-3y-12=0$

EXERCICE 13. Soient $A(-3;4)$, $B(2;1)$ et $C(-1;-3)$.

1. Calculez les coordonnées du point M milieu de $[AC]$.
2. Déduisez-en une équation cartésienne de la médiane issue de B dans ABC.

Exercice 13.

1. $M\left(-2; \frac{1}{2}\right)$.
2. $\frac{1}{2}x - 4y + 3 = 0$.

EXERCICE 14. Déterminez une équation cartésienne de la droite $\mathscr{D}$ parallèle à (AB) et passant par C.

a) $A(5;4)$, $B(-1;2)$ et $C(4;-3)$.

b) $A(-5;-1)$, $B(6;4)$ et $C(1;2)$.

Exercice 14. (AB) et $\mathscr{D}$ sont parallèles si et seulement si tout vecteur directeur de l'une est vecteur directeur de l'autre droite.

a) $-2x + 6y + 26 = 0$.

b) $5x - 11y + 17 = 0$.

EXERCICE 15. Déterminez une équation cartésienne de la droite (AB) puis vérifiez si A, B et C sont alignés.

a) $A(-2;4)$, $B(7;2)$ et $C(11;1)$.

b) $A(-4;-1)$, $B(4;3)$ et $C(44;23)$.

c) $A(-26;20)$, $B(51;6)$ et $C(30;10)$.

d) $A(20;18)$, $B(72;40)$ et $C(124;62)$.

Exercice 15.

1. $-2x - 9y + 32 = 0$ Non.
2. $-4x + 8y - 8 = 0$. Oui.
3. $14x + 77y - 1176 = 0$. Non.
4.

EXERCICE 16. Dites si les droites d et d' sont strictement parallèles, confondues ou sécantes.

a) $d: \ 2x - 6y + 5 = 0$ et $d': \ x - 3y + 2 = 0$.

b) $d: \ 4x - 3y + 1 = 0$ et $d': \ 5x - 4y + 2 = 0$.

c) $d: \ 3x + 9y + 2 = 0$ et $d': \ 12x + 36y + 8 = 0$.

Exercice 16.

a) Déterminons la position relative de d et d'.

La position relative de deux droites (position de l'une par rapport à l'autre) dans la plan (coplanaires) n'admet que deux possibilités qui s'excluent mutuellement :

— les droites sont *sécantes*,

— les droites sont *parallèles* (et en particulier éventuellement confondues).

À ce stade de la leçon pour démontrer le parallélisme nous allons utiliser les vecteurs directeurs.

$\begin{pmatrix}-b\\a\end{pmatrix}$ est un vecteur directeur de la droite d'équation cartésienne $ax + by + c = 0$ donc : $\vec{u}\begin{pmatrix}6\\2\end{pmatrix}$ est un vecteur directeur de d et $\vec{v}\begin{pmatrix}3\\1\end{pmatrix}$ est un vecteur directeur de d'.

Déterminons si $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont colinéaires.

$$\begin{aligned}\det\left(\vec{u}; \vec{u}\right) &= \begin{vmatrix}x_u & x_v\\ y_u & y_v\end{vmatrix}\\ &= \begin{vmatrix}6 & 3\\ 2 & 1\end{vmatrix}\\ &= 6 \times 1 - 2 \times 3\\ &= 0\end{aligned}$$

Les vecteurs directeurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont colinéaires donc d et d' sont parallèles.
Deux droites parallèles sont confondues si et seulement si elles ont au moins un point en commun. Or $P\left(0; \frac{5}{6}\right) \in d$ mais $P \notin d'$ donc

$$\boxed{d \text{ et } d' \text{ sont strictement parallèles.}}$$

b)

$\vec{u} = \begin{pmatrix}3\\4\end{pmatrix}$ et $\vec{v} = \begin{pmatrix}4\\5\end{pmatrix}$. $\det(\vec{u};\vec{v}) = -1$. $d \nparallel d'$.

c)

$\vec{u} = \begin{pmatrix}-9\\3\end{pmatrix}$ et $\vec{v} = \begin{pmatrix}-36\\12\end{pmatrix}$. $\det(\vec{u};\vec{v}) = 0$. $d \parallel d'$. $P\left(-\frac{2}{3};0\right) \in d$ et $P \in d'$ donc $d = d'$ (droites confondues).

EXERCICE 17. Dans un repère orthonormé (O,I,J) on considère les droites $d:\ y = -x+2$ et $d':\ y = x-4$.

1. Représentez ces deux droites.
2. Que représentent, pour (d) et (d'), les points $P(0;2)$, $P'(0;-4)$ et $A(3;-1)$?
3. Déduisez-en que les droites (d) et (d') sont perpendiculaires.

EXERCICE 18. Dans un repère orthonormé (O,I,J) on considère les droites $d:\ y = -3x+4$ et $d':\ y = \frac{1}{3}x - 1$.

1. Représentez ces deux droites.
2. Que représentent, pour (d) et (d'), les points $P(0;4)$, $P'(0;-1)$ et $A\left(\frac{3}{2};-\frac{1}{2}\right)$?
3. Déduisez-en que les droites (d) et (d') sont perpendiculaires.

EXERCICE 19. Dans un repère orthonormé (O,I,J) on considère les points $A(-3;-2)$, $B(2;-1)$ et $C(1;4)$.

1. Placez ces points.
2. Déterminez une équation des médianes du triangle ABC issues des sommets A et B.
3. Que représente le point $M\left(0;\frac{1}{3}\right)$ pour le triangle ABC ?
4. Déterminez les coordonnées du point d'intersection des droites (CM) et (AB).
5. Que représente ce point pour le segment $[AB]$?

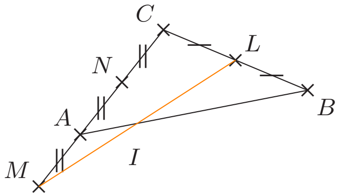
Exercice 19.

1.
2. Coordonnées du milieu de $[BC]$: $\left(-\frac{1}{2}, -\frac{3}{2}\right)$. Médiane issue de A : $7x - 9y + 3 = 0$.
   Coordonnées du milieu de $[AC]$: $(-1,1)$. Médiane issue de B : $2x + 3y - 1 = 0$.
3. M est le points d'intersection des deux précédentes médianes donc c'est le centre de gravité du triangle.
4. On peut le faire en résolvant un système ou en raisonnant sur la troisième médiane, celle issue de C.
5. Milieu de $[AB]$.

EXERCICE 20. Dans le repère (O,I,J), on considère les points $A(1,2)$, $B(-1,4)$, $C(-2;3)$ et $D(1;m)$.

1. Utilisez un raisonnement par contraposée pour montrer que si les droites (AB) et (CD) sont sécantes alors $m \neq 0$.
2. Utilisez un raisonnement par l'absurde pour montrer que si $m \neq 0$ alors les droites (AB) et (CD) sont sécantes.
3. Dans cette question, on suppose que $m = -3$. On considère les droites d'équation $y = -x+3$ et $y = -2x-1$.
   (a) Associez ces équations aux droites (AB) et (CD).
   (b) En utilisant le point $E(-4;7)$, utiliser un raisonnement par contre-exemple pour montrer que les droites (AB) et (CD) ne sont pas parallèles.
   (c) On considère la droite (d) d'équation $y = x+1$. Utilisez un raisonnement par disjonction des cas pour montrer que les droites (AB), (CD) et (d) ne sont pas concourantes.

EXERCICE 21. Les données sont codées sur la figure suivante :



On se place dans le repère (A,B,C).

1. Donnez les coordonnées des points A, B et C.
2. Déterminez les coordonnées des points M, N puis L.
3. Donnez une équation de la droite (ML) et en déduire les coordonnées du point I intersection des droites (AB) et (ML). Précisez la position du point I sur le segment $[ML]$.
4. Retrouvez ce résultat par une autre méthode non analytique.

Exercice 21.

1. $A(0;0)$, $B(1;0)$ et $C(0;1)$.
2. $M\left(0,-\frac{1}{2}\right)$, $N\left(0,\frac{1}{2}\right)$ et $L\left(\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right)$.
3. $(ML):\ y = 2x - \frac{1}{2}$. $(AB):\ y = 0$. Donc intersection : $0 = 2x - 0{,}5 \Leftrightarrow x = 0{,}25$. $I\left(\frac{1}{4},0\right)$.

EXERCICE 22. Déterminez la pente de chacune des droites.

a) La droite d d'équation $-8x + 3t + 5 = 0$.
b) La droite (AB) avec $A(-1,-9)$ et $B(2;6)$.

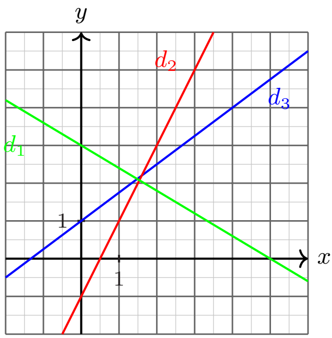
Exercice 22.

a) En isolant y : $y = \frac{8}{3}x - \frac{5}{3}$.

   O avec le vecteur directeur $\vec{u}\begin{pmatrix}-3\\-8\end{pmatrix}$. Donc $m = \frac{-8}{-3} = \frac{8}{3}$.

b) $\frac{6-(-9)}{2-(-1)} = 5$.

EXERCICE 23. Déterminez la pente de chacune des droites tracées ci-dessous dans un repère.



Exercice 23. $m_1 = -\frac{3}{5}$, $m_2 = 2$ et $m_3 = \frac{3}{4}$.

EXERCICE 24. Donnez, lorsqu'elle existe, la pente de la droite d.

a) $d:\ y = 3{,}3x + 6{,}5$.
b) $d:\ y = 2$.
c) $d:\ y = -7 - x$.
d) $d:\ y = \frac{4x+1}{5}$.
e) $d:\ x = -0{,}8$.
f) $d:\ 4x + 2y + 5 = 0$.

Exercice 24.

a) $m = 3{,}3$. b) $m = 0$. c) $m = -1$. d) $\frac{4}{5}$.
e) Pas de pente. f) $m = -2$.

EXERCICE 25. Déterminez l'équation de la droite passant par A et de pente m.

a) $A(1, -3)$ et $m = -5$.
b) $A(3;0)$ et $m = \frac{2}{3}$.
c) $A(2;3)$ et $m = 0{,}75$.
d) $A(-6, -5)$ et $m = 0$.

EXERCICE 26. Déterminez la pente de (AB) puis son équation réduite.

a) $A(7, -1)$ et $B(0;2)$.
b) $A(-3;4)$ et $B(3;10)$.
c) $A(1, -1)$ et $B(4;1)$.
d) $A(0, -5)$ et $B(2;-1)$.

EXERCICE 27. Déterminez un vecteur directeur de la droite et, lorsqu'elle existe, la pente de la droite décrite.

a) La droite d d'équation $3x - 2y = 0$.
b) La droite (AB) avec $A(3;9)$ et $B(2;4)$.
c) La droite d d'équation $y = -4$.
d) La droite d'équation $x + 5y + 2 = 0$.

EXERCICE 28. Déterminez une équation de la droite d de pente -5 est coupant l'axe des abscisses au point $A(4;0)$.

EXERCICE 29. On donne trois points distincts A, B et C tels que $2\overrightarrow{AB} + 3\overrightarrow{AC} = \vec{0}$. Déterminez les abscisse de C dans les repères $(A,\overrightarrow{AB})$ et $(B,\overrightarrow{BA})$.

EXERCICE 30. Construisez, sur une droite $\mathscr{D}$ de repère $(O,\vec{u})$, les points R et S d'abscisses respectives $\frac{3}{2}$ et -2. Calculez l'abscisse du milieu I de $[RS]$ et celle du barycentre G des points pondérés $(R, -3)$ et $(S,5)$.

Représentation paramétrique d'une droite.