Racine carrée.

Définition.

EXERCICE 1. Déterminez (à l'aide de la calculatrice) une valeur exacte puis, éventuellement, une valeur approchée de $\sqrt{121}$, $\sqrt{48}$, $\sqrt{2}$.

Propriétés algébriques.

EXERCICE 2. Justifiez les égalités.

a) $\sqrt{28} = 2\sqrt{7}$. b) $\sqrt{50} = 5\sqrt{2}$. c) $4\sqrt{27} = 12\sqrt{3}$. d) $-\sqrt{32} = -4\sqrt{2}$.

EXERCICE 3. Écrivez chaque nombre sous la forme $a\sqrt{b}$ où $a \in \mathbb{Q}$ et $b \in \mathbb{N}$, b étant le plus petit possible.

a) $A = 6\sqrt{3} - 4\sqrt{3}$. b) $B = \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{144}}$. c) $C = \frac{2}{\sqrt{5}}$. d) $D = 2\sqrt{3} + \sqrt{\frac{49}{3}}$.

EXERCICE 4. Calculez $A = \dfrac{1+\sqrt{3}}{2-\sqrt{3}} - \dfrac{1-\sqrt{3}}{2+\sqrt{3}}$.

EXERCICE 5. Soit $x \in]0;+\infty[$. Simplifiez les expressions suivantes (oui cet énoncé n'est pas clair, faites au mieux).

a) $A = \sqrt{x^4}$. b) $B = \sqrt{x^3}$. c) $C = \frac{\sqrt{x}}{x^2}$.
d) $D = (x + \sqrt{x})^2$. e) $E = (x + \sqrt{x})(x - \sqrt{x})$.

Écrivez les expressions suivant sous forme d'une unique expression fractionnaire.

a) $F = \sqrt{x} - \frac{1}{\sqrt{x}}$. b) $G = 2 - \sqrt{x} + \frac{1}{\sqrt{x}+1}$.

Pseudo inégalité triangulaire.

Exercices.

EXERCICE 6. Écrivez chaque nombre sous la forme $a\sqrt{b}$ où $a \in \mathbb{Q}$ et $b \in \mathbb{N}$, b étant le plus petit possible.

a) $A = 3\sqrt{2} + 5\sqrt{2}$. b) $B = 7\sqrt{6} - 9\sqrt{6}$. c) $C = 2\sqrt{3} - 3\sqrt{3}$.
d) $D = -\sqrt{7} - 4\sqrt{7}$. e) $E = 3\sqrt{27}$. f) $F = -\sqrt{8}$.
g) $G = 5\sqrt{12}$. h) $H = -3\sqrt{98}$. i) $I = \sqrt{15} \times \sqrt{20}$.
j) $J = \sqrt{24} \times \sqrt{2}$. k) $K = \sqrt{8} \times \sqrt{56}$. l) $L = \sqrt{\frac{5}{16}}$.
m) $M = \sqrt{\frac{24}{2}}$. n) $N = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{9}}$. o) $O = \frac{\sqrt{15}}{\sqrt{20}}$.
p) $P = 3\sqrt{3} - 2\sqrt{12} + \sqrt{300}$. q) $Q = 3\sqrt{5} - \sqrt{20} - 3\sqrt{45}$. r) $R = \frac{2}{\sqrt{2}}$.
s) $S = \frac{21}{\sqrt{7}}$. t) $T = \frac{9}{\sqrt{3}}$. u) $U = \frac{3}{\sqrt{5}}$.

EXERCICE 7. Écrivez chaque nombre sous la forme $a + b\sqrt{c}$ où $a,b \in \mathbb{Q}$ et $c \in \mathbb{N}$, c étant le plus petit possible.

a) $A = \left(1 + \sqrt{2}\right)^2$. b) $B = \left(2 + \sqrt{3}\right)\left(2 - \sqrt{3}\right)$. $C = \left(2\sqrt{3} - 4\right)^2$. d) $D = \left(2 + 3\sqrt{5}\right)^2$.

EXERCICE 8. Simplifiez.

a) $x = \dfrac{3\sqrt{8} - 2\sqrt{12} + \sqrt{20}}{3\sqrt{18} - 2\sqrt{27} + \sqrt{45}}$. b) $y = \dfrac{1}{\sqrt{6} - \sqrt{5}} - \frac{3}{\sqrt{5}-\sqrt{2}} - \frac{4}{\sqrt{6}+\sqrt{2}}$.
c) $z = \left(\sqrt{2} + \sqrt{3} + \sqrt{5}\right)\left(\sqrt{2} - \sqrt{3} + \sqrt{5}\right)\left(\sqrt{5} - \sqrt{2}\right)$.

EXERCICE 9. Simplifiez les écritures suivantes.

a) $A = \dfrac{3 + \sqrt{5}}{7 + \sqrt{5}} - \frac{3-\sqrt{5}}{7-\sqrt{5}}$. b) $B = \dfrac{1 - \sqrt{5}}{4 + \sqrt{5}} - \frac{1+\sqrt{5}}{4-\sqrt{5}}$.

EXERCICE 10. *Méthode de la quantité conjuguée.*

1. Transformez le quotient $Q = \frac{\sqrt{2}+3}{3\sqrt{2}-3}$ en multipliant le numérateur et le dénominateur par la quantité conjuguée $3\sqrt{2} + 3$.
2. En utilisant la technique de la quantité conjuguée écrivez les quotients suivants sans racine carrée au dénominateur.

 a) $R = \dfrac{2 - \sqrt{3}}{\sqrt{2} - 3}$. b) $S = \dfrac{2 + \sqrt{3}}{\sqrt{2} - \sqrt{3}}$. c) $T = \dfrac{\sqrt{5} + 3\sqrt{7}}{2\sqrt{5} - 4\sqrt{7}}$.

EXERCICE 11. Simplifiez.

a) $(\sqrt{2} - 3)(\sqrt{2} + 3)$.
b) $\sqrt{3^2 + 4^2}$.
c) $\sqrt{3^2} + \sqrt{4^2}$.
d) $\left(\sqrt{5} - 1\right)^2$.
e) $\sqrt{98} + \sqrt{32} - \sqrt{8}$.
f) $\sqrt{\sqrt{2} + 1} \times \sqrt{\sqrt{2} - 1}$.

EXERCICE 12.

1. Rendez rationnels les dénominateurs des nombres suivants.

 a) $\dfrac{1}{\sqrt{2} + 1}$. b) $\dfrac{1}{\sqrt{3} + \sqrt{2}}$. c) $\dfrac{1}{\sqrt{n+1} - \sqrt{n}}$, $n \in \mathbb{N}$.

2. Donnez une expression simple de la somme $N = \dfrac{1}{1} + \dfrac{1}{\sqrt{2} + 1} + \dfrac{1}{\sqrt{3} + \sqrt{2}} + \cdots + \dfrac{1}{\sqrt{100} + \sqrt{99}}$.

EXERCICE 13. Pour $a = 1 - \sqrt{2}$ et $b = \sqrt{2}$, calculez : $a + b^2$, $(a + b)^2$, $a^2 + b^2$, $5ab^2$, $(5ab)^2$.
EXERCICE 14. Résolvez $x^2 = 4$, $x^2 = 5$, $x^2 = -3$, $\frac{x}{2} = \frac{11}{x}$, $(x + 1)^2 = 4$.
EXERCICE 15. Montrez que, pour tout réel x, $x^2 + x + 1 = \left(x + \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{3}{4}$. Déduisez-en la résolution de l'équation $x^2 + x + 1 = 0$.
EXERCICE 16. Le nombre d'or est $\frac{1+\sqrt{5}}{2}$ et est noté ϕ. Comparez $\phi - 1$ et $\frac{1}{\phi}$. Déduisez-en que ϕ est solution de l'équation $x^2 = x + 1$. Déduisez-en ϕ^2. Montrez que pour tout entier naturel n, ϕ est solution de l'équation $x^{n+2} = x^{n+1} + x^n$. Déduisez-en ϕ^3 et ϕ^4.
EXERCICE 17. Soient ABC un triangle isocèle tel que $AB = AC = 1$ et $\widehat{A} = 45°$, et H le projeté orthogonal de B sur (AC). Calculez successivement AH, BH, CH et BC. Calculez l'aire S de ABC et déduisez-en AK où K est le projeté orthogonal de A sur (BC).