21 Monotonie des fonctions.

Variation et courbe représentative.

Décrire la variation en français.

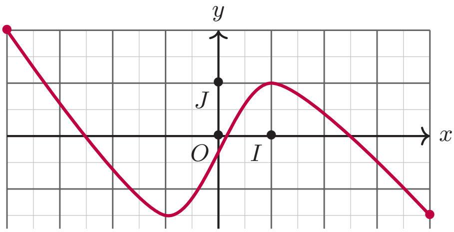
EXERCICE 1. Avec la calculatrice affichez la courbe représentative de la fonction f puis décrivez la variation de f et enfin précisez les extrema de f sur $\mathbb{R}$ dans les cas suivants.

a) $f : x \mapsto \frac{1}{2}x^2 - 2x - 1.$ b) $f : x \mapsto x^3 + \frac{3}{2}x^2 - 60x + 55.$

Un schéma pour décrire les variations d'une fonction.

EXERCICE 2. Compléter le tableau de variation proposé à partir de la représentation graphique.

x	-4		$\dots$		$\dots$		$\dots$
f	$\dots$	$\searrow$	$\dots$	$\nearrow$	1	$\searrow$	$-1{,}5$



EXERCICE 3. Voici le tableau de variations d'une fonction f.

x	$-\infty$		-2		1		3		5
f		$\searrow$	2	$\nearrow$	3	$\searrow$	-2	$\nearrow$	4

a) Quel est l'ensemble de définition de la fonction f ?
b) Décrivez par des phrases le sens de variation de la fonction f.
c) Préciser les extrema éventuels de la fonction f et pour quelle(s) valeur(s) ils sont atteints.
d) Tracer deux courbes différentes susceptibles de représenter graphiquement la fonction f.

EXERCICE 4. On donne le tableau de variation d'une fonction g.

x	-4		-1		2		5
g	2	$\searrow$	-3	$\nearrow$	3	$\searrow$	-1

a) Quel est l'ensemble de définition de g ?
b) Décrivez par des phrases les variations de g.
c) Tracez dans un repère une courbe pouvant représenter g.

EXERCICE 5. Soit f une fonction définie sur l'intervalle $[-2;7]$. On sait :

- f est croissante sur $[-2;5]$ et sur $[6;7]$;
- f est décroissante sur $[5;6]$;
- $f(-2) = f(6) = -1$ et $f(5) = f(7) = 1$.

Construisez le tableau de variation de f puis tracez dans un repère une courbe pouvant représenter f.

Une vraie définition.

EXERCICE 6.

1. Démontrez que $(x+1)(x-2) > 0$ pour tout $x \in]2, +\infty[$.
2. Déduisez en que, pour $x \in]2, +\infty[$, $x^2 - x > 2$.
3. Déduisez-en, finalement que $\sqrt{x^2 - x} > \sqrt{2}$ pour tout $x \in]2, +\infty[$.

Extrema.

EXERCICE 7. Montrez que $f : x \mapsto 7(x-15)^2 - 9$ admet un minimum sur $\mathbb{R}$.

EXERCICE 8. Soi $f$la fonction définie par $f(x) = \frac{9-x^2}{1+x^2}$ sur $\mathbb{R}$.

1. (a) Résolvez algébriquement l'équation $f(x) = -1$.
   (b) Montrez que pour tout réel x, $f(x) \geqslant -1$. *Pour comparer deux nombres on peut chercher le signe de leur différence.*
   (c) -1 est-il le minimum de f sur $\mathbb{R}$?
2. En utilisant la calculatrice tracez la courbe de f dans un repère bien choisi.
3. Conjecturez le maximum de f sur $[-5;5]$ et en quelle valeur il est atteint.
4. Démontrez que tous les réels ont une image inférieure ou égale à 9 et validez la conjecture précédente.

Variation des fonctions affines.

Démonstrations pour les fonctions de référence.

EXERCICE 9. Dans chaque cas comparez les nombres A et B sans utiliser la calculatrice.

a) $A = \left(\frac{3}{4}\right)^2$ et $B = \left(\frac{4}{3}\right)^2$, b) $A = 1{,}001^2$ et $B = 1{,}0099^2$, c) $A = -2{,}3^2$ et $B = (-2{,}3)^2$.

EXERCICE 10. Encadrez x^2, puis $3x^2$, le plus précisément possible, dans les cas suivants :

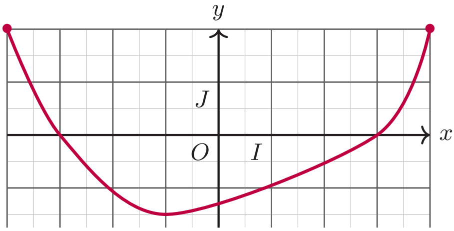
a) $1 \leq x \leq 4$, b) $-2 \leq x < -0{,}5$, c) $4 < x < 11$,
d) $-\frac{13}{5} < x < -\frac{1}{7}$. e) $-2 \leq x < 3$, f) $-10 \leq x \leq 10$.

EXERCICE 11. Démontrez que la fonction $f : x \mapsto 4x^2 + 3x - 12$ est strictement croissante sur $\mathbb{R}_+$.

Exercices.

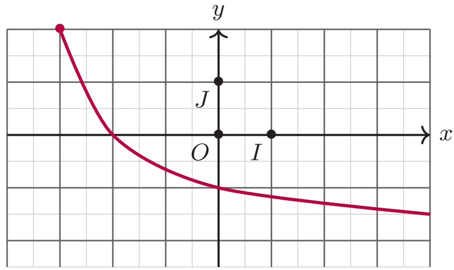
EXERCICE 12. Compléter le tableau de variation proposé à partir de la représentation graphique.

x	-4			4
f	2	$\searrow$	$\nearrow$	2



EXERCICE 13. Compléter le tableau de variation proposé à partir de la représentation graphique.

x	-3	$\cdots$
f		



EXERCICE 14. Un véhicule commence son trajet au niveau de la mer à 7h00. Il grimpe jusqu'à un sommet d'une montagne à une altitude de 824 m. Il atteint ce sommet à 9h00 puis descend sur l'autre flanc de la montage jusqu'à une vallée située à une altitude de 522 m. Son arrivée à lieu à 10h00.

On note f la fonction qui au temps écoulé depuis le départ du véhicule associe l'altitude du véhicule. Proposez un tableau de variation pour f.

EXERCICE 15.

x	-2		0		3		4
f	-1	$\nearrow$	$\frac{5}{2}$	$\searrow$	-1	$\nearrow$	6

Comparer si possible les nombres suivants.

a) $f(-2)$ et $f(-1)$

b) $f\left(\frac{1}{3}\right)$ et $f\left(\frac{3}{2}\right)$

c) $f(-1)$ et $f(1)$

d) $f(3{,}6)$ et $f(3{,}7)$

e) $f\left(\frac{7}{2}\right)$ et $f(4)$

f) $f(1)$ et $f(3{,}5)$

EXERCICE 16. Déterminez si les assertions suivantes sont vraies ou fausses. Soit f une fonction définie sur $\mathbb{R}$.

1. Si f n'est pas croissante sur $\mathbb{R}$ alors f est décroissante sur $\mathbb{R}$.
2. Si la fonction f est croissante sur $[-5;5]$ alors elle est croissante sur $[0;1]$.
3. Si f est croissante sur $[-5;0]$ et décroissante sur $[0;5]$ alors f est constante sur $[-5;5]$.
4. Si $f(1) \geqslant f(6)$ alors f est décroissante sur $[1;6]$.

EXERCICE 17. Tracez une courbe pouvant représenter graphiquement la fonction g dont le tableau de variation est donné.

x	-5		0		1		2
			5				-1
g		↗		↘		↗	
	2				-4		

EXERCICE 18. Voici le tableau de variations d'une fonction f.

x	-4		-1		2		5
	2				3		
f		↘		↗		↘	
			-3				-1

a) Quel est l'ensemble de définition de la fonction f ?
b) Décrivez par des phrases le sens de variation de la fonction f.
c) Préciser les extrema éventuels de la fonction f et pour quelle(s) valeur(s) ils sont atteints.
d) Tracer une courbe pouvant représenter graphiquement la fonction f.

EXERCICE 19. Voici le tableau de variations d'une fonction f.

x	-1		0		2		$+\infty$
			0				
f		↗		↘		↗	
	-2				-3		

a) Quel est l'ensemble de définition de la fonction f ?
b) Décrivez par des phrases le sens de variation de la fonction f.
c) Préciser les extrema éventuels de la fonction f et pour quelle(s) valeur(s) ils sont atteints.
d) Tracez une courbe pouvant représenter graphiquement la fonction f.

EXERCICE 20. On considère une fonction f dont le tableau de variation est donné ci-dessous.

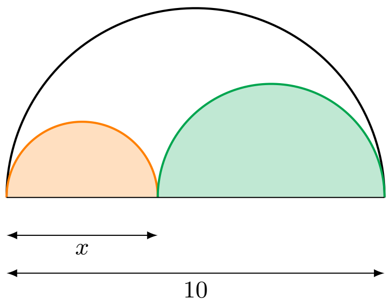
x	-4		1		5
	0				3
f		↘		↗	
			-2		

1. Décrivez par des phrases les variations de f.
2. Comparez les nombres :

   a) $f(2)$ et $f(4)$. b) $f(-3)$ et $f(0)$.

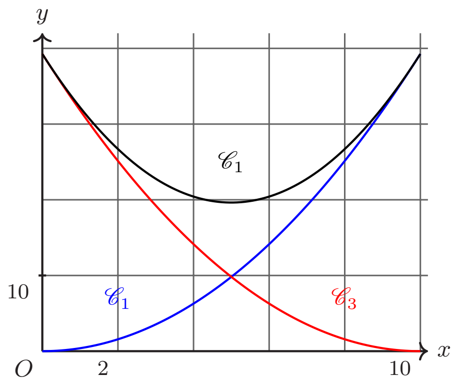
3. Expliquez pourquoi on ne peut comparer $f(0)$ et $f(2)$.

EXERCICE 21. On considère trois demi-cercles tels que représentés ci-dessous.



1. Conjecturez l'évolution de l'aire du demi-disque orange et celle du demi-disque vert lorsque x augmente.

2. Soient f (respectivement g, resp. h) la fonction définie sur $]0;10[$ qui à x associe l'aire du demi-disque orange (resp. du demi-disque vert, de la partie colorée).
On a tracé ci-contre les courbes représentatives des fonctions f, g et h.
   (a) Associez à f, g et h leurs courbes représentatives.
   (b) Avec la précision permise par le graphique décrivez les variations de h.



EXERCICE 22. Conjecturez la variation de f sur I dans les cas suivants.

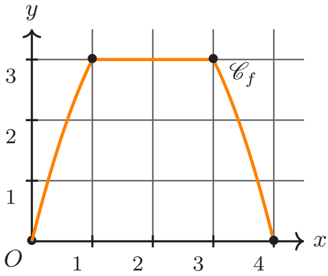
a) $f : x \mapsto 0{,}1x^4 - 0{,}8x^2 - 1$ et $I = [-4;4]$.
b) $f : x \mapsto x^3 - 0{,}8x^2 + 1$ et $I = [-2;3]$.

EXERCICE 23. Montrez que la fonction $f : x \mapsto x^3 + \sqrt{x}$ est strictement croissante sur $\mathbb{R}_+$.

EXERCICE 24. La fonction f est définie, sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \frac{2x}{x^2+1}$.

1. Conjecturez l'existence d'un maximum en précisant sa valeur et la valeur pour laquelle il est atteint.
2. Démontrez que, pour tout réel x positif, $f(x) \leqslant 1$.
3. Démontrez que 1 est le maximum de f.

EXERCICE 25. On représentée une fonction définie sur $[0;4]$.



1. Résolvez graphiquement l'équation $f(x) = 3$.
2. Décrivez par des phrases en français les variations de f sur son domaine de définition.
3. La fonction f admet-elle un maximum sur $[0;4]$? Si oui, combien vaut-il et pour quelles valeurs de x est-il atteint ?

EXERCICE 26. Une fonction f définie sur l'intervalle $[-6;8]$, vérifie :

- f est croissante sur les intervalles $[-6,-2]$ et $[4;8]$;
- f est décroissante sur $[-2;4]$;
- $f(-2) = 4$;
- le minimum de f sur $[-6;8]$ est égale à -3 et est atteint pour $x = 4$.

1. Dressez le tableau de variation de f avec les données ci-dessus.
2. Le nombre 2 a au moins deux antécédents par f : -4 et 8. De plus la courbe représentative de f dans un repère passe par les points $A(-6,-2)$ et $B(6,-2)$ et qu'elle coupe l'axe des ordonnées au point C d'ordonnée 3. Complétez le tableau de variation avec toutes les informations supplémentaires concernant f et sa courbe représentative.
3. Tracez une courbe satisfaisant à toutes les conditions concernant f et précisez les coordonnées de C.
4. (a) Quel est le nombre d'antécédent de 2 ?
   (b) En combien de points la courbe tracée coupe-t-elle l'axe des abscisses ? Traduisez ce résultat en termes d'antécédents.
5. Pouvez-vous imaginer plusieurs courbes satisfaisant toutes les conditions sur f ?

EXERCICE 27. En utilisant les tableaux de variation, de valeurs et de signe de la fonction f donnée ci-dessous, dessinez avec soin, dans un repère, une courbe représentative cohérente avec ces trois tableaux.

x	-6		-1		3		5
f			1				6
		$\nearrow$		$\searrow$		$\nearrow$	
	-5				-4		

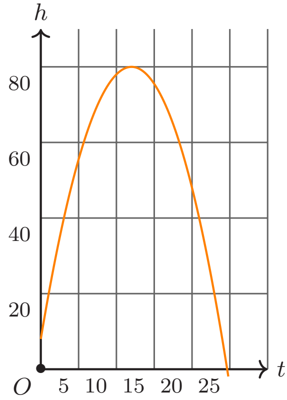
x	-4	1	4
$f(x)$	-3	$0{,}5$	5

x	-6		-2		2		$3{,}5$		5
$f(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	

EXERCICE 28. À l'occasion d'un festival pyrotechnique, un artificier prépare le lancement de fusées à partir d'une plateforme située à 8 mètres de hauteur. Il dispose de deux types de fusées notées A et B.

Partie A : fusées de type A.

Le hauteur h, en mètres, atteinte par les fusées de type A en fonction de leur temps de vol t, en dixièmes de seconde, est modélisée par la courbe ci-contre.



1. Précisez les légendes et unités pour chaque axe du graphique.
2. Avec la précision permise par le graphique répondez aux questions suivantes.
   (a) À quelle hauteur une fusée arrive-t-elle au bout de 15 dixièmes de seconde ?
   (b) À quels temps de vol la hauteur d'une fusée est-elle égale à 40 m ?
   (c) Quelle est la hauteur maximale atteinte par une fusée ?
   (d) Au bout de combien de temps retombe-t-elle au sol ?
   (e) Décrivez en français la variation de la hauteur et tracez le tableau correspondant.

Partie B : fusées du type B.

Pour les fusées du type B, la hauteur, en mètres, en fonction du temps de vol, en dixièmes de seconde, est modélisé par la fonction g définie par $g(t) = -0{,}5(t-10)^2 + 58$ pour tout t appartenant à l'intervalle $[0; 20]$.

1. Calculez l'image de 6 par g. Que représente le résultat ?
2. Donnez le tableau de valeur de g pour t allant de 0 à 20 avec un pas de 2.
3. Déduisez-en au bout de quels temps de vol la hauteur d'une fusée est de 40 m.
4. L'artificier souhaite faire exploser ses fusées de type B lorsqu'elles seront à la hauteur maximale.
   (a) Déterminez le temps de vol qu'il doit programmer avant l'explosion.
   (b) Quelle est alors la hauteur maximale atteinte ?

EXERCICE 29.