19 Vecteurs.

I Vecteurs et translations.

Définition du vecteur.

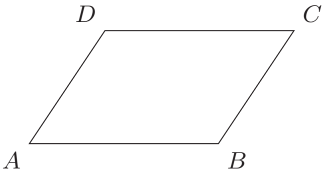
Égalité de représentants.

Somme de vecteurs.

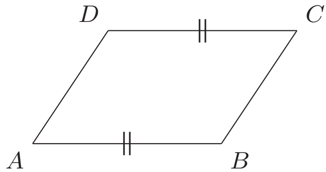
Exercices.

EXERCICE 1. Dites, sans justification, si le quadrilatère $ABCD$ est un parallélogramme dans les cas suivants.

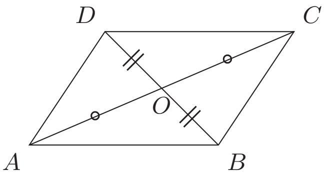
a)



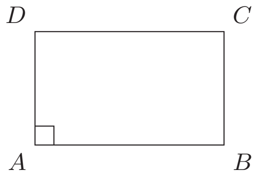
b)



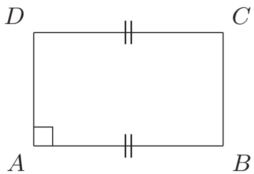
c)



d)



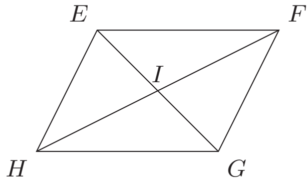
e)



EXERCICE 2. Dites, sans justification, si le quadrilatère $ABCD$ est un parallélogramme dans les cas suivants.

a) Le quadrilatère $ABCD$ à deux angles opposés de même mesure.
b) $ABCD$ à des côtés opposés parallèles deux à deux.
c) Le trapèze $ABCD$ a deux angles opposés de même mesure.
d) $ABCD$ est un losange.
e) $ABCD$ est non croisé et ses côtés opposés sont de même longueur deux à deux.
f) $ABCD$ est non croisé et deux côtés opposés sont parallèles et de même longueur.
g) $ABCD$ est un rectangle.
h) $ABDC$ est un carré.

EXERCICE 3. On considère un parallélogramme $EFGH$ tel que ci-dessous.



1. Donnez un vecteur égale à

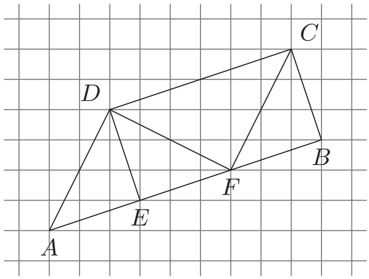
   a) $\overrightarrow{EF}$. b) $\overrightarrow{GH}$. c) $\overrightarrow{EH}$. d) $\overrightarrow{GF}$.

2. Complétez par le point qui convient.

   a) $\overrightarrow{EI} = \overrightarrow{I\ldots}$. b) $\overrightarrow{HI} = \overrightarrow{I\ldots}$. c) $\overrightarrow{FI} = \overrightarrow{I\ldots}$.

EXERCICE 4. Par lecture graphique indiquez

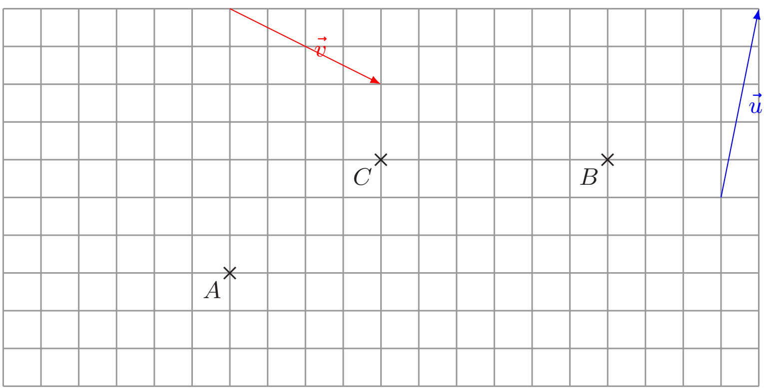
1. un vecteur égal à $\overrightarrow{AE}$; à $\overrightarrow{CF}$.
2. un vecteur de même direction que $\overrightarrow{CB}$ mais de sens opposé ; idem pour $\overrightarrow{AF}$.
3. un vecteur égal à $\overrightarrow{DC}$ d'extrémité F ; égal à $\overrightarrow{FB}$ d'origine A.
4. deux vecteurs de même de direction, de même sens qui ne sont pas égaux.
5. deux vecteurs de même norme qui ne sont pas égaux.



EXERCICE 5. Soient $t_{\vec{u}}$ une translation de vecteur $\vec{u}$, A et B des points, C et D leurs images respectives par la translation $t_{\vec{u}}$. Démontrez que $ABDC$ est un parallélogramme.

EXERCICE 6. Soient $t_{\vec{u}}$ une translation de vecteur $\vec{u}$, M et P des points, N l'image de M par la translation $t_{\vec{u}}$, Q un point tel que $MNQP$ soit un parallélogramme. Démontrez que $\overrightarrow{PQ} = \vec{u}$.

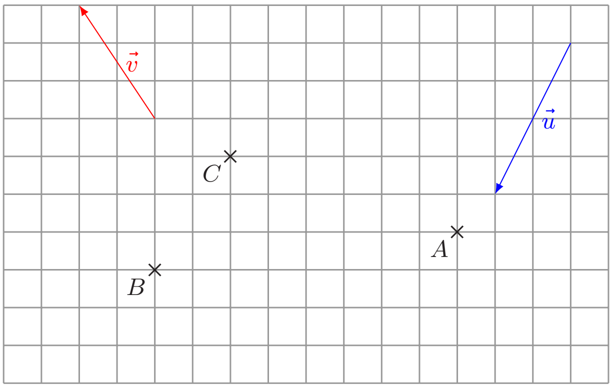
EXERCICE 7.



Tracez dans chaque cas.

a) Le point F tel que $ACBF$ soit un parallélogramme.
b) Le point G tel que $ABCG$ soit un parallélogramme.
c) Le représentant de $\vec{u}$ d'origine A.
d) Le représentant de $\vec{u}$ d'extrémité B.
e) L'image D de B par la translation de vecteur $\vec{v}$.
f) Le point E dont C est l'image par la translation de vecteur $\vec{v}$.
g) Le représentant de $\overrightarrow{AC}$ d'extrémité B.
h) Le représentant de $\overrightarrow{CB}$ d'origine A.

EXERCICE 8.

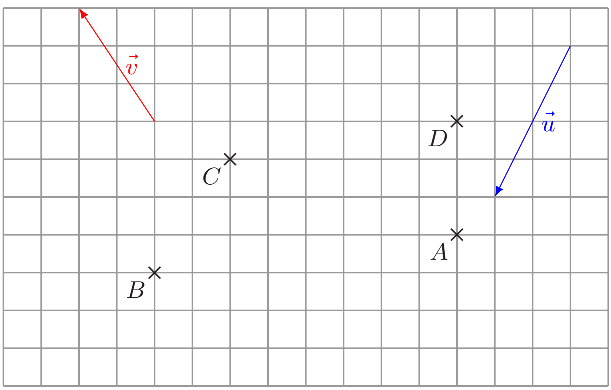


Tracez dans chaque cas.

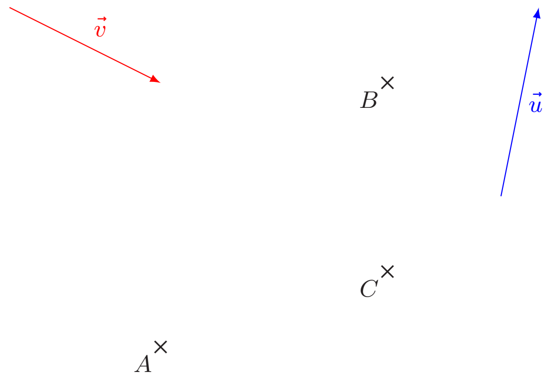
a) Le point F tel que $ACBF$ soit un parallélogramme.
b) Le point G tel que $BACG$ soit un parallélogramme.
c) Le représentant de $\vec{u}$ d'origine A.
d) Le représentant de $\vec{u}$ d'extrémité B.
e) L'image D de B par la translation de vecteur $\vec{v}$.
f) Le point E dont C est l'image par la translation de vecteur $\vec{v}$.
g) Le représentant de $\overrightarrow{AC}$ d'extrémité B.
h) Le représentant de $\overrightarrow{CB}$ d'origine A.

EXERCICE 9.

Dessinez les vecteurs $\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{AD}$, $\overrightarrow{BC} + \overrightarrow{AC}$, $\overrightarrow{BC} + \overrightarrow{DA}$, $\vec{u} + \vec{v}$ et $\overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CA}$.



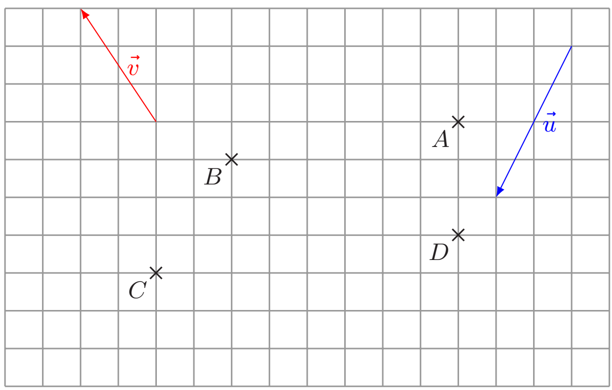
EXERCICE 10.



Tracez dans chaque cas.

a) Le point F tel que $ACBF$ soit un parallélogramme.
b) Le point G tel que $ABCG$ soit un parallélogramme.
c) Le représentant de $\vec{u}$ d'origine A.
d) Le représentant de $\vec{u}$ d'extrémité B.
e) L'image D de B par la translation de vecteur $\vec{v}$.
f) Le point E dont C est l'image par la translation de vecteur $\vec{v}$.
g) Le représentant de $\overrightarrow{AC}$ d'extrémité B.
h) Le représentant de $\overrightarrow{CB}$ d'origine A.

EXERCICE 11. Dessinez les vecteurs $\overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CA}$, $\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{AD}$,$\overrightarrow{BC} + \overrightarrow{AC}$, $\overrightarrow{BC} + \overrightarrow{DA}$ et $\vec{u} + \vec{v}$.



EXERCICE 12. On considère un parallélogramme $RSTU$ de centre O. On note F l'image du point S par la translation de vecteur $\overrightarrow{UT}$ et E l'image de F par la translation de vecteur $\overrightarrow{RU}$. Démontrez que $RSET$ est un parallélogramme.

EXERCICE 13. Soient EDF un triangle rectangle en D tel que $ED = 6$ cm et $DF = 4,5$ cm, I et J les milieux respectifs de $[ED]$ et $[DF]$, G et H les images respectives de F et I par la translation de vecteur $\overrightarrow{JI}$.

1. Quelle conjecture peut-on émettre pour le point G ?

2. Quelle est la nature de $DJEH$?

EXERCICE 14. Soient ABC un triangle quelconque, I le milieu de $[AB]$, I' l'image de I par la translation de vecteur $\overrightarrow{BC}$, A' l'image de A par la translation de vecteur $\overrightarrow{I'I}$.

Démontrez que $A'BCA$ est un parallélogramme puis en déduire que $\overrightarrow{A'I} = \overrightarrow{IC}$.

EXERCICE 15. En choisissant des points judicieux complétez.

a) $\overrightarrow{AB} + \cdots = \overrightarrow{AE}$
b) $\overrightarrow{G\ldots} + \overrightarrow{B\ldots} = \overrightarrow{GI}$
c) $\overrightarrow{\ldots B} + \overrightarrow{B\ldots} = \overrightarrow{CG}$
d) $\overrightarrow{BE} + \cdots = \overrightarrow{BD}$
e) $\overrightarrow{BE} + \overrightarrow{\ldots F} = \overrightarrow{B\ldots}$
f) $\overrightarrow{B\ldots} + \overrightarrow{\ldots A} = \overrightarrow{BA}$
g) $\overrightarrow{BE} - \overrightarrow{G\ldots} = \overrightarrow{B\ldots}$
h) $\overrightarrow{\ldots E} + \overrightarrow{E\ldots} = \overrightarrow{BC}$
i) $\overrightarrow{A\ldots} + \overrightarrow{B\ldots} = \overrightarrow{AC}$
j) $\overrightarrow{O\ldots} + \overrightarrow{M\ldots} = \overrightarrow{\ldots P}$
k) $\overrightarrow{A\ldots} + \overrightarrow{D\ldots} + \overrightarrow{M\ldots} = \overrightarrow{AG}$

EXERCICE 16. Simplifiez les expressions suivantes (grâce notamment à la relation de Chasles).

a) $\overrightarrow{GE} + \overrightarrow{CG}$.
b) $\overrightarrow{GE} - \overrightarrow{IE} + \overrightarrow{CG}$.
c) $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{GE} - \overrightarrow{CB} + \overrightarrow{EI} + \overrightarrow{CG}$.
d) $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CA}$.
e) $\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{BC} - \overrightarrow{BA}$.
f) $\overrightarrow{MA} - \overrightarrow{MB} - \overrightarrow{AB}$.

EXERCICE 17. Démontrez.

a) $\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{CD} - \overrightarrow{AC} = \overrightarrow{DB}$.
b) $\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{DB} + \overrightarrow{DE} = \overrightarrow{AE}$.
c) $\overrightarrow{BE} + \overrightarrow{CB} - \overrightarrow{DE} = \overrightarrow{CD}$.
d) $\overrightarrow{BD} - \overrightarrow{CA} + \overrightarrow{CB} - \overrightarrow{AD} = \vec{0}$.
e) $\overrightarrow{CB} - \overrightarrow{CA} + \overrightarrow{BD} = \overrightarrow{AD}$
f) $\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{BD} + \overrightarrow{CE} + \overrightarrow{DA} + \overrightarrow{EB} = \vec{0}$

II Base orthonormée.

Multiplication d'un vecteur par un scalaire.

Base de vecteurs.

Vecteurs et coordonnées.

Exercices.

EXERCICE 18. Dessinez deux points A et B distincts puis placez les points M, N et P tels que $\overrightarrow{AM} = \frac{5}{2}\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{NA} = 3\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{BP} = -\frac{1}{4}\overrightarrow{AB}$.

EXERCICE 19. Soient A et B deux points distincts, I le milieu du segment $[AB]$.

Dans chaque cas déterminez le réel λ tel que : $\overrightarrow{AI} = \lambda\overrightarrow{AB}$ puis $\overrightarrow{BI} = \lambda\overrightarrow{AB}$.

EXERCICE 20. Soient A et B deux points du plan distants de 6 unités de longueur (choisissez deux unités de longueur par centimètre).

1. (a) Construisez le point L tel que $\overrightarrow{BL} = \frac{5}{2}\overrightarrow{AB}$.
   (b) Construisez le point K tel que $\overrightarrow{AK} = -\frac{4}{3}\overrightarrow{AB}$.
2. (a) En remarquant que le vecteur $\overrightarrow{LK}$ peut s'écrire $\overrightarrow{LB} + \overrightarrow{BA} + \overrightarrow{AK}$, établissez une relation entre les vecteurs $\overrightarrow{LK}$ et $\overrightarrow{AB}$.
   (b) Déduisez-en la longueur LK en unités de longueur.

EXERCICE 21. Soient A, B et C trois points du plan tels que :

$$3\overrightarrow{AB} - 2\overrightarrow{AC} = \vec{0}.$$

1. Réalisez une figure.
2. En remarquant que le vecteur $\overrightarrow{AC}$ peut s'écrire $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC}$, exprimez le vecteur $\overrightarrow{AB}$ en fonction du vecteur $\overrightarrow{BC}$ en justifiant la réponse.

EXERCICE 22. C Soit $MNPQ$ un parallélogramme. On définit le point R tel que $\overrightarrow{QR} = \frac{3}{4}\overrightarrow{MN}$ et le point S tel que $\overrightarrow{MS} = -\frac{4}{3}\overrightarrow{MQ}$.

1. Réalisez une figure.
2. (a) En remarquant que le vecteur $\overrightarrow{MR}$ peut s'écrire $\overrightarrow{MQ} + \overrightarrow{QR}$, montrez que $\overrightarrow{MR} = \overrightarrow{MQ} + \frac{3}{4}\overrightarrow{MN}$.

   (b) En remarquant que le vecteur $\overrightarrow{NS}$ peut s'écrire $\overrightarrow{NM} + \overrightarrow{MS}$, montrez que $\overrightarrow{NS} = -\overrightarrow{MN} - \frac{4}{3}\overrightarrow{MQ}$.

   (c) Déduisez-en une relation entre les vecteurs $\overrightarrow{MR}$ et $\overrightarrow{NS}$.

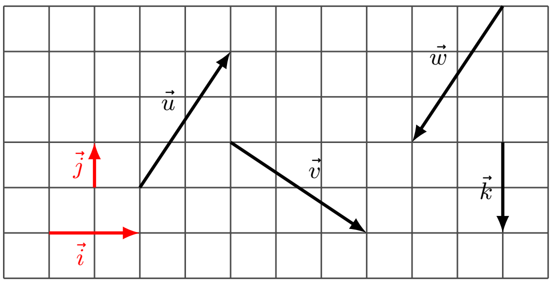
EXERCICE 23. Soient $ABCD$ un parallélogramme et S et V des points tels que $\overrightarrow{AV} = 2\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{CS} = 2\overrightarrow{CD}$.

Montrez que les segments $[VS]$ et $[AC]$ ont le même milieu.

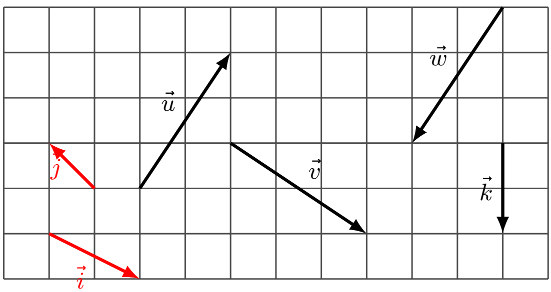
EXERCICE 24. Soient ABC un triangle rectangle en A et I est le milieu de l'hypoténuse. On appelle A' le symétrique de A par rapport à I, B' et C' les images de B et C dans la translation de vecteur $\overrightarrow{AI}$.

Démontrez que A' est le milieu de $[B'C']$.

EXERCICE 25. Exprimez les vecteurs $\vec{u}$, $\vec{v}$, $\vec{w}$ et $\vec{k}$ comme combinaisons linéaires des vecteurs $\vec{i}$ et $\vec{j}$.



EXERCICE 26. Exprimez les vecteurs $\vec{u}$, $\vec{v}$, $\vec{w}$ et $\vec{k}$ comme combinaisons linéaires des vecteurs $\vec{i}$ et $\vec{j}$.



EXERCICE 27. Donnez les coordonnées du vecteur dans la base $(\vec{a}, \vec{b})$.

1. $\vec{u} = \vec{b} - 7\vec{a}$.
2. $\vec{v} = 3\vec{a} + 2\vec{b} - 7\vec{a} + 4\vec{a}$.
3. $\vec{w} = 2\overrightarrow{AB} - 3\overrightarrow{CD}$ où $\overrightarrow{AB} = \vec{a} + \vec{b}$ et $\overrightarrow{CD} = -2\vec{b} + 5\vec{a}$

EXERCICE 28. Exercices 49 à 51 page 188 du manuel Lelivrescolaire.

EXERCICE 29. Déterminez $x, y \in \mathbb{R}$ de sorte que $\vec{u} = \vec{v}$.

a) $\vec{u}\begin{pmatrix} x+2 \\ 3 \end{pmatrix}$ et $\vec{v}\begin{pmatrix} -4 \\ 2y+3 \end{pmatrix}$.

b) $\vec{u}\begin{pmatrix} -2x+5 \\ 3y-5 \end{pmatrix}$ et $\vec{v}\begin{pmatrix} 12 \\ -12y+4 \end{pmatrix}$.

c) $\vec{u}\begin{pmatrix} 3x^2+x+7 \\ \frac{2}{y} \end{pmatrix}$ et $\vec{v}\begin{pmatrix} x-10 \\ \frac{4}{y+1} \end{pmatrix}$.

d) $\vec{u}\begin{pmatrix} x^2 \\ y+x \end{pmatrix}$ et $\vec{v}\begin{pmatrix} 144 \\ 3y-4 \end{pmatrix}$.

EXERCICE 30. Exercice 53 page 188 du manuel Lelivrescolaire.

EXERCICE 31. Calculez la norme des vecteurs $\vec{u}\begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix}$, $\vec{v}\begin{pmatrix} -3 \\ 2 \end{pmatrix}$ et $\vec{w}\begin{pmatrix} 0 \\ -4 \end{pmatrix}$.

EXERCICE 32. Soient $A(-2;1)$, $B(2;4)$, $C(3;0)$ et $D(-1;-3)$ des points du plan muni d'un repère.

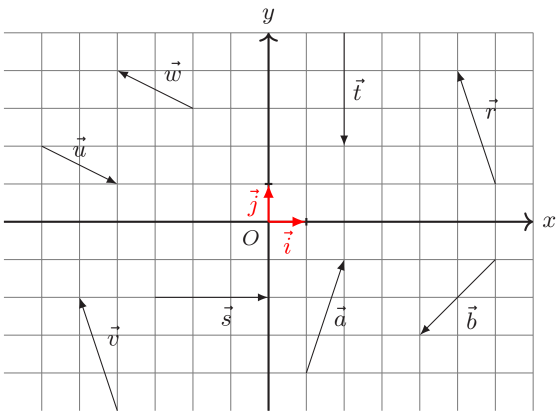
Démontrez que $ABCD$ est un parallélogramme.

EXERCICE 33. Soient $A(-3;3)$, $B(2;5)$, $C(4;0)$ et $D(-1;-2)$ dans un repère orthonormé $\left(O; \vec{i}, \vec{j}\right)$.

1. Démontrez que $ABCD$ est un parallélogramme.
2. Calculez AC et BD.
3. Qu'en déduisez-vous sur $ABCD$?

EXERCICE 34.

Lisez les coordonnées des vecteurs représentés ci-contre et indiquez ceux qui sont égaux.



EXERCICE 35. Soient $A(7;-3)$, $B(3;2)$ et $C(-5;-4)$ des points du plan muni d'un repère.

Déterminez les coordonnées du point $D(x_D; y_D)$ qui vérifie $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CD}$.

EXERCICE 36. Soient $A(2;-3)$ et $B(-1;4)$ deux points dans un repère orthonormé $(O; \vec{i}, \vec{j})$.

Calculez $||\overrightarrow{AB}||$.

EXERCICE 37. Exercices 54 page 188, 56 page 189 du manuel Lelivrescolaire.

EXERCICE 38. Exercices 57 et 58 page 189 du manuel Lelivrescolaire.

EXERCICE 39. Dans un repère on considère les points : $A(-2;1)$, $B(3;4)$ et $C(-5;2)$.

Calculez les coordonnées du point M tel que $\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC} = \vec{0}$.

EXERCICE 40. Soit les vecteurs $\vec{u}\begin{pmatrix} 0 \\ 5 \end{pmatrix}$ et $\vec{v}\begin{pmatrix} 4 \\ -2 \end{pmatrix}$.

1. Calculez $\|\vec{u}\|$ et $\|\vec{v}\|$.
2. Calculez les coordonnées $\vec{u}+\vec{v}$.
3. Montrez que $\|\vec{u}+\vec{v}\| = 5$.

EXERCICE 41.

1. Soient $\vec{u}\begin{pmatrix}2\\-5\end{pmatrix}$ et $\vec{v}\begin{pmatrix}3\\7\end{pmatrix}$.

   (a) Le vecteur $\vec{u}+\vec{v}$ a pour coordonnées :

   a) $\begin{pmatrix}5\\12\end{pmatrix}$. b) $\begin{pmatrix}5\\2\end{pmatrix}$. c) $\begin{pmatrix}1\\12\end{pmatrix}$. d) $\begin{pmatrix}9\\-2\end{pmatrix}$.

   (b) Le vecteur $-2\vec{u}$ a pour coordonnées :

   a) $\begin{pmatrix}-4\\-5\end{pmatrix}$. b) $\begin{pmatrix}2\\10\end{pmatrix}$. c) $\begin{pmatrix}-4\\-10\end{pmatrix}$. d) $\begin{pmatrix}-4\\10\end{pmatrix}$.

2. Calculez les coordonnées de $\vec{u}+\vec{v}$ si

   a) $\vec{u}\begin{pmatrix}2\\3\end{pmatrix}$ et $\vec{v}\begin{pmatrix}1\\3\end{pmatrix}$. b) $\vec{u}\begin{pmatrix}1\\4\end{pmatrix}$ et $\vec{v}\begin{pmatrix}-2\\6\end{pmatrix}$.

EXERCICE 42. Soient les points $A(-2;1)$, $B(4;2)$ et $C(2;4)$.

1. (a) Montrez que les coordonnées du vecteur $\overrightarrow{AB}$ sont $(6;1)$.
   (b) Calculez les coordonnées du vecteurs $\overrightarrow{AC}$.
   (c) Calculez les coordonnées du vecteur $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}$.
2. (a) Placez les points dans un repère orthonormé est dessinez le représentant d'origine A du vecteur $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}$.
   (b) Vérifiez le résultat de la question 1.(c).

EXERCICE 43. Déterminez les coordonnées de $-7\vec{u}$ sachant que $\vec{u}\begin{pmatrix}-3\\\sqrt{2}\end{pmatrix}$.

EXERCICE 44. Les questions sont indépendantes les unes des autres (sauf les deux dernières).

1. Soient $\vec{u}(2,-1)$ et $\vec{v}(1;2)$.

   (a) Calculez les coordonnées de $3\vec{u}$ et $2\vec{v}$.

   (b) Calculez les coordonnées de $3\vec{u}+2\vec{v}$.

2. Soient $\vec{u}(5;1)$ et $\vec{v}(2;-3)$. calculez les coordonnées de $\vec{u}+\vec{v}$, $2\vec{u}$, $-3\vec{v}$ et $2\vec{u}-3\vec{v}$.
3. Soient $\vec{u}(0;-1)$, $\vec{v}(3;4)$ et $\vec{w}(8;-6)$. Calculez la norme de chacun des vecteurs $\vec{u}$, $\vec{v}$ et $\vec{w}$.
4. Soient $\vec{u}(0;5)$ et $\vec{v}(4;-2)$.

   (a) Calculez la norme de chacun des vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$.

   (b) Calculez les coordonnées du vecteur $\vec{u}+\vec{v}$.

   (c) Montrez que $\|\vec{u}+\vec{v}\| = 5$.

5. Dites en justifiant si la proposition suivante est vraie : « Pour tous vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$, $\|\vec{u}+\vec{v}\| = \|\vec{u}\| + \|\vec{v}\|$ ».

EXERCICE 45. Soient $A(-1;-2)$, $B(5;-1)$, $C(6;3)$ et $D(0;2)$ des points considérés dans un repère du plan.

1. Faites un figure.

2. Construisez le point E tel que $\overrightarrow{AE} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{CB}$.
3. Déterminez les coordonnées de E.
4. Démontrez que $\overrightarrow{BE} = -\overrightarrow{BC}$.
5. Que pouvez-vous en déduire ?

EXERCICE 46. Soient ABC un triangle et K, L et M les milieux respectifs de $[AB]$, $[AC]$ et $[BC]$.

1. Démontrez que $\overrightarrow{KL} = \overrightarrow{BM}$.
2. Déduisez-en $\overrightarrow{BC}$ en fonction de $\overrightarrow{KL}$.

EXERCICE 47. Soient ABC un triangle, D et E des points tels que $\overrightarrow{BE} = \overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{ED} = 2\overrightarrow{BC}$.
Faites une figure puis démontrez que C est le milieu du segment $[AD]$.

EXERCICE 48. Soient $ABCD$ un carré non trivial (non réduit à un point), E le symétrique de A par rapport à B et I le milieu de $[BC]$.

1. Faites un croquis à main levé.
2. Justifiez que $\left(A; \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AD}\right)$ est un repère orthonormé du plan.
3. Déterminez les coordonnées des différents points de la figure puis montrez que I est le milieu de $[DE]$.
4. Démontrez ce résultat sans utiliser de repère.

EXERCICE 49. On considère un carré $ABCD$ non réduit à un point.

1. Justifiez que $\left(A; \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AD}\right)$ est un repère du plan. Est-il orthonormé ?
2. Justifiez que $\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD}$ et en déduire les coordonnées du point C dans le repère $\left(A; \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AD}\right)$.
3. On considère le point E symétrique de A par rapport à B et le point F symétrique de F par rapport à D.
   Déterminez les coordonnées des points E et F dans le repère $\left(A; \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AD}\right)$.
4. Que semble représenter le point C par rapport aux points E et F ? Démontrez le par au moins 3 méthodes différentes.

EXERCICE 50. Soient T, R et I trois points non alignés.
Les points U et V sont définis par : $\overrightarrow{IU} = \overrightarrow{IR} + \overrightarrow{TI}$ et $\overrightarrow{TV} = \overrightarrow{TI} + \overrightarrow{TR}$

1. Faire une figure sur papier ou à l'aide d'un logiciel de géométrie dynamique.
2. Que peut-on conjecturer ?
3. (a) Démontrer que $\overrightarrow{UV} = \overrightarrow{RI} + \overrightarrow{IT} + \overrightarrow{TR}$.
   (b) Conclure.

EXERCICE 51. Soient T, R et I trois points non alignés. On définit les points A, B et C par : $\overrightarrow{IA} = \overrightarrow{RT} - \overrightarrow{IT}$, $\overrightarrow{IB} = \overrightarrow{TI}$ et $\overrightarrow{IC} = \overrightarrow{RT} + \overrightarrow{RI}$.

1. Faire une figure sur papier ou à l'aide d'un logiciel de géométrie dynamique.
2. Que peut-on conjecturer ?
3. (a) Démontrer que $\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{IC} - \overrightarrow{IA}$ et $\overrightarrow{BA} = \overrightarrow{IA} - \overrightarrow{IB}$.
   (b) En déduire une expression des vecteurs $\overrightarrow{BA}$ et $\overrightarrow{AC}$ en fonction de $\overrightarrow{RT}$ puis conclure.

III Colinéarité de deux vecteurs.

Colinéarité.

Caractérisations.

EXERCICE 52.

Déterminez si $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont colinéaires.

a) $\vec{u}\begin{pmatrix}6\\-4\end{pmatrix}$ et $\vec{v}\begin{pmatrix}-12\\8\end{pmatrix}$. b) $\vec{u}\begin{pmatrix}\sqrt{2}-1\\1\end{pmatrix}$ et $\vec{v}\begin{pmatrix}1\\\sqrt{2}+1\end{pmatrix}$. c) $\vec{u}\begin{pmatrix}3\\4\end{pmatrix}$ et $\vec{v}\begin{pmatrix}-1\\2\end{pmatrix}$.

d) $\vec{u}\begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix}$ et $\vec{v}\begin{pmatrix}x\\3\end{pmatrix}$ où $x \in \mathbb{R}$.

EXERCICE 53.

Donnez deux vecteurs colinéaires à $\vec{u}\begin{pmatrix}3\\-3\end{pmatrix}$.

EXERCICE 54.

Soient $\vec{u}\begin{pmatrix}-8\\3\end{pmatrix}$ et $\vec{v}\begin{pmatrix}7\\11\end{pmatrix}$. Calculez le déterminant de $\vec{u}$ et $\vec{v}$ puis dites si les vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont colinéaires.

EXERCICE 55. Déterminez si les vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont colinéaires.

a) $\vec{u}\begin{pmatrix}-3\\21\end{pmatrix}$ et $\vec{v}\begin{pmatrix}-3\\21\end{pmatrix}$. b) $\vec{u}\begin{pmatrix}3\\12\end{pmatrix}$ et $\vec{v}\begin{pmatrix}12\\3\end{pmatrix}$.

c) $\vec{u}\begin{pmatrix}7/4\\2/7\end{pmatrix}$ et $\vec{v}\begin{pmatrix}1/2\\4\end{pmatrix}$. d) $\vec{u}\begin{pmatrix}2/3\\2\end{pmatrix}$ et $\vec{v}\begin{pmatrix}1/5\\3/5\end{pmatrix}$.

e) $\vec{u}\begin{pmatrix}-10\\4\end{pmatrix}$ et $\vec{v}\begin{pmatrix}15\\-6\end{pmatrix}$. f) $\vec{u}\begin{pmatrix}3/2\\2\end{pmatrix}$ et $\vec{v}\begin{pmatrix}21\\28\end{pmatrix}$.

EXERCICE 56. Déterminez si $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont colinéaires et si c'est le cas précisez l'égalité les reliant.

a) $\vec{u}\begin{pmatrix}1\\4\end{pmatrix}$ et $\vec{v}\begin{pmatrix}-2\\-8\end{pmatrix}$. b) $\vec{u}\begin{pmatrix}6\\4\end{pmatrix}$ et $\vec{v}\begin{pmatrix}9\\6\end{pmatrix}$. c) $\vec{u}\begin{pmatrix}-5\\3\end{pmatrix}$ et $\vec{v}\begin{pmatrix}15\\-9\end{pmatrix}$.

d) $\vec{u}\begin{pmatrix}4\\12\end{pmatrix}$ et $\vec{v}\begin{pmatrix}6\\18\end{pmatrix}$. e) $\vec{u}\begin{pmatrix}\frac{2}{3}\\2\end{pmatrix}$ et $\vec{v}\begin{pmatrix}1\\3\end{pmatrix}$. f) $\vec{u}\begin{pmatrix}\frac{5}{9}\\-\frac{5}{6}\end{pmatrix}$ et $\vec{v}\begin{pmatrix}11\\-15\end{pmatrix}$.

g) $\vec{u}\begin{pmatrix}\sqrt{5}-1\\-1\end{pmatrix}$ et $\vec{v}\begin{pmatrix}-4\\\sqrt{5}+1\end{pmatrix}$.

EXERCICE 57. Déterminez un réel μ de sorte que les vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ soient colinéaires.

a) $\vec{u}\begin{pmatrix}-3\\5\end{pmatrix}$ et $\vec{v}\begin{pmatrix}\mu\\2\end{pmatrix}$. b) $\vec{u}\begin{pmatrix}5\\\mu\end{pmatrix}$ et $\vec{v}\begin{pmatrix}2\\1/3\end{pmatrix}$. o

EXERCICE 58. Soient $A(-10;7)$, $B(-20;10)$, $C(5;-2)$ et $D(10;-8)$ des points du plan. $\overrightarrow{AC}$ et $\overrightarrow{DB}$ sont-ils colinéaires ?

EXERCICE 59. Soient les points $C(0;4)$, $D(2;7)$, $E(8;17)$ et $F(16;29)$.

1. Montrez que $\overrightarrow{CD}$ et $\overrightarrow{EF}$ sont colinéaires.
2. $\overrightarrow{CD}$ et $\overrightarrow{CE}$ sont-ils colinéaires ?

EXERCICE 60. On considère des points $F(6;4)$ et G d'abscisse 8 des points. Sachant que $\overrightarrow{FG}$ est colinéaire au vecteur $\vec{u}\begin{pmatrix}5\\-3\end{pmatrix}$ déterminez l'ordonnée de G.

Parallélisme.

EXERCICE 61. Soient $A(-4;-3)$, $B(8;1)$, $C(4,4)$ et $D(-2;2)$ des points du plan.
Étudiez la position relative de (AB) et (CD).

EXERCICE 62. Déterminez la position relative des droites (AB) et (MN).

a) $A(1;2)$, $B(5;8)$, $M(0;-1)$ et $N(5;6)$.
b) $A(3;-10)$, $B(15;5)$, $M(1;1)$ et $N(17;21)$.

Alignement de trois points.

EXERCICE 63.
Soient $A(-2;3)$, $B(2;1)$ et $C(4;0)$ dans un repère du plan muni d'un repère $(O:\vec{i},\vec{j})$.
Démontrez que A, B et C sont alignés.

EXERCICE 64. Déterminez si les points A, B et C sont alignés.

a) $A(2;13)$, $B(-2;-7)$ et $C(11;58)$.
b) $A(9;20)$, $B(2;-1)$ et $C(25;71)$.

EXERCICE 65.
Déterminez si le point M appartient à la droite (EF).

a) $E(5;-3)$, $F(-3;3)$ et $M(15;-9)$.
b) $E(0;-7)$, $F(1;0)$, $M(2;7)$.

Exercices.

EXERCICE 66.
Déterminez tous les nombres x tels que $\vec{u}$ et $\vec{v}$ soient colinéaires.

a) $\vec{u}\begin{pmatrix}1\\5\end{pmatrix}$ et $\vec{v}\begin{pmatrix}x\\10\end{pmatrix}$.
b) $\vec{u}\begin{pmatrix}2\\3\end{pmatrix}$ et $\vec{v}\begin{pmatrix}1+x\\2x\end{pmatrix}$.

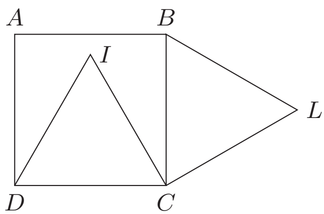
EXERCICE 67.
On considère les points $E(5;-1)$, $F(-1;4)$, $G(7;2)$ et $M(1;y)$ où y est un nombre réel.

1. Pour quelle valeur de y le point m appartient-il à (FG) ?
2. Pour quelles valeurs de y les droites (EF) et (GM) sont-elles parallèles ?

EXERCICE 68. Soient $A(4;0)$, $B(0;7)$ et $C(-6;-5)$ des points.

1. Calculez les coordonnées du milieu P de $[AB]$.
2. Calculez les coordonnées des points S et T définis par $\overrightarrow{BS} = \frac{1}{3}\overrightarrow{CB}$ et $5\overrightarrow{CT} = 4\overrightarrow{CA}$.
3. Le point P est-il sur la droite (ST) ?

EXERCICE 69.
Soient $ABCD$ un carré, BCL et DIC des triangles équilatéraux tels que sur la figure ci-contre.
Nous souhaitons établir l'alignement des points A, I et L.
Pour cela considérons le repère orthonormé $(D;C;A)$.



1. Donnez sans justification les coordonnées de D, C, A et B.
2. Déterminez les coordonnées de I et L.
3. Calculez les coordonnées des vecteurs $\overrightarrow{AI}$ et $\overrightarrow{AL}$.

4. Démontrez l'alignement des points A, I et L.

EXERCICE 70. Soient $M(7;3)$, $N(-3;1)$, $C(0;5)$ et $E(3;9)$ des points du plan.

1. Montrez que le quadrilatère $MNCD$ est un trapèze.
2. Montrez que E est le point d'intersection de (NC) et (MD).
3. Soient J et K les milieux respectivement de $[NM]$ et $[CD]$. Calculez les coordonnées de J et K.
4. Montrez que E, J et K sont alignés.

EXERCICE 71. Soient $A(3;4)$, $B(1;1)$, $C(6;-2)$ et $D(8;1)$ des points, I le milieu de $[BC]$, et E et F les points définis par :

$$\overrightarrow{AE} = \frac{1}{3}\overrightarrow{AC} \quad \text{et} \quad \overrightarrow{CF} = \frac{1}{3}\overrightarrow{CA}.$$

1. Calculez les coordonnées de I, E et F.
2. (a) Les vecteurs $\overrightarrow{BE}$ et $\overrightarrow{IF}$ sont-ils colinéaires ?
   (b) Qu'en déduisez-vous concernant les droites (BE) et (IF) ?
3. Montrez que $ABCD$ est un parallélogramme.
4. (a) Calculez la norme du vecteur $\overrightarrow{AC}$.
   (b) $ABCD$est -il un rectangle ?
5. Les points I, F et D sont-ils alignés ?

EXERCICE 72. Soit $ABCD$ un trapèze tel que $\overrightarrow{CD} = -\frac{1}{3}\overrightarrow{AB}$.

Les points I et Jsont les milieux de $[AC]$ et de $[BD]$. On se propose de montrer que $(AB) \parallel (IJ)$.

1. Complétez : $\overrightarrow{IJ} = \cdots + \overrightarrow{AB} + \ldots$ et $\overrightarrow{IJ} = \cdots + \overrightarrow{CD} + \ldots$.
2. Déduisez-en : $\overrightarrow{IJ} = \frac{1}{2}\left(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{CD}\right)$.
3. Trouvez k tel que $\overrightarrow{IJ} = k\overrightarrow{AB}$ et concluez.