19 Vecteurs.

I Vecteurs et translations.

Définition du vecteur.

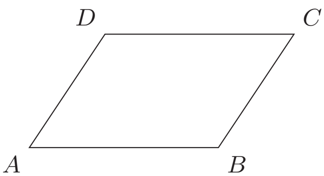
Égalité de représentants.

Somme de vecteurs.

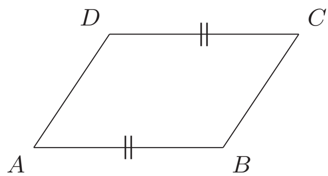
Exercices.

EXERCICE 1. Dites, sans justification, si le quadrilatère $ABCD$ est un parallélogramme dans les cas suivants.

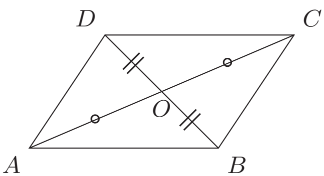
a)



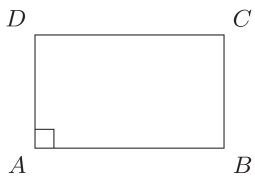
b)



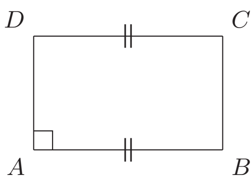
c)



d)



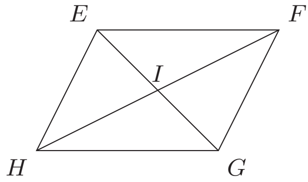
e)



EXERCICE 2. Dites, sans justification, si le quadrilatère $ABCD$ est un parallélogramme dans les cas suivants.

a) Le quadrilatère $ABCD$ à deux angles opposés de même mesure.
b) $ABCD$ à des côtés opposés parallèles deux à deux.
c) Le trapèze $ABCD$ a deux angles opposés de même mesure.
d) $ABCD$ est un losange.
e) $ABCD$ est non croisé et ses côtés opposés sont de même longueur deux à deux.
f) $ABCD$ est non croisé et deux côtés opposés sont parallèles et de même longueur.
g) $ABCD$ est un rectangle.
h) $ABDC$ est un carré.

EXERCICE 3. On considère un parallélogramme $EFGH$ tel que ci-dessous.



1. Donnez un vecteur égale à

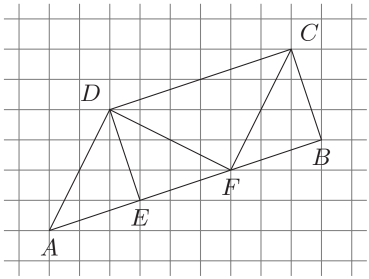
   a) $\overrightarrow{EF}$.　　b) $\overrightarrow{GH}$.　　c) $\overrightarrow{EH}$.　　d) $\overrightarrow{GF}$.

2. Complétez par le point qui convient.

   a) $\overrightarrow{EI} = \overrightarrow{I\ldots}$.　　b) $\overrightarrow{HI} = \overrightarrow{I\ldots}$.　　c) $\overrightarrow{FI} = \overrightarrow{I\ldots}$.

EXERCICE 4. Par lecture graphique indiquez

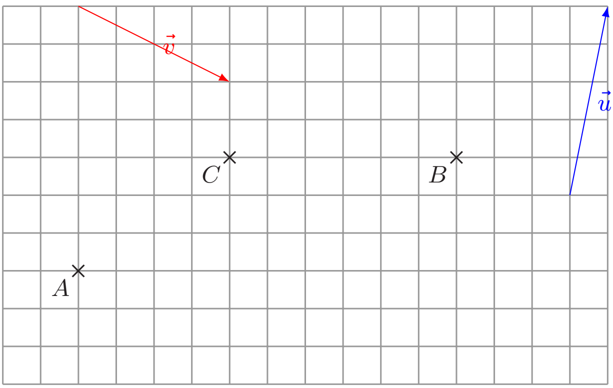
1. un vecteur égale à $\overrightarrow{AE}$; à $\overrightarrow{CF}$.
2. un vecteur de même direction que $\overrightarrow{CB}$ mais de sens opposé ; idem pour $\overrightarrow{AF}$.
3. un vecteur égale à $\overrightarrow{DC}$ d'extrémité F ; égale à $\overrightarrow{FB}$ d'origine A.
4. deux vecteurs de même de direction, de même sens qui ne sont pas égaux.
5. deux vecteurs de même norme qui ne sont pas égaux.



EXERCICE 5. Soient $t_{\vec{u}}$ une translation de vecteur $\vec{u}$, A et B des points, C et D leurs images respectives par la translation $t_{\vec{u}}$. Démontrez que $ABDC$ est un parallélogramme.

EXERCICE 6. Soient $t_{\vec{u}}$ une translation de vecteur $\vec{u}$, M et P des points, N l'image de M par la translation $t_{\vec{u}}$, Q un point tel que $MNQP$ soit un parallélogramme. Démontrez que $\overrightarrow{PQ} = \vec{u}$.

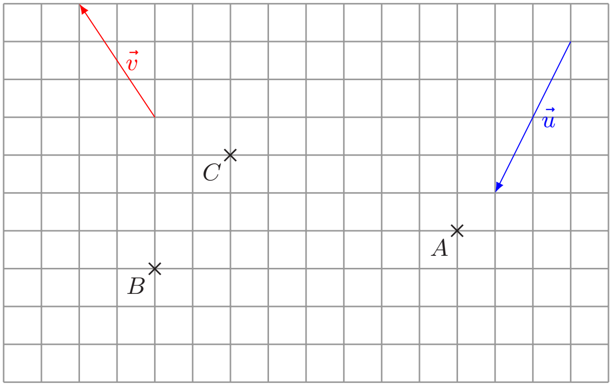
EXERCICE 7.



Tracez dans chaque cas.

a) Le point F tel que $ACBF$ soit un parallélogramme.
b) Le point G tel que $ABCG$ soit un parallélogramme.
c) Le représentant de $\vec{u}$ d'origine A.
d) Le représentant de $\vec{u}$ d'extrémité B.
e) L'image D de B par la translation de vecteur $\vec{v}$.
f) Le point E dont C est l'image par la translation de vecteur $\vec{v}$.
g) Le représentant de $\overrightarrow{AC}$ d'extrémité B.
h) Le représentant de $\overrightarrow{CB}$ d'origine A.

EXERCICE 8.

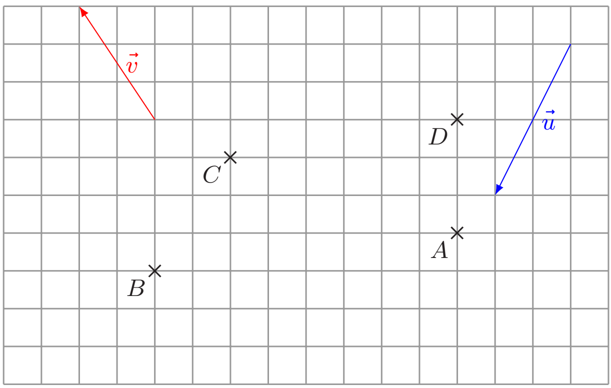


Tracez dans chaque cas.

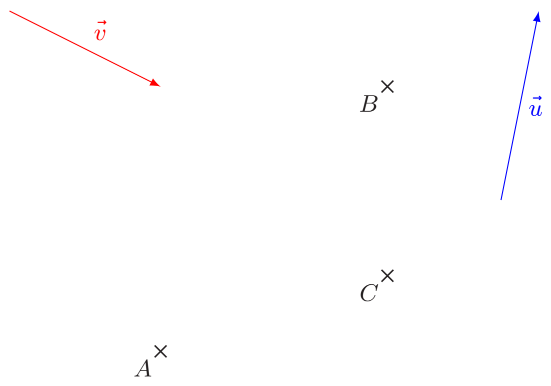
a) Le point F tel que $ACBF$ soit un parallélogramme.
b) Le point G tel que $BACG$ soit un parallélogramme.
c) Le représentant de $\vec{u}$ d'origine A.
d) Le représentant de $\vec{u}$ d'extrémité B.
e) L'image D de B par la translation de vecteur $\vec{v}$.
f) Le point E dont C est l'image par la translation de vecteur $\vec{v}$.
g) Le représentant de $\overrightarrow{AC}$ d'extrémité B.
h) Le représentant de $\overrightarrow{CB}$ d'origine A.

EXERCICE 9.

Dessinez les vecteurs $\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{AD}$, $\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{AC}$, $\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{DA}$, $\vec{u}+\vec{v}$ et $\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{CA}$.



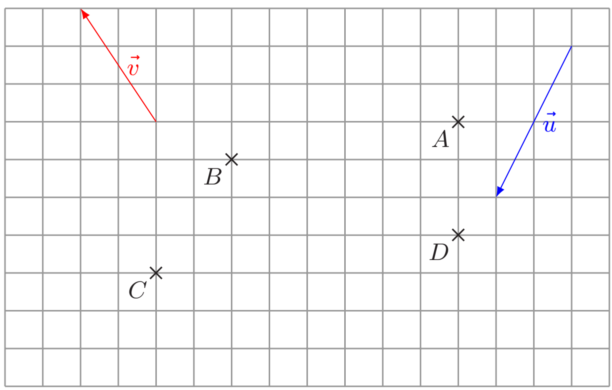
EXERCICE 10.



Tracez dans chaque cas.

a) Le point F tel que $ACBF$ soit un parallélogramme.
b) Le point G tel que $ABCG$ soit un parallélogramme.
c) Le représentant de $\vec{u}$ d'origine A.
d) Le représentant de $\vec{u}$ d'extrémité B.
e) L'image D de B par la translation de vecteur $\vec{v}$.
f) Le point E dont C est l'image par la translation de vecteur $\vec{v}$.
g) Le représentant de $\overrightarrow{AC}$ d'extrémité B.
h) Le représentant de $\overrightarrow{CB}$ d'origine A.

EXERCICE 11. Dessinez les vecteurs $\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{CA}$, $\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{AD}$,$\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{AC}$, $\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{DA}$ et $\vec{u}+\vec{v}$.



EXERCICE 12. On considère un parallélogramme $RSTU$ de centre O. On note F l'image du point S par la translation de vecteur $\overrightarrow{UT}$ et E l'image de F par la translation de vecteur $\overrightarrow{RU}$. Démontrez que $RSET$ est un parallélogramme.

EXERCICE 13. Soient EDF un triangle rectangle en D tel que $ED = 6$ cm et $DF = 4,5$ cm, I et J les milieux respectifs de $[ED]$ et $[DF]$, G et H les images respectives de F et I par la translation de vecteur $\overrightarrow{JI}$.

1. Quelle conjecture peut-on émettre pour le point G ?

2. Quelle est la nature de $DJEH$?

EXERCICE 14. Soient ABC un triangle quelconque, I le milieu de $[AB]$, I' l'image de I par la translation de vecteur $\overrightarrow{BC}$, A' l'image de A par la translation de vecteur $\overrightarrow{I'I}$.

Démontrez que $A'BCA$ est un parallélogramme puis en déduire que $\overrightarrow{A'I} = \overrightarrow{IC}$.

EXERCICE 15. En choisissant des points judicieux complétez.

a) $\overrightarrow{AB} + \cdots = \overrightarrow{AE}$
b) $\overrightarrow{G\ldots} + \overrightarrow{B\ldots} = \overrightarrow{GI}$
c) $\overrightarrow{\ldots B} + \overrightarrow{B\ldots} = \overrightarrow{CG}$
d) $\overrightarrow{BE} + \cdots = \overrightarrow{BD}$
e) $\overrightarrow{BE} + \overrightarrow{\ldots F} = \overrightarrow{B\ldots}$
f) $\overrightarrow{B\ldots} + \overrightarrow{\ldots A} = \overrightarrow{BA}$
g) $\overrightarrow{BE} - \overrightarrow{G\ldots} = \overrightarrow{B\ldots}$
h) $\overrightarrow{\ldots E} + \overrightarrow{E\ldots} = \overrightarrow{BC}$
i) $\overrightarrow{A\ldots} + \overrightarrow{B\ldots} = \overrightarrow{AC}$
j) $\overrightarrow{O\ldots} + \overrightarrow{M\ldots} = \overrightarrow{\ldots P}$
k) $\overrightarrow{A\ldots} + \overrightarrow{D\ldots} + \overrightarrow{M\ldots} = \overrightarrow{AG}$

EXERCICE 16. Simplifiez les expressions suivantes (grâce notamment à la relation de Chasles).

a) $\overrightarrow{GE} + \overrightarrow{CG}$.
b) $\overrightarrow{GE} - \overrightarrow{IE} + \overrightarrow{CG}$.
c) $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{GE} - \overrightarrow{CB} + \overrightarrow{EI} + \overrightarrow{CG}$.
d) $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CA}$.
e) $\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{BC} - \overrightarrow{BA}$.
f) $\overrightarrow{MA} - \overrightarrow{MB} - \overrightarrow{AB}$.

EXERCICE 17. Démontrez.

a) $\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{CD} - \overrightarrow{AC} = \overrightarrow{DB}$.
b) $\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{DB} + \overrightarrow{DE} = \overrightarrow{AE}$.
c) $\overrightarrow{BE} + \overrightarrow{CB} - \overrightarrow{DE} = \overrightarrow{CD}$.
d) $\overrightarrow{BD} - \overrightarrow{CA} + \overrightarrow{CB} - \overrightarrow{AD} = \vec{0}$.
e) $\overrightarrow{CB} - \overrightarrow{CA} + \overrightarrow{BD} = \overrightarrow{AD}$
f) $\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{BD} + \overrightarrow{CE} + \overrightarrow{DA} + \overrightarrow{EB} = \vec{0}$

II Colinéarité de deux vecteurs.

Colinéarité.

Caractérisations.

EXERCICE 18.

Déterminez si $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont colinéaires.

a) $\vec{u}\begin{pmatrix}6\\-4\end{pmatrix}$ et $\vec{v}\begin{pmatrix}-12\\8\end{pmatrix}$.
b) $\vec{u}\begin{pmatrix}\sqrt{2}-1\\1\end{pmatrix}$ et $\vec{v}\begin{pmatrix}1\\\sqrt{2}+1\end{pmatrix}$.
c) $\vec{u}\begin{pmatrix}3\\4\end{pmatrix}$ et $\vec{v}\begin{pmatrix}-1\\2\end{pmatrix}$.
d) $\vec{u}\begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix}$ et $\vec{v}\begin{pmatrix}x\\3\end{pmatrix}$ où $x \in \mathbb{R}$.

EXERCICE 19.

Donnez deux vecteurs colinéaires à $\vec{u}\begin{pmatrix}3\\-3\end{pmatrix}$.

EXERCICE 20.

Soient $\vec{u}\begin{pmatrix}-8\\3\end{pmatrix}$ et $\vec{v}\begin{pmatrix}7\\11\end{pmatrix}$.

Calculez le déterminant de $\vec{u}$ et $\vec{v}$ puis dites si les vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont colinéaires.

EXERCICE 21.

Déterminez si les vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont colinéaires.

a) $\vec{u}\begin{pmatrix}-3\\21\end{pmatrix}$ et $\vec{v}\begin{pmatrix}-3\\21\end{pmatrix}$.
b) $\vec{u}\begin{pmatrix}3\\12\end{pmatrix}$ et $\vec{v}\begin{pmatrix}12\\3\end{pmatrix}$.
c) $\vec{u}\begin{pmatrix}7/4\\2/7\end{pmatrix}$ et $\vec{v}\begin{pmatrix}1/2\\4\end{pmatrix}$.
d) $\vec{u}\begin{pmatrix}2/3\\2\end{pmatrix}$ et $\vec{v}\begin{pmatrix}1/5\\3/5\end{pmatrix}$.
e) $\vec{u}\begin{pmatrix}-10\\4\end{pmatrix}$ et $\vec{v}\begin{pmatrix}15\\-6\end{pmatrix}$.
f) $\vec{u}\begin{pmatrix}3/2\\2\end{pmatrix}$ et $\vec{v}\begin{pmatrix}21\\28\end{pmatrix}$.

EXERCICE 22.

Déterminez si $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont colinéaires et si c'est le cas précisez l'égalité les reliant.

a) $\vec{u}\begin{pmatrix}1\\4\end{pmatrix}$ et $\vec{v}\begin{pmatrix}-2\\-8\end{pmatrix}$.

b) $\vec{u}\begin{pmatrix}6\\4\end{pmatrix}$ et $\vec{v}\begin{pmatrix}9\\6\end{pmatrix}$.

c) $\vec{u}\begin{pmatrix}-5\\3\end{pmatrix}$ et $\vec{v}\begin{pmatrix}15\\-9\end{pmatrix}$.

d) $\vec{u}\begin{pmatrix}4\\12\end{pmatrix}$ et $\vec{v}\begin{pmatrix}6\\18\end{pmatrix}$.

e) $\vec{u}\begin{pmatrix}\frac{2}{3}\\2\end{pmatrix}$ et $\vec{v}\begin{pmatrix}1\\3\end{pmatrix}$.

f) $\vec{u}\begin{pmatrix}\frac{5}{9}\\-\frac{5}{6}\end{pmatrix}$ et $\vec{v}\begin{pmatrix}11\\-15\end{pmatrix}$.

g) $\vec{u}\begin{pmatrix}\sqrt{5}-1\\-1\end{pmatrix}$ et $\vec{v}\begin{pmatrix}-4\\\sqrt{5}+1\end{pmatrix}$.

EXERCICE 23.

Déterminez un réel μ de sorte que les vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ soient colinéaires.

a) $\vec{u}\begin{pmatrix}-3\\5\end{pmatrix}$ et $\vec{v}\begin{pmatrix}\mu\\2\end{pmatrix}$.

b) $\vec{u}\begin{pmatrix}5\\\mu\end{pmatrix}$ et $\vec{v}\begin{pmatrix}2\\1/3\end{pmatrix}$. o

EXERCICE 24.

Soient $A(-10;7)$, $B(-20;10)$, $C(5;-2)$ et $D(10;-8)$ des points du plan.
$\overrightarrow{AC}$ et $\overrightarrow{DB}$ sont-ils colinéaires ?

EXERCICE 25.

Soient les points $C(0;4)$, $D(2;7)$, $E(8;17)$ et $F(16;29)$.

1. Montrez que $\overrightarrow{CD}$ et $\overrightarrow{EF}$ sont colinéaires.
2. $\overrightarrow{CD}$ et $\overrightarrow{CE}$ sont-ils colinéaires ?

EXERCICE 26.

On considère des points $F(6;4)$ et G d'abscisse 8 des points. Sachant que $\overrightarrow{FG}$ est colinéaire au vecteur $\vec{u}\begin{pmatrix}5\\-3\end{pmatrix}$ déterminez l'ordonnée de G.

Parallélisme.

EXERCICE 27.

Soient $A(-4;-3)$, $B(8;1)$, $C(4,4)$ et $D(-2;2)$ des points du plan.
Étudiez la position relative de (AB) et (CD).

EXERCICE 28. Déterminez la position relative des droites (AB) et (MN).

a) $A(1;2)$, $B(5;8)$, $M(0;-1)$ et $N(5;6)$.

b) $A(3;-10)$, $B(15;5)$, $M(1;1)$ et $N(17;21)$.

Alignement de trois points.

EXERCICE 29.

Soient $A(-2;3)$, $B(2;1)$ et $C(4;0)$ dans un repère du plan muni d'un repère $(O:\vec{i},\vec{j})$.
Démontrez que A, B et C sont alignés.

EXERCICE 30. Déterminez si les points A, B et C sont alignés.

a) $A(2;13)$, $B(-2;-7)$ et $C(11;58)$.

b) $A(9;20)$, $B(2;-1)$ et $C(25;71)$.

EXERCICE 31.

Déterminez si le point M appartient à la droite (EF).

a) $E(5;-3)$, $F(-3;3)$ et $M(15;-9)$.

b) $E(0;-7)$, $F(1;0)$, $M(2;7)$.

Exercices.

EXERCICE 32.

Déterminez tous les nombres x tels que $\vec{u}$ et $\vec{v}$ soient colinéaires.

1. $\vec{u}\begin{pmatrix}1\\5\end{pmatrix}$ et $\vec{v}\begin{pmatrix}x\\10\end{pmatrix}$.

1. $\vec{u}\begin{pmatrix}2\\3\end{pmatrix}$ et $\vec{v}\begin{pmatrix}1+x\\2x\end{pmatrix}$.

EXERCICE 33.

On considère les points $E(5;-1)$, $F(-1;4)$, $G(7;2)$ et $M(1;y)$ où y est un nombre réel.

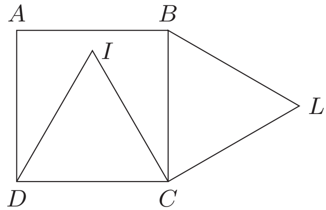
1. Pour quelle valeur de y le point m appartient-il à (FG) ?
2. Pour quelles valeurs de y les droites (EF) et (GM) sont-elles parallèles ?

EXERCICE 34. Soient $A(4;0)$, $B(0;7)$ et $C(-6;-5)$ des points.

1. Calculez les coordonnées du milieu P de $[AB]$.
2. Calculez les coordonnées des points S et T définis par $\overrightarrow{BS} = \frac{1}{3}\overrightarrow{CB}$ et $5\overrightarrow{CT} = 4\overrightarrow{CA}$.
3. Le point P est-il sur la droite (ST) ?

EXERCICE 35.

Soient $ABCD$ un carré, BCL et DIC des triangles équilatéraux tels que sur la figure ci-contre.
Nous souhaitons établir l'alignement des points A, I et L.
Pour cela considérons le repère orthonormé $(D;C;A)$.



1. Donnez sans justification les coordonnées de D, C, A et B.
2. Déterminez les coordonnées de I et L.
3. Calculez les coordonnées des vecteurs $\overrightarrow{AI}$ et $\overrightarrow{AL}$.
4. Démontrez l'alignement des points A, I et L.

EXERCICE 36. Soient $M(7;3)$, $N(-3;1)$, $C(0;5)$ et $E(3;9)$ des points du plan.

1. Montrez que le quadrilatère $MNCD$ est un trapèze.
2. Montrez que E est le point d'intersection de (NC) et (MD).
3. Soient J et K les milieux respectivement de $[NM]$ et $[CD]$. Calculez les coordonnées de J et K.
4. Montrez que E, J et K sont alignés.

EXERCICE 37. Soient $A(3;4)$, $B(1;1)$, $C(6;-2)$ et $D(8;1)$ des points, I le milieu de $[BC]$, et E et F les points définis par :

$$\overrightarrow{AE} = \frac{1}{3}\overrightarrow{AC} \quad \text{et} \quad \overrightarrow{CF} = \frac{1}{3}\overrightarrow{CA}.$$

1. Calculez les coordonnées de I, E et F.
2. (a) Les vecteurs $\overrightarrow{BE}$ et $\overrightarrow{IF}$ sont-ils colinéaires ?
   (b) Qu'en déduisez-vous concernant les droites (BE) et (IF) ?
3. Montrez que $ABCD$ est un parallélogramme.
4. (a) Calculez la norme du vecteur $\overrightarrow{AC}$.

(b) $ABCD$est -il un rectangle ?

5. Les points I, F et D sont-ils alignés ?

EXERCICE 38. Soit $ABCD$ un trapèze tel que $\overrightarrow{CD} = -\frac{1}{3}\overrightarrow{AB}$.

Les points I et Jsont les milieux de $[AC]$ et de $[BD]$. On se propose de montrer que $(AB) \parallel (IJ)$.

1. Complétez : $\overrightarrow{IJ} = \cdots + \overrightarrow{AB} + \ldots$ et $\overrightarrow{IJ} = \cdots + \overrightarrow{CD} + \ldots$.
2. Déduisez-en : $\overrightarrow{IJ} = \frac{1}{2}\left(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{CD}\right)$.
3. Trouvez k tel que $\overrightarrow{IJ} = k\overrightarrow{AB}$ et concluez.