Racine carrée.

Définition.

Le nom racine carrée nous vient de l'antiquité grecque. Les nombres étés vus comme des objets géométriques. La racine carré de 2 est de ce point de vue le segment du côté d'un carré dont l'aire est 2.

Définition 1. La *racine carrée* d'un nombre $a \in \mathbb{R}$, si elle existe, est un nombre positif x tel que : $x \times x = x^2 = a$ et on note : $x = \sqrt{a}$.

Exemples.

1. La racine carrée de $a = 4$ est $\sqrt{4} = 2$. En effet $x = 2$ est bien un nombre positif et $x^2 = 2^2 = 2 \times 2 = 4 = a$.
2. De même : $\sqrt{0} = 0$, $\sqrt{1} = 1$, $\sqrt{9} = 3$, $\sqrt{16} = 4$, $\sqrt{25} = 5$, $\sqrt{36} = 6$, $\sqrt{49} = 7$, $\sqrt{64} = 8$, $\sqrt{81} = 8$, $\sqrt{100} = 10$ et $\sqrt{121} = 11$.
3. Nous savons, sans l'avoir pour l'instant démontré, que $\sqrt{2}$ est un nombre irrationnel. Nous ne pouvons pas trouver d'écriture décimale finie ou fractionnaire pour ce nombre. C'est pourquoi nous l'écrirons toujours $\sqrt{2}$.

Remarques.

1. Compte tenu de la règle du signe d'un produit on ne peut prendre la racine carrée que d'un nombre n positif (ou nul).
2. Lorsque a est positif il est toujours possible de trouver un tel nombre x et d'autre part il est unique (puisque positif). Nous devrons attendre de bien connaître les fonctions pour pouvoir prouver cette existence (ou même attendre après le bac pour l'utilisation de la borne supérieure).
3. Sauf si $n \in \mathbb{N}$ est un carré parfait $(1, 4, 9, \ldots)$, $\sqrt{n}$ est un nombre qui n'est pas rationnel. Dans ce cas il n'y a pas d'écriture exacte du nombre plus simple que $\sqrt{n}$.
4. Clairement : si a est positif $\sqrt{a}^2 = \sqrt{a^2} = a$.
   Par contre si $a < 0$ alors $\sqrt{a}^2$ n'existe pas, et $\sqrt{a^2} = -a$.
   Quelque soit le signe de a nous pourrons écrire : $\sqrt{a^2} = |a|$.
5. L'écriture $x = \sqrt{a}$ est la conjonction des trois propriétés suivantes : $x \in \mathbb{R}_+$, $a \in \mathbb{R}_+$ et $a^2 = x$.

EXERCICE 1. Déterminez (à l'aide de la calculatrice) une valeur exacte puis, éventuellement, une valeur approchée de $\sqrt{121}$, $\sqrt{48}$, $\sqrt{2}$.

Propriétés algébriques.

Proposition 1. *Propriétés algébriques de racine carrée.* Soient $a \in [0; +\infty[$, $b \in [0; +\infty[$ et $n \in \mathbb{Z}$.

(i) $\sqrt{a \times b} = \sqrt{a} \times \sqrt{b}$.

(ii) Si $b \neq 0$ alors : $\dfrac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}} = \sqrt{\dfrac{a}{b}}$.

(iii) $\sqrt{a}^n = \sqrt{a^n}$.

Démonstration.

(i) Soit a et b des entiers naturels.
Démontrons que $\sqrt{a} \times \sqrt{b}$ est la racine carrée de ab.
Vérifions que le nombre $\sqrt{a} \times \sqrt{b}$ est effectivement un nombre positif qui élevé au carré égale ab.

* Par définition de la racine carrée $\sqrt{a}$ et $\sqrt{b}$ sont positifs donc $\sqrt{a} \times \sqrt{b}$ est positif.

*

$$\begin{aligned}\left(\sqrt{a}\times\sqrt{b}\right)^2 &= \left(\sqrt{a}\times\sqrt{b}\right)\times\left(\sqrt{a}\times\sqrt{b}\right)\\ &= \sqrt{a}\times\sqrt{b}\times\sqrt{a}\times\sqrt{b}\\ &= \sqrt{a}\times\sqrt{a}\times\sqrt{b}\times\sqrt{b}\\ &= \sqrt{a}^2\times\sqrt{b}^2\end{aligned}$$

Par définition de la racine carré (a et b étant positifs), $\sqrt{a}^2 = a$ et $\sqrt{b}^2 = b$ donc :

$$\left(\sqrt{a}\times\sqrt{b}\right)^2 = a\times b$$

Nous avons démontré que quelques soient les entiers naturels a et b, $\sqrt{a}\times\sqrt{b} = \sqrt{a\times b}$.

(ii) Il suffit de démontrer que $\frac{1}{\sqrt{b}} = \sqrt{\frac{1}{b}}$.

(iii) En itérant la formule du (i).

Exemples.

1. $\sqrt{12}\times\sqrt{3} = \sqrt{12\times 3} = \sqrt{36} = 6$.
2. $\sqrt{75} = \sqrt{3\times 25} = \sqrt{3}\times\sqrt{25} = \sqrt{3}\times 5 = 5\sqrt{3}$.
3. $\sqrt{500} = \sqrt{2^2\times 5^3} = \sqrt{2^2}\times\sqrt{5^2\times 5} = 2\times\sqrt{5^2}\times\sqrt{5} = 2\times 5\sqrt{5}$.
4. D'une part $\sqrt{16}+\sqrt{9} = 4+3 = 7$ et d'autre part $\sqrt{16+9} = \sqrt{25} = 5$ donc $\sqrt{16+9} \neq \sqrt{16}+\sqrt{9}$. Ce contre-exemple établit, qu'en général : $\sqrt{a+b} \neq \sqrt{a}+\sqrt{b}$.

Remarques.

1. Pas de formule générale pour addition et soustraction.
2. Du point de vu des priorités opératoires la racine carrée joue le même rôle que les parenthèses, les crochets, ou les barres de fraction : ce qui est sous la racine carré est considéré comme entre parenthèses.

EXERCICE 2. Justifiez les égalités.

a) $\sqrt{28} = 2\sqrt{7}$. b) $\sqrt{50} = 5\sqrt{2}$. c) $4\sqrt{27} = 12\sqrt{3}$. d) $-\sqrt{32} = -4\sqrt{2}$.

EXERCICE 3. Écrivez chaque nombre sous la forme $a\sqrt{b}$ où $a\in\mathbb{Q}$ et $b\in\mathbb{N}$, b étant le plus petit possible.

a) $A = 6\sqrt{3}-4\sqrt{3}$. b) $B = \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{144}}$. c) $C = \frac{2}{\sqrt{5}}$. d) $D = 2\sqrt{3}+\sqrt{\frac{49}{3}}$.

EXERCICE 4. Calculez $A = \dfrac{1+\sqrt{3}}{2-\sqrt{3}} - \dfrac{1-\sqrt{3}}{2+\sqrt{3}}$.

Exercice 4.

$$\begin{aligned}A &= \frac{(1+\sqrt{3})(2+\sqrt{3})-(2-\sqrt{3})(1-\sqrt{3})}{(2-\sqrt{3})(2+\sqrt{3})}\\ &= \frac{2+\sqrt{3}+2\sqrt{3}+3-(2-\sqrt{3}-2\sqrt{3}+3)}{2^2-\sqrt{3}^2}\\ &= \frac{6\sqrt{3}}{1}\\ &= 6\sqrt{3}\end{aligned}$$

EXERCICE 5. Soit $x\in]0;+\infty[$. Simplifiez les expressions suivantes (oui cet énoncé n'est pas clair, faites au mieux).

a) $A = \sqrt{x^4}$.   b) $B = \sqrt{x^3}$.   c) $C = \frac{\sqrt{x}}{x^2}$.
d) $D = (x + \sqrt{x})^2$.   e) $E = (x + \sqrt{x})(x - \sqrt{x})$.

Écrivez les expressions suivant sous forme d'une unique expression fractionnaire.

a) $F = \sqrt{x} - \frac{1}{\sqrt{x}}$.   b) $G = 2 - \sqrt{x} + \frac{1}{\sqrt{x}+1}$.

Pseudo inégalité triangulaire.

Nous avons déjà remarqué qu'il n'est pas possible d'obtenir des identités remarquables (des égalités) liant la somme et la racine carré. Cependant nous pouvons obtenir une inégalité.

Proposition 2. *Croissance de la racine carrée.* Soient $a \in [0;+\infty[$ et $b \in [0;+\infty[$. Si $a < b$ alors $\sqrt{a} < \sqrt{b}$.

Démonstration. Supposons $a < b$ et démontrons que $\sqrt{a} < \sqrt{b}$.
Nous allons en fait démontrer que $\sqrt{b} - \sqrt{a} > 0$.
Puisque $a < b$: $b - a > 0$.
Or, a et b étant positifs,

$$\begin{aligned} b - a &= \sqrt{b}^2 - \sqrt{a}^2 \\ &= \left(\sqrt{b} - \sqrt{a}\right)\left(\sqrt{b} + \sqrt{a}\right) \end{aligned}$$

donc

$$\left(\sqrt{b} - \sqrt{a}\right)\left(\sqrt{b} + \sqrt{a}\right) > 0$$

Et comme $\left(\sqrt{b} + \sqrt{a}\right) > 0$:

$$\frac{\left(\sqrt{b} - \sqrt{a}\right)\left(\sqrt{b} + \sqrt{a}\right)}{\left(\sqrt{b} + \sqrt{a}\right)} > \frac{0}{\left(\sqrt{b} + \sqrt{a}\right)}$$
$$\sqrt{b} - \sqrt{a} > 0$$

$$\boxed{\text{Ainsi dès que } a < b \text{ forcément } \sqrt{a} < \sqrt{b}.}$$

Remarques.

1. Nous verrons que ce résultat établit que la fonction racine carrée est strictement croissante (sa courbe représentative ne cesse de monter).
2. Ce résultat constitue une nouvelle façon de transformer une inéquation. Lorsque nous verrons $x^2 + x^4 < 8 + x^2$ alors nous pourrons affirmer que $\sqrt{x^2 + x^4} < \sqrt{8 + x^2}$.

Proposition 3. Soient $a \in [0;+\infty[$ et $b \in [0;+\infty[$. $\sqrt{a + b} \leqslant \sqrt{a} + \sqrt{b}$.

Démonstration. Démontrons dans un premier temps que $\left(\sqrt{a} + \sqrt{b}\right)^2 \geqslant a + b$.
Soient a et b des réels positifs.

$$\begin{aligned} \left(\sqrt{a} + \sqrt{b}\right)^2 &= \sqrt{a}^2 + 2 \times \sqrt{a} \times \sqrt{b} + \sqrt{b}^2 \\ &= a + 2\sqrt{ab} + b \end{aligned}$$

Ainsi : $\left(\sqrt{a}+\sqrt{b}\right)^2 = a+b+2\sqrt{ab}$, or $\sqrt{ab} \geqslant 0$ donc, nécessairement :

$$\left(\sqrt{a}+\sqrt{b}\right) \geqslant a+b.$$

Donc d'après le lemme :

$$\sqrt{\left(\sqrt{a}+\sqrt{b}\right)^2} \geqslant \sqrt{a+b}$$

Autrement dit :

$$\sqrt{a}+\sqrt{b} \geqslant \sqrt{a+b}$$

Nous avons démontré que quels que soient les nombres a et b positifs choisis : $\sqrt{a}+\sqrt{b} \geqslant \sqrt{a+b}$.

Démonstration. Considérons ABC rectangle en A avec $AB = \sqrt{a}$ et $AC = \sqrt{b}$. D'après le théorème de Pythagore : $BC = \sqrt{a+b}$. Il ne reste plus qu'à appliquer l'inégalité triangulaire.

Démonstration. En étudiant le signe : $T = \left(\sqrt{a+b}\right)^2 - \left(\sqrt{a}+\sqrt{b}\right)^2 = -2\sqrt{ab} < 0$.

Or $T = \left(\sqrt{a+b}-\sqrt{a}-\sqrt{b}\right)\left(\sqrt{a+b}+\sqrt{a}+\sqrt{b}\right)$ donc $\sqrt{a+b}-\sqrt{a}-\sqrt{b} > 0$.

Exercices.

EXERCICE 6. Écrivez chaque nombre sous la forme $a\sqrt{b}$ où $a \in \mathbb{Q}$ et $b \in \mathbb{N}$, b étant le plus petit possible.

a) $A = 3\sqrt{2}+5\sqrt{2}$.
b) $B = 7\sqrt{6}-9\sqrt{6}$.
c) $C = 2\sqrt{3}-3\sqrt{3}$.
d) $D = -\sqrt{7}-4\sqrt{7}$.
e) $E = 3\sqrt{27}$.
f) $F = -\sqrt{8}$.
g) $G = 5\sqrt{12}$.
h) $H = -3\sqrt{98}$.
i) $I = \sqrt{15}\times\sqrt{20}$.
j) $J = \sqrt{24}\times\sqrt{2}$.
k) $K = \sqrt{8}\times\sqrt{56}$.
l) $L = \sqrt{\frac{5}{16}}$.
m) $M = \sqrt{\frac{24}{2}}$.
n) $N = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{9}}$.
o) $O = \frac{\sqrt{15}}{\sqrt{20}}$.
p) $P = 3\sqrt{3}-2\sqrt{12}+\sqrt{300}$.
q) $Q = 3\sqrt{5}-\sqrt{20}-3\sqrt{45}$.
r) $R = \frac{2}{\sqrt{2}}$.
s) $S = \frac{21}{\sqrt{7}}$.
t) $T = \frac{9}{\sqrt{3}}$.
u) $U = \frac{3}{\sqrt{5}}$.

Exercice 6.

a) $8\sqrt{2}$.
b) $-2\sqrt{6}$.
c) $-\sqrt{3}$.
d) $-5\sqrt{7}$.
e) $9\sqrt{3}$.
f) $-2\sqrt{2}$.
g) $10\sqrt{3}$.
h) $-21\sqrt{2}$.
i) $10\sqrt{3}$.
j) $4\sqrt{3}$.
k) $8\sqrt{7}$.
l) $\frac{1}{4}\sqrt{5}$.
m) $2\sqrt{3}$.
n) $\frac{1}{3}\sqrt{2}$.
o) $\frac{1}{2}\sqrt{3}$.
p) $9\sqrt{3}$.
q) $-8\sqrt{5}$.
r) $\sqrt{2}$.
s) $3\sqrt{7}$.
t) $3\sqrt{3}$.
u) $\frac{3}{5}\sqrt{5}$.

EXERCICE 7. Écrivez chaque nombre sous la forme $a+b\sqrt{c}$ où $a,b \in \mathbb{Q}$ et $c \in \mathbb{N}$, c étant le plus petit possible.

a) $A = \left(1+\sqrt{2}\right)^2$.
b) $B = \left(2+\sqrt{3}\right)\left(2-\sqrt{3}\right)$.
c) $C = \left(2\sqrt{3}-4\right)^2$.
d) $D = \left(2+3\sqrt{5}\right)^2$.

EXERCICE 8. Simplifiez.

a) $x = \dfrac{3\sqrt{8} - 2\sqrt{12} + \sqrt{20}}{3\sqrt{18} - 2\sqrt{27} + \sqrt{45}}$. b) $y = \dfrac{1}{\sqrt{6} - \sqrt{5}} - \frac{3}{\sqrt{5}-\sqrt{2}} - \frac{4}{\sqrt{6}+\sqrt{2}}$.
c) $z = \left(\sqrt{2} + \sqrt{3} + \sqrt{5}\right)\left(\sqrt{2} - \sqrt{3} + \sqrt{5}\right)\left(\sqrt{5} - \sqrt{2}\right)$.

EXERCICE 9. Simplifiez les écritures suivantes.

a) $A = \dfrac{3 + \sqrt{5}}{7 + \sqrt{5}} - \dfrac{3 - \sqrt{5}}{7 - \sqrt{5}}$. b) $B = \dfrac{1 - \sqrt{5}}{4 + \sqrt{5}} - \dfrac{1 + \sqrt{5}}{4 - \sqrt{5}}$.

EXERCICE 10. *Méthode de la quantité conjuguée.*

1. Transformez le quotient $Q = \frac{\sqrt{2}+3}{3\sqrt{2}-3}$ en multipliant le numérateur et le dénominateur par la quantité conjuguée $3\sqrt{2} + 3$.
2. En utilisant la technique de la quantité conjuguée écrivez les quotients suivants sans racine carrée au dénominateur.

a) $R = \dfrac{2 - \sqrt{3}}{\sqrt{2} - 3}$. b) $S = \dfrac{2 + \sqrt{3}}{\sqrt{2} - \sqrt{3}}$. c) $T = \dfrac{\sqrt{5} + 3\sqrt{7}}{2\sqrt{5} - 4\sqrt{7}}$.

EXERCICE 11. Simplifiez.

a) $(\sqrt{2} - 3)(\sqrt{2} + 3)$. b) $\sqrt{3^2 + 4^2}$. c) $\sqrt{3^2} + \sqrt{4^2}$.
d) $(\sqrt{5} - 1)^2$. e) $\sqrt{98} + \sqrt{32} - \sqrt{8}$. f) $\sqrt{\sqrt{2} + 1} \times \sqrt{\sqrt{2} - 1}$.

EXERCICE 12.

1. Rendez rationnels les dénominateurs des nombres suivants.

a) $\dfrac{1}{\sqrt{2} + 1}$. b) $\dfrac{1}{\sqrt{3} + \sqrt{2}}$. c) $\dfrac{1}{\sqrt{n + 1} + \sqrt{n}}$, $n \in \mathbb{N}$.

2. Donnez une expression simple de la somme $N = \dfrac{1}{1} + \dfrac{1}{\sqrt{2} + 1} + \dfrac{1}{\sqrt{3} + \sqrt{2}} + \cdots + \dfrac{1}{\sqrt{100} + \sqrt{99}}$.

EXERCICE 13. Pour $a = 1 - \sqrt{2}$ et $b = \sqrt{2}$, calculez : $a + b^2$, $(a + b)^2$, $a^2 + b^2$, $5ab^2$, $(5ab)^2$.
EXERCICE 14. Résolvez $x^2 = 4$, $x^2 = 5$, $x^2 = -3$, $\frac{x}{2} = \frac{11}{x}$, $(x + 1)^2 = 4$.
EXERCICE 15. Montrez que, pour tout réel x, $x^2 + x + 1 = \left(x + \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{3}{4}$. Déduisez-en la résolution de l'équation $x^2 + x + 1 = 0$.
EXERCICE 16. Le nombre d'or est $\frac{1+\sqrt{5}}{2}$ et est noté ϕ. Comparez $\phi - 1$ et $\frac{1}{\phi}$. Déduisez-en que ϕ est solution de l'équation $x^2 = x + 1$. Déduisez-en ϕ^2. Montrez que pour tout entier naturel n, ϕ est solution de l'équation $x^{n+2} = x^{n+1} + x^n$. Déduisez-en ϕ^3 et ϕ^4.
EXERCICE 17. Soient ABC un triangle isocèle tel que $AB = AC = 1$ et $\widehat{A} = 45°$, et H le projeté orthogonal de B sur (AC). Calculez successivement AH, BH, CH et BC. Calculez l'aire S de ABC et déduisez-en AK où K est le projeté orthogonal de A sur (BC).