19 Vecteurs.

I Vecteurs et translations.

Définition du vecteur.

Nous définirons un *vecteur $\vec{u}$* comme le déplacement associé à une translation t. Nous dirons que t est *la translation de vecteur $\vec{u}$* et nous noterons $t_{\vec{u}}$ cette translation.

Si t transforme le point A en un point B alors nous dirons que $\overrightarrow{AB}$ est un représentant de la translation et donc du vecteur $\vec{u}$. Un vecteur (et une translation) ont une infinité de représentant.

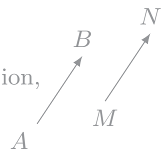
Si $\overrightarrow{MN}$ est un représentant d'un vecteur $\vec{u}$ alors nous définissons

— la *norme du vecteur* par : $\|\vec{u}\| = MN$,

— la *direction du vecteur* qui est la droite (MN) (ou une autre droite parallèle),

— le *sens du vecteur $\vec{u}$* : de M vers N.

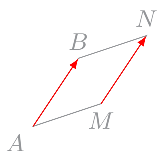
Deux représentants d'une même translation, d'un même vecteur.



Pour le représentant $\overrightarrow{MN}$, M est appelé *l'origine* et N est appelé *l'extrémité*.

Égalité de représentants.

Deux représentants $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{MN}$ sont égaux (représentent la même translation, le même vecteur) si et seulement si $ABNM$ est un parallélogramme.



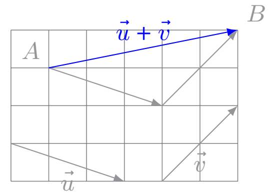
L'absence de déplacement est représentée par le vecteur $\vec{0}$ qui est appelé *le vecteur nul*. Ainsi $\overrightarrow{AA} = \vec{0}$.

Proposition 1. I est le milieu de $[AB]$ si et seulement si $\overrightarrow{AI} = \overrightarrow{IB}$.

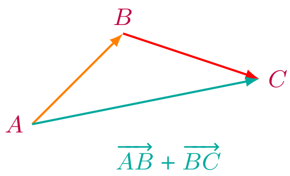
Somme de vecteurs.

La somme des vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ est le vecteur noté $\vec{u} + \vec{v}$, correspondant à la succession des translations $\vec{u}$ et $\vec{v}$.

Ci-dessous B est l'image de A par la translation de vecteur $\vec{u} + \vec{v}$. Nous pouvons aussi dire que $\overrightarrow{AB}$ est un représentant de $\vec{u} + \vec{v}$. Autrement dit $\vec{u} + \vec{v} = \overrightarrow{AB}$.



Proposition 2. *(Relation de Chasles.)*
Soient A, B et C trois points du plan. $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}=\overrightarrow{AC}$.

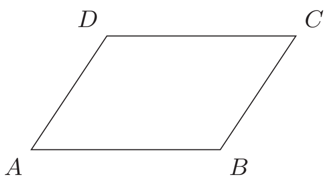


Un vecteur $\vec{v}$ tel que $\vec{u}+\vec{v}=\vec{0}$ est appelé *l'opposé de* $\vec{u}$ et on le note $-\vec{u}$.
Si $\overrightarrow{AB}$ est un représentant de $\vec{u}$ alors $\overrightarrow{BA}$ est un représentant de $-\vec{u}$.

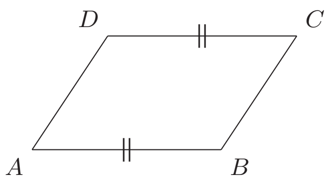
Exercices.

EXERCICE 1. Dites, sans justification, si le quadrilatère $ABCD$ est un parallélogramme dans les cas suivants.

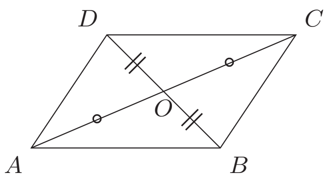
a)



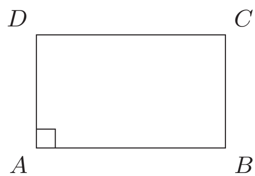
b)



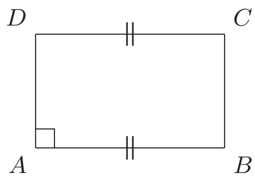
c)



d)



e)



Exercice 1.

a) Non. b) Non. c) Oui.
d) Non. e) Non.

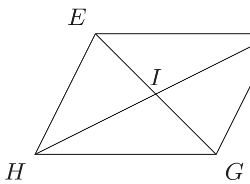
EXERCICE 2. Dites, sans justification, si le quadrilatère $ABCD$ est un parallélogramme dans les cas suivants.

a) Le quadrilatère $ABCD$ à deux angles opposés de même mesure.
b) $ABCD$ à des côtés opposés parallèles deux à deux.
c) Le trapèze $ABCD$ a deux angles opposés de même mesure.
d) $ABCD$ est un losange.
e) $ABCD$ est non croisé et ses côtés opposés sont de même longueur deux à deux.
f) $ABCD$ est non croisé et deux côtés opposés sont parallèles et de même longueur.
g) $ABCD$ est un rectangle.
h) $ABDC$ est un carré.

Exercice 2.

a) Non. b) Oui. c) Oui. d) Oui.
e) Oui. f) Oui. g) Oui. h) Oui.

EXERCICE 3. On considère un parallélogramme $EFGH$ tel que ci-dessous.



1. Donnez un vecteur égale à

   a) $\overrightarrow{EF}$. b) $\overrightarrow{GH}$. c) $\overrightarrow{EH}$. d) $\overrightarrow{GF}$.

2. Complétez par le point qui convient.

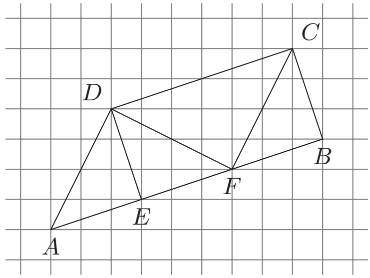
   a) $\overrightarrow{EI} = \overrightarrow{I\ldots}$. b) $\overrightarrow{HI} = \overrightarrow{I\ldots}$. c) $\overrightarrow{FI} = \overrightarrow{I\ldots}$.

Exercice 3.

1. $\overrightarrow{EF} = \overrightarrow{HG}$, $\overrightarrow{GH} = \overrightarrow{FE}$, $\overrightarrow{EH} = \overrightarrow{FG}$, $\overrightarrow{GF} = \overrightarrow{HE}$.
2. $\overrightarrow{EI} = \overrightarrow{IG}$, $\overrightarrow{HI} = \overrightarrow{IF}$ $\overrightarrow{FI} = \overrightarrow{IH}$.

EXERCICE 4. Par lecture graphique indiquez

1. un vecteur égal à $\overrightarrow{AE}$; à $\overrightarrow{CF}$.
2. un vecteur de même direction que $\overrightarrow{CB}$ mais de sens opposé ; idem pour $\overrightarrow{AF}$.
3. un vecteur égal à $\overrightarrow{DC}$ d'extrémité F ; égal à $\overrightarrow{FB}$ d'origine A.
4. deux vecteurs de même de direction, de même sens qui ne sont pas égaux.
5. deux vecteurs de même norme qui ne sont pas égaux.



Exercice 4.

1. $\overrightarrow{AE} = \overrightarrow{FB}$. $\overrightarrow{CF} = \overrightarrow{DA}$.
2. $\overrightarrow{ED}$ et $\overrightarrow{FE}$.
3. $\overrightarrow{DC} = \overrightarrow{AF}$ et $\overrightarrow{FB} = \overrightarrow{AE}$.
4. $\overrightarrow{AE}$ et $\overrightarrow{DC}$.
5. $\overrightarrow{DF}$ et $\overrightarrow{FC}$.

EXERCICE 5. Soient $t_{\vec{u}}$ une translation de vecteur $\vec{u}$, A et B des points, C et D leurs images respectives par la translation $t_{\vec{u}}$. Démontrez que $ABDC$ est un parallélogramme.

EXERCICE 6. Soient $t_{\vec{u}}$ une translation de vecteur $\vec{u}$, M et P des points, N l'image de M par la translation $t_{\vec{u}}$, Q un point tel que $MNQP$ soit un parallélogramme. Démontrez que $\overrightarrow{PQ} = \vec{u}$.

Exercice 6.

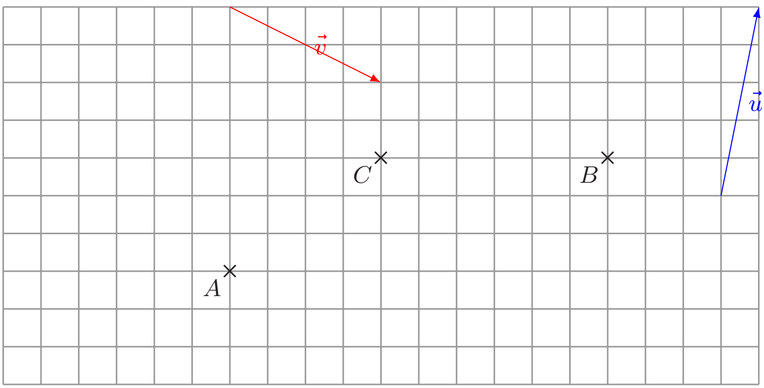
Démontrons : $\overrightarrow{PO} = \vec{u}$.

* $t_{\vec{u}}(M) = N$ donc $\vec{u} = \overrightarrow{MN}$.
* $MNQP$ est un parallélogramme donc : $\overrightarrow{MN} = \overrightarrow{PQ}$.

Nous déduisons des points précédents par transitivité que

$$\boxed{\overrightarrow{PQ} = \vec{u}.}$$

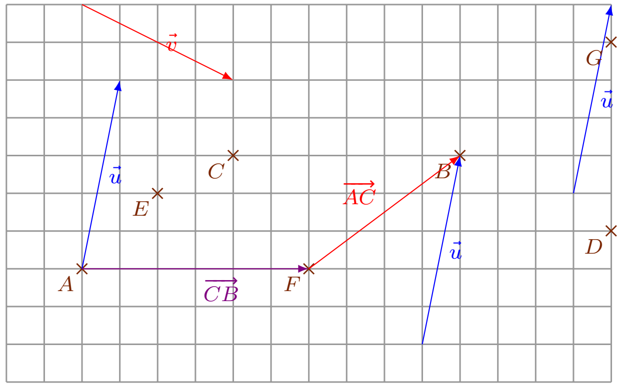
EXERCICE 7.



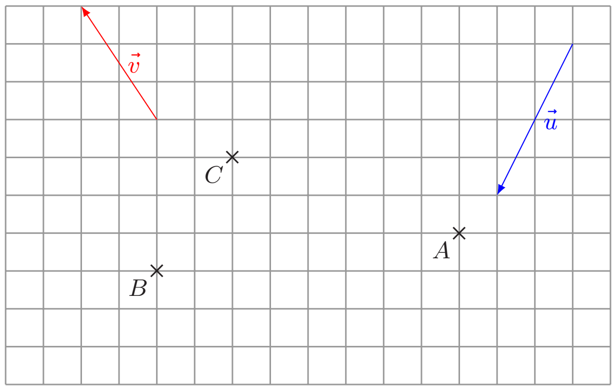
Tracez dans chaque cas.

a) Le point F tel que $ACBF$ soit un parallélogramme.
b) Le point G tel que $ABCG$ soit un parallélogramme.
c) Le représentant de $\vec{u}$ d'origine A.
d) Le représentant de $\vec{u}$ d'extrémité B.
e) L'image D de B par la translation de vecteur $\vec{v}$.
f) Le point E dont C est l'image par la translation de vecteur $\vec{v}$.
g) Le représentant de $\overrightarrow{AC}$ d'extrémité B.
h) Le représentant de $\overrightarrow{CB}$ d'origine A.

Exercice 7.



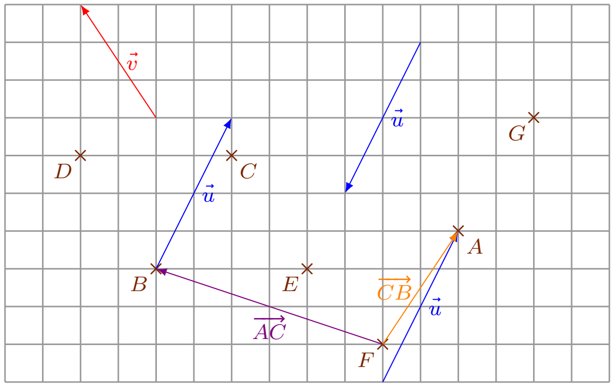
EXERCICE 8.



Tracez dans chaque cas.

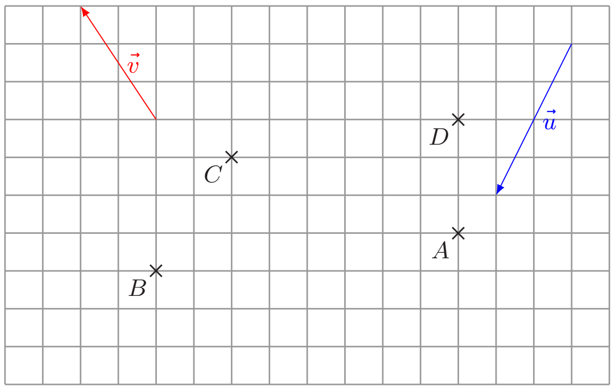
a) Le point F tel que $ACBF$ soit un parallélogramme.
b) Le point G tel que $BACG$ soit un parallélogramme.
c) Le représentant de $\vec{u}$ d'origine A.
d) Le représentant de $\vec{u}$ d'extrémité B.
e) L'image D de B par la translation de vecteur $\vec{v}$.
f) Le point E dont C est l'image par la translation de vecteur $\vec{v}$.
g) Le représentant de $\overrightarrow{AC}$ d'extrémité B.
h) Le représentant de $\overrightarrow{CB}$ d'origine A.

Exercice 8.

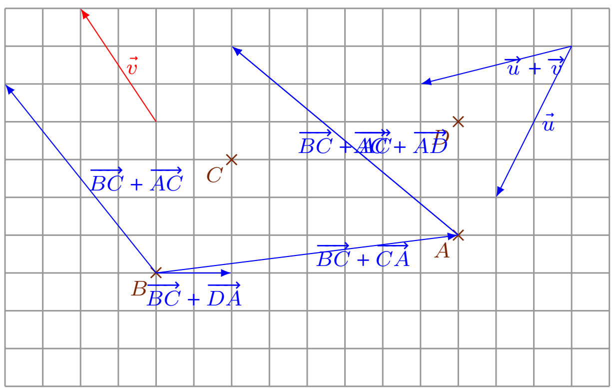


EXERCICE 9.

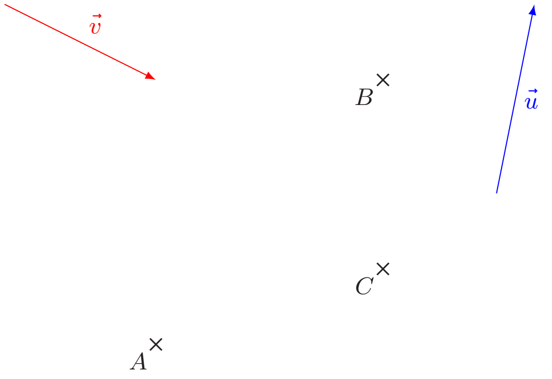
Dessinez les vecteurs $\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{AD}$, $\overrightarrow{BC} + \overrightarrow{AC}$, $\overrightarrow{BC} + \overrightarrow{DA}$, $\vec{u} + \vec{v}$ et $\overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CA}$.



Exercice 9.



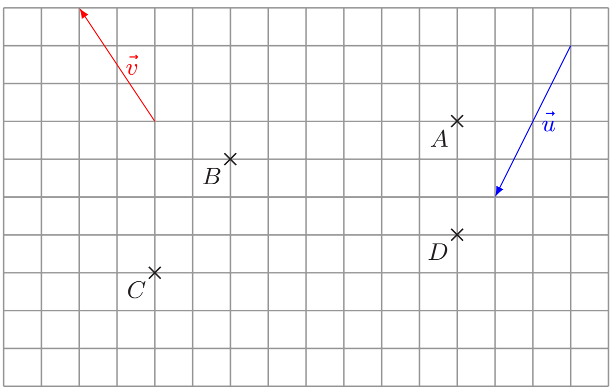
EXERCICE 10.



Tracez dans chaque cas.

a) Le point F tel que $ACBF$ soit un parallélogramme.
b) Le point G tel que $ABCG$ soit un parallélogramme.
c) Le représentant de $\vec{u}$ d'origine A.
d) Le représentant de $\vec{u}$ d'extrémité B.
e) L'image D de B par la translation de vecteur $\vec{v}$.
f) Le point E dont C est l'image par la translation de vecteur $\vec{v}$.
g) Le représentant de $\overrightarrow{AC}$ d'extrémité B.
h) Le représentant de $\overrightarrow{CB}$ d'origine A.

EXERCICE 11. Dessinez les vecteurs $\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{CA}$, $\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{AD}$,$\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{AC}$, $\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{DA}$ et $\vec{u}+\vec{v}$.



EXERCICE 12. On considère un parallélogramme $RSTU$ de centre O. On note F l'image du point S par la translation de vecteur $\overrightarrow{UT}$ et E l'image de F par la translation de vecteur $\overrightarrow{RU}$. Démontrez que $RSET$ est un parallélogramme.

Exercice 12.

- $RSTU$ est un parallélogramme donc $\overrightarrow{RU}=\overrightarrow{ST}$.
- Par construction : $\overrightarrow{RU}=\overrightarrow{FE}$.

Des deux points précédents nous déduisons par transitivité : $\overrightarrow{ST}=\overrightarrow{FE}$. Autrement dit $STEF$ est un parallélogramme.

On en déduit que $\overrightarrow{SF}=\overrightarrow{TE}$.

Or $\overrightarrow{SF} = \overrightarrow{RS}$ donc $\overrightarrow{TE} = \overrightarrow{RS}$.
Autrement dit

$$RSET \text{ est un parallélogramme,}$$

EXERCICE 13. Soient EDF un triangle rectangle en D tel que $ED = 6$ cm et $DF = 4{,}5$ cm, I et J les milieux respectifs de $[ED]$ et $[DF]$, G et H les images respectives de F et I par la translation de vecteur $\overrightarrow{JI}$.

1. Quelle conjecture peut-on émettre pour le point G ?
2. Quelle est la nature de $DJEH$?

EXERCICE 14. Soient ABC un triangle quelconque, I le milieu de $[AB]$, I' l'image de I par la translation de vecteur $\overrightarrow{BC}$, A' l'image de A par la translation de vecteur $\overrightarrow{I'I}$.

Démontrez que $A'BCA$ est un parallélogramme puis en déduire que $\overrightarrow{A'I} = \overrightarrow{IC}$.

EXERCICE 15. En choisissant des points judicieux complétez.

a) $\overrightarrow{AB} + \cdots = \overrightarrow{AE}$
b) $\overrightarrow{G\ldots} + \overrightarrow{B\ldots} = \overrightarrow{GI}$
c) $\overrightarrow{\ldots B} + \overrightarrow{B\ldots} = \overrightarrow{CG}$
d) $\overrightarrow{BE} + \cdots = \overrightarrow{BD}$
e) $\overrightarrow{BE} + \overrightarrow{\ldots F} = \overrightarrow{B\ldots}$
f) $\overrightarrow{B\ldots} + \overrightarrow{\ldots A} = \overrightarrow{BA}$
g) $\overrightarrow{BE} - \overrightarrow{G\ldots} = \overrightarrow{B\ldots}$
h) $\overrightarrow{\ldots E} + \overrightarrow{E\ldots} = \overrightarrow{BC}$
i) $\overrightarrow{A\ldots} + \overrightarrow{B\ldots} = \overrightarrow{AC}$
j) $\overrightarrow{O\ldots} + \overrightarrow{M\ldots} = \overrightarrow{\ldots P}$
k) $\overrightarrow{A\ldots} + \overrightarrow{D\ldots} + \overrightarrow{M\ldots} = \overrightarrow{AG}$

EXERCICE 16. Simplifiez les expressions suivantes (grâce notamment à la relation de Chasles).

a) $\overrightarrow{GE} + \overrightarrow{CG}$.
b) $\overrightarrow{GE} - \overrightarrow{IE} + \overrightarrow{CG}$.
c) $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{GE} - \overrightarrow{CB} + \overrightarrow{EI} + \overrightarrow{CG}$.
d) $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CA}$.
e) $\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{BC} - \overrightarrow{BA}$.
f) $\overrightarrow{MA} - \overrightarrow{MB} - \overrightarrow{AB}$.

EXERCICE 17. Démontrez.

a) $\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{CD} - \overrightarrow{AC} = \overrightarrow{DB}$.
b) $\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{DB} + \overrightarrow{DE} = \overrightarrow{AE}$.
c) $\overrightarrow{BE} + \overrightarrow{CB} - \overrightarrow{DE} = \overrightarrow{CD}$.
d) $\overrightarrow{BD} - \overrightarrow{CA} + \overrightarrow{CB} - \overrightarrow{AD} = \vec{0}$.
e) $\overrightarrow{CB} - \overrightarrow{CA} + \overrightarrow{BD} = \overrightarrow{AD}$
f) $\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{BD} + \overrightarrow{CE} + \overrightarrow{DA} + \overrightarrow{EB} = \vec{0}$

II Base orthonormée.

Multiplication d'un vecteur par un scalaire.

Il paraît naturel de noter : $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AB} = 2\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{BA} + \overrightarrow{BA} = -\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AB} = -2\overrightarrow{AB}$. En généralisant nous définirons n'importe quel vecteur $\lambda\overrightarrow{AB}$, λ désignant un réel.

Définition 1. Soient $\overrightarrow{AB}$ le représentant d'un vecteur et λ un nombre quelconque. Nous définissons le vecteur $\lambda\overrightarrow{AB}$ par

— $\lambda\overrightarrow{AB}$ a même direction que $\overrightarrow{AB}$
— la norme : $\left\|\lambda\overrightarrow{AB}\right\| = |\lambda| \times \left\|\overrightarrow{AB}\right\|$
— si $\lambda > 0$ alors $\lambda\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AB}$ ont même sens et si $\lambda < 0$ alors ils sont de sens contraire.

Remarques.

1. Plutôt que d'apprendre cette définition sachez l'utiliser. Les vecteurs ont même direction, la longueur est multipliée par autant que l'indique λ et le sens dépend du signe de λ.

2. Nous retrouverons les règles habituelles de distributivité, de commutativité, d'associativité.
   Si λ et μ sont des nombres et $\vec{u}$ et $\vec{w}$ des vecteurs, alors
$$\lambda(\vec{u}+\vec{w}) = \lambda\vec{u}+\lambda\vec{w}, \quad (\lambda+\mu)\vec{u} = \lambda\vec{u}+\mu\vec{u}, \quad \lambda(\mu\vec{u}) = (\lambda\mu)\vec{u}$$
3. L'addition et la multiplication par un nombre sont les deux opérations qui définissent de façon très général un espace vectoriel.

Base de vecteurs.

Définition 2. Soient $\vec{u}$ et $\vec{v}$ deux vecteurs du plan, a et b deux réels. Nous dirons que le vecteur $\vec{w} = a\vec{u}+b\vec{v}$ est une *combinaison linéaire de $\vec{u}$ et $\vec{v}$.*

Remarques.

1. C'est pourquoi la branche des mathématiques traitant des vecteurs est appelée l'*algèbre linéaire* : *algèbre* à cause des calculs et *linéaire* à cause des *combinaisons linéaires* (et de l'origine historique).

Définition 3. Soient $\vec{i}$ et $\vec{j}$ deux vecteurs du plan, O un point du plan, I l'image de O par la translation de vecteur $\vec{i}$, J l'image de O par la translation de vecteur $\vec{j}$.

Nous dirons que $\left(\vec{i},\vec{j}\right)$ est *une base du plan* si et seulement si $(O;I,J)$ est un repère du plan.

Remarques.

1. Pour que $(O;I,J)$ soit un repère il faut que les points O, I et J soient distincts et non alignés.
2. Autrement dit $\vec{i}$ et $\vec{j}$ n'ont pas la même direction et ne sont pas nuls.
3. Si de plus $(O;I,J)$ est un repère orthonormé alors nous dirons que $\left(\vec{i},\vec{j}\right)$ est *une base orthonormée*.
4. Nous pourrons dorénavant parler du repère $\left(O;\vec{i},\vec{j}\right)$. Un repère est complètement défini pr la donnée d'un point et d'une base.

Vecteurs et coordonnées.

En utilisant les bases et les combinaisons linéaires nous pouvons définir les coordonnées d'un vecteur. Par exemple le vecteur $\vec{u} = 3\vec{i}-\vec{j}$ aura pour coordonnées $\begin{pmatrix}3\\-1\end{pmatrix}$.

Définition 4.

Soient $\left(\vec{i},\vec{j}\right)$ une base du plan et $\vec{u}$ un vecteur du plan. Il existe un unique couple de réels (x,y) de nombres réels x et y tel que
$$\vec{u} = x\vec{i}+y\vec{j}.$$
Le couple $\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}$ est appelé le couple des *coordonnées* de $\vec{u}$.

Remarques.

1. De même que les coordonnées d'un point dépendent du repère choisi, les coordonnées d'un vecteur dépendent de la base choisie.
2. Pour une base fixée les coordonnées du vecteur sont uniques.
   Cette affirmation constitue un théorème qu'il faudrait démontrer ce que nous nous garderons de faire.
3. Les vecteurs de la base sont les vecteurs, en nombre minimum, qui permettent de décrire n'importe qu'elle translation.

4. Concrètement pour obtenir les coordonnées d'un vecteur dans un repère il suffit de compter les carreaux en suivant l'axe des abscisses puis recommence suivant l'axe des ordonnées, en partant de l'origine pour rejoindre l'extrémité.
5. Les coordonnées de vecteurs sont plutôt notées en colonne qu'en ligne

$$\vec{u}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}.$$

   x est appelé l'abscisse et y l'ordonnée.
6. Si M est l'extrémité du représentant de $\vec{u}$ d'origine O alors M et $\vec{u}$ ont les mêmes coordonnées.

Proposition 3. Deux vecteurs sont égaux si et seulement si ils ont les mêmes coordonnées (dans la même base).

Démonstration Ce résultat découle directement de l'unicité des coordonnées admises dans la précédente définition.

Définition 5. Soient $(\vec{i},\vec{j})$ une base du plan, $\vec{u}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ un vecteur. Nous appellerons *norme de* $\vec{u}$, et nous noterons $||\vec{u}||$, le nombre

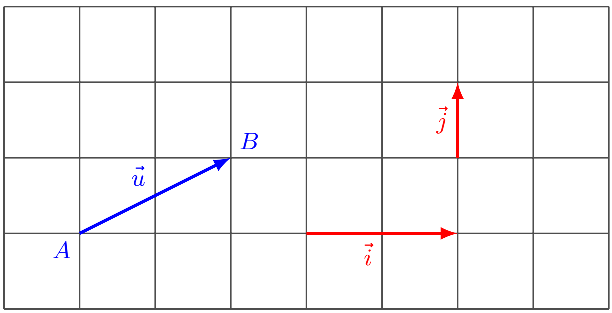
$$||\vec{u}|| = \sqrt{x^2 + y^2}.$$

Exemples.

1. Si $\vec{u}\begin{pmatrix} -3 \\ 7 \end{pmatrix}$ alors

$$\begin{aligned} ||\vec{u}|| &= \sqrt{x^2 + y^2} \\ &= \sqrt{(-3)^2 + 7^2} \\ &= \sqrt{58} \end{aligned}$$

2. On considère le quadrillage ci-dessous formé de carrés d'un centimètre de côte.



   $AB = \sqrt{5}$ et

$$\begin{aligned} ||\vec{u}|| &= \sqrt{x^2 + y^2} \\ &= \sqrt{1^2 + 1^2} \\ &= \sqrt{2} \end{aligned}$$

   Longueur et norme ne coïncident pas toujours.

Remarques.

1. La norme d'un vecteur est un nombre positif.
2. Nous avions déjà donné une définition de la norme d'un vecteur dans le cas d'un vecteur au sens géométrique (représentant du vecteur). Cette définition se veut un peu plus général puisqu'elle fonctionne pour d'autres sortent de vecteurs. Cependant cette définition de la norme dépend de la base choisie.
3. La norme d'un vecteur peut se confondre avec la longueur si le repère est orthonormé.

Proposition 4. Soient (O,I,J) un repère du plan, $A(x_A;y_A)$ et $B(x_B;y_B)$ des points dans ce repère, $\left(\vec{i},\vec{j}\right)$ la base associée au repère $(O;I,I)$ ($i.e$ $\vec{i}=\overrightarrow{OI}$ et $\vec{j}=\overrightarrow{OJ}$.

On a $\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix} x_B - x_A \\ y_B - y_A \end{pmatrix}$.

Démonstration

Déterminons les coordonnées de $\overrightarrow{AB}$.

$$\begin{aligned}\overrightarrow{AB} &= \overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OA} \\ &= x_B\vec{i} + y_B\vec{j} - \left(x_A\vec{i} + x_A\vec{i}\right) \\ &= (x_B - x_A)\,\vec{i} + (y_B - y_A)\,\vec{j}\end{aligned}$$

Donc

$$\boxed{\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix} x_B - x_A \\ y_B - y_A \end{pmatrix}.}$$

Proposition 5. Si $\vec{u}\begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix}$ et $\vec{v}\begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \end{pmatrix}$, alors $\vec{u}+\vec{v}\begin{pmatrix} x_1 + x_2 \\ y_1 + y_2 \end{pmatrix}$.

Proposition 6. Si $\vec{u}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ et $\lambda \in \mathbb{R}$, alors $\lambda\vec{u}\begin{pmatrix} \lambda x \\ \lambda y \end{pmatrix}$.

Exercices.

EXERCICE 18. Dessinez deux points A et B distincts puis placez les points M, N et P tels que $\overrightarrow{AM} = \frac{5}{2}\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{NA} = 3\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{BP} = -\frac{1}{4}\overrightarrow{AB}$.

EXERCICE 19. Soient A et B deux points distincts, I le milieu du segment $[AB]$.

Dans chaque cas déterminez le réel λ tel que : $\overrightarrow{AI} = \lambda\overrightarrow{AB}$ puis $\overrightarrow{BI} = \lambda\overrightarrow{AB}$.

EXERCICE 20. Soient A et B deux points du plan distants de 6 unités de longueur (choisissez deux unités de longueur par centimètre).

1. (a) Construisez le point L tel que $\overrightarrow{BL} = \frac{5}{2}\overrightarrow{AB}$.
   (b) Construisez le point K tel que $\overrightarrow{AK} = -\frac{4}{3}\overrightarrow{AB}$.
2. (a) En remarquant que le vecteur $\overrightarrow{LK}$ peut s'écrire $\overrightarrow{LB} + \overrightarrow{BA} + \overrightarrow{AK}$, établissez une relation entre les vecteurs $\overrightarrow{LK}$ et $\overrightarrow{AB}$.
   (b) Déduisez-en la longueur LK en unités de longueur.

Exercice 20.

1. (a)
   (b)

2. (a) D'après la relation de Chasles :

$$\begin{aligned}\overrightarrow{LK} &= \overrightarrow{LB} + \overrightarrow{BA} + \overrightarrow{AK}\\ &= -\overrightarrow{BL} - \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AK}\\ &= -\frac{5}{2}\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AB} + \left(-\frac{4}{3}\overrightarrow{AB}\right)\\ &= \left(-\frac{5}{2} - 1 - \frac{4}{3}\right)\overrightarrow{AB}\\ &= \left(-\frac{5\times 3}{2\times 3} - \frac{6}{6} - \frac{4\times 2}{3\times 2}\right)\overrightarrow{AB}\\ &= \frac{-15-6-8}{6}\overrightarrow{AB}\end{aligned}$$

$$\boxed{\overrightarrow{LK} = -\tfrac{29}{6}\overrightarrow{AB}.}$$

(b) Puisque $\overrightarrow{LK} = -\frac{29}{6}\overrightarrow{AB}$, nous en déduisons :

$$\begin{aligned}\left\|\overrightarrow{LK}\right\| &= \left|-\frac{29}{6}\right| \times \left\|\overrightarrow{AB}\right\|\\ &= \frac{29}{6} \times AB\\ &= \frac{29}{6} \times 6\end{aligned}$$

$$\boxed{LK = 29.}$$

EXERCICE 21. Soient A, B et C trois points du plan tels que :

$$3\overrightarrow{AB} - 2\overrightarrow{AC} = \vec{0}.$$

1. Réalisez une figure.
2. En remarquant que le vecteur $\overrightarrow{AC}$ peut s'écrire $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC}$, exprimez le vecteur $\overrightarrow{AB}$ en fonction du vecteur $\overrightarrow{BC}$ en justifiant la réponse.

Exercice 21.

1.
2. Par construction

$$3\overrightarrow{AB} - 2\overrightarrow{AC} = \vec{0}$$

ce qui équivaut, d'après la relation de Chasles, à

$$\begin{aligned}3\overrightarrow{AB} - 2\left(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC}\right) &= \vec{0}\\ 3\overrightarrow{AB} - 2\overrightarrow{AB} - 2\overrightarrow{BC} &= \vec{0}\\ \overrightarrow{AB} - 2\overrightarrow{BC} &= \vec{0}\end{aligned}$$

Finalement

$$\boxed{\overrightarrow{AB} = 2\overrightarrow{BC}.}$$

EXERCICE 22. C Soit $MNPQ$ un parallélogramme. On définit le point R tel que $\overrightarrow{QR} = \frac{3}{4}\overrightarrow{MN}$ et le point S tel que $\overrightarrow{MS} = -\frac{4}{3}\overrightarrow{MQ}$.

1. Réalisez une figure.
2. (a) En remarquant que le vecteur $\overrightarrow{MR}$ peut s'écrire $\overrightarrow{MQ} + \overrightarrow{QR}$, montrez que $\overrightarrow{MR} = \overrightarrow{MQ} + \frac{3}{4}\overrightarrow{MN}$.

   (b) En remarquant que le vecteur $\overrightarrow{NS}$ peut s'écrire $\overrightarrow{NM} + \overrightarrow{MS}$, montrez que $\overrightarrow{NS} = -\overrightarrow{MN} - \frac{4}{3}\overrightarrow{MQ}$.

   (c) Déduisez-en une relation entre les vecteurs $\overrightarrow{MR}$ et $\overrightarrow{NS}$.

Exercice 22.

1.
2. (a) D'après la relation de Chasles

$$\overrightarrow{MR} = \overrightarrow{MQ} + \overrightarrow{QR}$$

   Or, d'après l'énoncé, $\overrightarrow{QR} = \frac{3}{4}\overrightarrow{MN}$, donc en substituant :

$$\overrightarrow{MR} = \overrightarrow{MQ} + \frac{3}{4}\overrightarrow{MN}$$

   (b)

$$\begin{aligned}\overrightarrow{NS} &= -\overrightarrow{NM} + \overrightarrow{MS}\\ &= -\overrightarrow{MN} - \frac{4}{3}\overrightarrow{MQ}\end{aligned}$$

   (c) $-\frac{4}{3}\overrightarrow{MR} = \overrightarrow{NS}$.

EXERCICE 23. Soient $ABCD$ un parallélogramme et S et V des points tels que $\overrightarrow{AV} = 2\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{CS} = 2\overrightarrow{CD}$.

Montrez que les segments $[VS]$ et $[AC]$ ont le même milieu.

Exercice 23.

En faisant à main levé une figure nous voyons que $AVCS$ est un parallélogramme et par conséquent ses diagonales se coupent bien en leur milieu. Démontrons-le proprement.

Montrons que $AVCS$ est un parallélogramme.

Pour cela nous allons démontrer que $\overrightarrow{AV} = \overrightarrow{SC}$.

$$\overrightarrow{AV} = 2\overrightarrow{AB}$$

Or $ABCD$ est un parallélogramme donc $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC}$ et en remplaçant :

$$\overrightarrow{AV} = 2\overrightarrow{DC}$$

Comme, par construction, $2\overrightarrow{CD} = \overrightarrow{CS}$, en considérant les vecteurs opposés, nous en déduisons :

$$\overrightarrow{AV} = \overrightarrow{SC}$$

Nous avons bien démontré que $\overrightarrow{AV} = \overrightarrow{SC}$ et donc que $AVCS$ est un parallélogramme. Nous en déduisons que ses diagonales

$[VS]$ et $[AC]$ se coupent en leur milieu.

EXERCICE 24. Soient ABC un triangle rectangle en A et I est le milieu de l'hypoténuse. On appelle A' le symétrique de A par rapport à I, B' et C' les images de B et C dans la translation de vecteur $\overrightarrow{AI}$.

Démontrez que A' est le milieu de $[B'C']$.

Exercice 24.

D'après la relation de Chasles :

$$\overrightarrow{B'I'} = \overrightarrow{B'B} + \overrightarrow{BI} + \overrightarrow{II'}$$

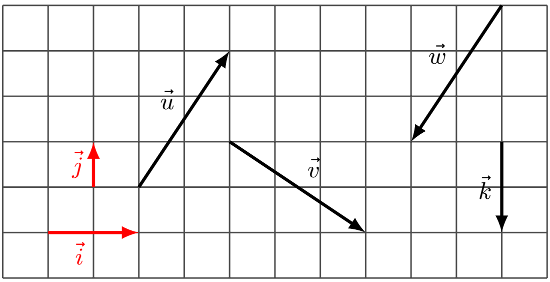
Or par construction I est milieu de $[AI']$ donc $\overrightarrow{AI} = \overrightarrow{II'}$, et $\overrightarrow{B'B} = \overrightarrow{IA}$ donc

$$\begin{aligned}\overrightarrow{B'I'} &= \overrightarrow{BI}\\ &= \frac{1}{2}\overrightarrow{BC}\end{aligned}$$

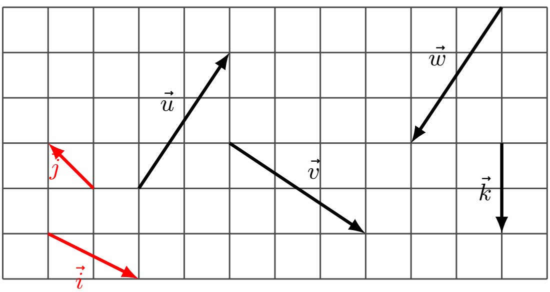
De $\overrightarrow{BB'} = \overrightarrow{AI} = \overrightarrow{CC'}$ nous déduisons que $BB'C'C$ est un parallélogramme, donc : $\overrightarrow{BC} = \overrightarrow{B'C'}$.
Finalement : $\overrightarrow{B'I'} = \frac{1}{2}\overrightarrow{B'C'}$.

I' est le milieu de $[B'C']$.

EXERCICE 25. Exprimez les vecteurs $\vec{u}$, $\vec{v}$, $\vec{w}$ et $\vec{k}$ comme combinaisons linéaires des vecteurs $\vec{i}$ et $\vec{j}$.



EXERCICE 26. Exprimez les vecteurs $\vec{u}$, $\vec{v}$, $\vec{w}$ et $\vec{k}$ comme combinaisons linéaires des vecteurs $\vec{i}$ et $\vec{j}$.



EXERCICE 27. Donnez les coordonnées du vecteur dans la base $(\vec{a},\vec{b})$.

1. $\vec{u} = \vec{b} - 7\vec{a}$.
2. $\vec{v} = 3\vec{a} + 2\vec{b} - 7\vec{a} + 4\vec{a}$.
3. $\vec{w} = 2\overrightarrow{AB} - 3\overrightarrow{CD}$ où $\overrightarrow{AB} = \vec{a} + \vec{b}$ et $\overrightarrow{CD} = -2\vec{b} + 5\vec{a}$

EXERCICE 28. Exercices 49 à 51 page 188 du manuel Lelivrescolaire.

Exercice 28.

Exercice 49 page 188 du manuel Lelivrescolaire.

(a) $\overrightarrow{DE}\begin{pmatrix}-1\\-2\end{pmatrix}$, $\overrightarrow{AC}\begin{pmatrix}-4\\1\end{pmatrix}$, $\overrightarrow{OB}\begin{pmatrix}3\\2\end{pmatrix}$, $\overrightarrow{LK}\begin{pmatrix}2\\1\end{pmatrix}$, $\overrightarrow{FG}\begin{pmatrix}2\\-3\end{pmatrix}$, $\vec{b}\begin{pmatrix}-4\\-1\end{pmatrix}$, $\vec{d}\begin{pmatrix}0\\-2\end{pmatrix}$.

(b) $\overrightarrow{OB} = 3\vec{i} + 2\vec{j}$, $\overrightarrow{AC} = 1\vec{i} - 4\vec{j}$, $\overrightarrow{LK} = 1\vec{i} + 2\vec{j}$, $\overrightarrow{FG} = 2\vec{i} - 3\vec{j}$, $\vec{b} = -4\vec{i} - \vec{j}$, $\vec{d} = -2\vec{j}$.

Exercice 50 page 188 du manuel Lelivrescolaire.

$A(-1;1)$, $B(1;1{,}5)$, $C(4;1{,}5)$, $D(1;-1)$, $E(1;-2)$, $F(7;-2{,}5)$.

$\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix}2\\0{,}5\end{pmatrix}$, $\overrightarrow{BC}\begin{pmatrix}3\\0\end{pmatrix}$, $\overrightarrow{CD}\begin{pmatrix}-2{,}5\\-3\end{pmatrix}$, $\overrightarrow{DE}\begin{pmatrix}0\\-1\end{pmatrix}$, $\overrightarrow{EF}\begin{pmatrix}6\\-0{,}5\end{pmatrix}$.

Les coordonnées sont les opposées des précédents.

Exercice 51 page 188 du manuel Lelivrescolaire.

$A(-2;3)$, $B(-3;2)$, $C(-4;0)$, $D(0;1)$, $E(-1;-2)$, $F(-3;0)$.

$\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix}-1\\-1\end{pmatrix}$, $\overrightarrow{BC}\begin{pmatrix}-1\\-2\end{pmatrix}$, $\overrightarrow{CD}\begin{pmatrix}4\\1\end{pmatrix}$, $\overrightarrow{DE}\begin{pmatrix}-1\\-3\end{pmatrix}$, $\overrightarrow{EF}\begin{pmatrix}-2\\0\end{pmatrix}$.

EXERCICE 29. Déterminez $x,y \in \mathbb{R}$ de sorte que $\vec{u} = \vec{v}$.

a) $\vec{u}\begin{pmatrix}x+2\\3\end{pmatrix}$ et $\vec{v}\begin{pmatrix}-4\\2y+3\end{pmatrix}$.

b) $\vec{u}\begin{pmatrix}-2x+5\\3y-5\end{pmatrix}$ et $\vec{v}\begin{pmatrix}12\\-12y+4\end{pmatrix}$.

c) $\vec{u}\begin{pmatrix}3x^2+x+7\\\frac{2}{y}\end{pmatrix}$ et $\vec{v}\begin{pmatrix}x-10\\\frac{4}{y+1}\end{pmatrix}$.

d) $\vec{u}\begin{pmatrix}x^2\\y+x\end{pmatrix}$ et $\vec{v}\begin{pmatrix}144\\3y-4\end{pmatrix}$.

Exercice 29.

a) $(x,y) = (6,0)$. b) $(x,y) = \left(-\frac{7}{2},\frac{3}{5}\right)$. c) $\varnothing$. d) $(x,y) = (12,16)$.

EXERCICE 30. Exercice 53 page 188 du manuel Lelivrescolaire.

Exercice 30.

1. $x = 3$ et $y = -4$.
2. $x = 3$ et $y = 8$.
3. $x = -6$.

EXERCICE 31. Calculez la norme des vecteurs $\vec{u}\begin{pmatrix}1\\3\end{pmatrix}$, $\vec{v}\begin{pmatrix}-3\\2\end{pmatrix}$ et $\vec{w}\begin{pmatrix}0\\-4\end{pmatrix}$.

EXERCICE 32. Soient $A(-2;1)$, $B(2;4)$, $C(3;0)$ et $D(-1;-3)$ des points du plan muni d'un repère.

Démontrez que $ABCD$ est un parallélogramme.

Exercice 32.

$ABCD$ est un parallélogramme si et seulement si $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC}$.

Démontrons que $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC}$.

$$\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix}x_B - x_A\\y_B - y_A\end{pmatrix}$$

$$\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix}2-(-2)\\4-1\end{pmatrix}$$

$$\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix}4\\3\end{pmatrix}$$

De même

$$\overrightarrow{DC}\begin{pmatrix}3-(-1)\\0-(-3)\end{pmatrix}$$

$$\overrightarrow{DC}\begin{pmatrix}4\\3\end{pmatrix}$$

Donc, les vecteurs ayant même coordonnées : $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC}$.
Et par conséquent

$\boxed{ABCD \text{ est un parallélogramme.}}$

EXERCICE 33. Soient $A(-3;3)$, $B(2;5)$, $C(4;0)$ et $D(-1;-2)$ dans un repère orthonormé $\left(O;\vec{\imath},\vec{\jmath}\right)$.

1. Démontrez que $ABCD$ est un parallélogramme.
2. Calculez AC et BD.
3. Qu'en déduisez-vous sur $ABCD$?

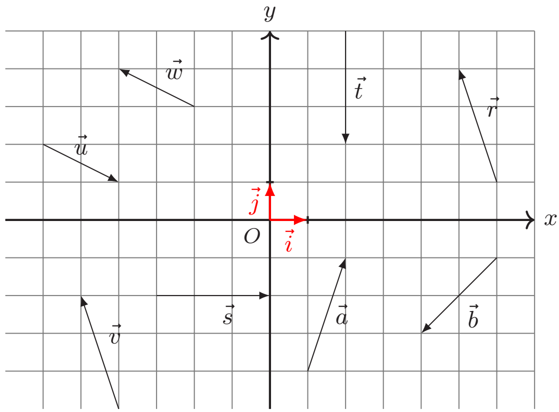
Exercice 33.

1. Il suffit de procéder comme dans l'exercice précédent
2. Le repère étant orthonormé il suffit d'utiliser la formule
   $AC = \sqrt{(x_D - x_A)^2 + (y_D - y_A)^2}$.
3. D'après les questions précédentes $ABCD$ est un parallélogramme dont les diagonales ont même longueur. Autrement dit :

   $\boxed{ABCD \text{ est un rectangle.}}$

EXERCICE 34.

Lisez les coordonnées des vecteurs représentés ci-contre et indiquez ceux qui sont égaux.



EXERCICE 35. Soient $A(7;-3)$, $B(3;2)$ et $C(-5;-4)$ des points du plan muni d'un repère.

Déterminez les coordonnées du point $D(x_D;y_D)$ qui vérifie $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CD}$.

Exercice 35.

Déterminons x_D et y_D.

$\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CD}$ si et seulement si ils ont les mêmes coordonnées donc si et seulement si

$$\begin{cases} 3-7 = x-(-5) \\ 2-(-3) = y-(-4) \end{cases}$$

donc, si et seulement si

$$\begin{cases} x = -9 \\ y = 1 \end{cases}$$

$D(-9{,}1)$.

Une rédaction alternative.

Déterminons x_D et y_D.

$\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CD}$ si et seulement si $ABDC$ est un parallélogramme.
De plus $ABDC$ est un parallélogramme si et seulement si ses diagonales se coupent en leur milieu.
Autrement dit dire que $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CD}$ équivaut successivement à

$$\begin{array}{rcl} \frac{x_A + x_D}{2} = \frac{x_B + x_C}{2} & \text{et} & \frac{y_A + y_D}{2} = \frac{y_B + y_C}{2} \\ \frac{7 + x_D}{2} = \frac{3 + (-5)}{2} & \text{et} & \frac{-3 + y_D}{2} = \frac{2 + (-4)}{2} \\ x_D = -9 & \text{et} & y_D = 1 \end{array}$$

Nous avons démontré qu'il y a un seul point D qui satisfassent à la condition $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CD}$ et ses coordonnées sont $(-9; 1)$.

EXERCICE 36. Soient $A(2; -3)$ et $B(-1; 4)$ deux points dans un repère orthonormé $(O; \vec{i}, \vec{j})$.
Calculez $||\overrightarrow{AB}||$.

Exercice 36.
$\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix} -3 \\ 7 \end{pmatrix}$ donc $||\overrightarrow{AB}|| = \sqrt{(-3)^2 + 7^2} = \sqrt{58}$.

EXERCICE 37. Exercices 54 page 188, 56 page 189 du manuel Lelivrescolaire.

Exercice 37.

Exercice 54 page 188 du manuel Lelivrescolaire.

(a) $G(-1; 2)$, $H(5; -2)$, $M(7; 4)$, $N(0{,}1)$, $P(3{,}0)$.
(b)

Exercice 56 page 189 du manuel Lelivrescolaire.

(a) Oui.
(b) Non.
(c) Non.
(d) Oui.

EXERCICE 38. Exercices 57 et 58 page 189 du manuel Lelivrescolaire.

Exercice 38.

Exercice 57 page 189 du manuel Lelivrescolaire.

(a) $ABCD$ est un parallélogramme car $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC}$.
(b) C est le milieu de $[BE]$ car $\overrightarrow{BC} = \overrightarrow{CE}$.
(c) C est l'image de E par la translation de vecteur $\overrightarrow{DA}$ car $\overrightarrow{EC} = \overrightarrow{DA}$.

Exercice 58 page 189 du manuel Lelivrescolaire.

(a) M' symétrique de M par la symétrie de centre P ssi P est milieu de $[MM']$, donc ssi $\overrightarrow{MP} = \overrightarrow{PM'}$.
Donc $M'(15; -9)$.

(b) On en déduit $\overrightarrow{AP} = \overrightarrow{PC}$ donc P milieu de $[AC]$.
(c) D'après les questions précédentes les diagonales du quadrilatère se coupent en leur milieu P.

EXERCICE 39. Dans un repère on considère les points : $A(-2;1)$, $B(3;4)$ et $C(-5;2)$.

Calculez les coordonnées du point M tel que $\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC} = \vec{0}$.

Exercice 39.

$$\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC} = \vec{0} \Leftrightarrow \begin{cases} -2 - x + 3 - x + (-5) - x = 0 \\ 1 - y + 4 - y + 2 - y = 0 \end{cases}$$

$$\boxed{M\left(-\frac{4}{3}, \frac{7}{3}\right).}$$

EXERCICE 40. Soit les vecteurs $\vec{u}\begin{pmatrix}0\\5\end{pmatrix}$ et $\vec{v}\begin{pmatrix}4\\-2\end{pmatrix}$.

1. Calculez $||\vec{u}||$ et $||\vec{v}||$.
2. Calculez les coordonnées $\vec{u} + \vec{v}$.
3. Montrez que $||\vec{u} + \vec{v}|| = 5$.

Exercice 40.

1. $||\vec{u}|| = 5$ et $||\vec{v}|| = \sqrt{19}$.
2. $\vec{u} + \vec{v}\begin{pmatrix}4\\3\end{pmatrix}$.
3. $||\vec{u} + \vec{v}|| = 5$.

EXERCICE 41.

1. Soient $\vec{u}\begin{pmatrix}2\\-5\end{pmatrix}$ et $\vec{v}\begin{pmatrix}3\\7\end{pmatrix}$.

   (a) Le vecteur $\vec{u} + \vec{v}$ a pour coordonnées :

   a) $\begin{pmatrix}5\\12\end{pmatrix}$. b) $\begin{pmatrix}5\\2\end{pmatrix}$. c) $\begin{pmatrix}1\\12\end{pmatrix}$. d) $\begin{pmatrix}9\\-2\end{pmatrix}$.

   (b) Le vecteur $-2\vec{u}$ a pour coordonnées :

   a) $\begin{pmatrix}-4\\-5\end{pmatrix}$. b) $\begin{pmatrix}2\\10\end{pmatrix}$. c) $\begin{pmatrix}-4\\-10\end{pmatrix}$. d) $\begin{pmatrix}-4\\10\end{pmatrix}$.

2. Calculez les coordonnées de $\vec{u} + \vec{v}$ si

   a) $\vec{u}\begin{pmatrix}2\\3\end{pmatrix}$ et $\vec{v}\begin{pmatrix}1\\3\end{pmatrix}$. b) $\vec{u}\begin{pmatrix}1\\4\end{pmatrix}$ et $\vec{v}\begin{pmatrix}-2\\6\end{pmatrix}$.

Exercice 41.

1. (a) $\vec{u} + \vec{v}\begin{pmatrix}5\\2\end{pmatrix}$.
   (b) $-2\vec{u}\begin{pmatrix}-4\\10\end{pmatrix}$.
2. (a) $\vec{u} + \vec{v}\begin{pmatrix}3\\6\end{pmatrix}$.
   (b) $\vec{u} + \vec{v}\begin{pmatrix}-1\\10\end{pmatrix}$.

EXERCICE 42. Soient les points $A(-2;1)$, $B(4;2)$ et $C(2;4)$.

1. (a) Montrez que les coordonnées du vecteur $\overrightarrow{AB}$ sont $(6;1)$.
   (b) Calculez les coordonnées du vecteurs $\overrightarrow{AC}$.
   (c) Calculez les coordonnées du vecteur $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}$.
2. (a) Placez les points dans un repère orthonormé est dessinez le représentant d'origine A du vecteur $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}$.
   (b) Vérifiez le résultat de la question 1.(c).

Exercice 42.

1. (a) $\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix} x_B - x_A \\ y_B - y_A \end{pmatrix}$, $\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix} 4-(-2) \\ 2-1 \end{pmatrix}$,
   $\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix} 6 \\ 1 \end{pmatrix}$.
   (b) De même $\overrightarrow{AC}\begin{pmatrix} 4 \\ 3 \end{pmatrix}$.
   (c) $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}\begin{pmatrix} 10 \\ 4 \end{pmatrix}$.
2.

EXERCICE 43. Déterminez les coordonnées de $-7\vec{u}$ sachant que $\vec{u}\begin{pmatrix} -3 \\ \sqrt{2} \end{pmatrix}$.

Exercice 43.

$-7\vec{u}\begin{pmatrix} 21 \\ -7\sqrt{2} \end{pmatrix}$.

EXERCICE 44. Les questions sont indépendantes les unes des autres (sauf les deux dernières).

1. Soient $\vec{u}(2,-1)$ et $\vec{v}(1;2)$.
   (a) Calculez les coordonnées de $3\vec{u}$ et $2\vec{v}$.
   (b) Calculez les coordonnées de $3\vec{u}+2\vec{v}$.
2. Soient $\vec{u}(5;1)$ et $\vec{v}(2;-3)$. calculez les coordonnées de $\vec{u}+\vec{v}$, $2\vec{u}$, $-3\vec{v}$ et $2\vec{u}-3\vec{v}$.
3. Soient $\vec{u}(0;-1)$, $\vec{v}(3;4)$ et $\vec{w}(8;-6)$. Calculez la norme de chacun des vecteurs $\vec{u}$, $\vec{v}$ et $\vec{w}$.
4. Soient $\vec{u}(0;5)$ et $\vec{v}(4;-2)$.
   (a) Calculez la norme de chacun des vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$.
   (b) Calculez les coordonnées du vecteur $\vec{u}+\vec{v}$.
   (c) Montrez que $\|\vec{u}+\vec{v}\| = 5$.
5. Dites en justifiant si la proposition suivante est vraie : « Pour tous vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$, $\|\vec{u}+\vec{v}\| = \|\vec{u}\| + \|\vec{v}\|$ ».

Exercice 44.

1. 34 page 136.
   (a) $3\vec{u}\begin{pmatrix} 6 \\ -3 \end{pmatrix}$ et $2\vec{v}\begin{pmatrix} 2 \\ 4 \end{pmatrix}$.
   (b) $3\vec{u}+2\vec{v}\begin{pmatrix} 6+2 \\ -3+4 \end{pmatrix}$ donc $3\vec{u}+2\vec{v}\begin{pmatrix} 8 \\ 1 \end{pmatrix}$.
2. 92 page 140.
   $\vec{u}+\vec{v}\begin{pmatrix} 7 \\ -2 \end{pmatrix}$, $2\vec{u}\begin{pmatrix} 10 \\ 2 \end{pmatrix}$, $-3\vec{v}\begin{pmatrix} -6 \\ 9 \end{pmatrix}$, $2\vec{u}-3\vec{v}\begin{pmatrix} 4 \\ 11 \end{pmatrix}$.
3. 94 page 140.
   $\|\vec{u}\| = 1$, $\|\vec{v}\| = 5$, $\|\vec{w}\| = 10$.
4. 95 page 140.

(a) $||\vec{u}|| = 5$, $||\vec{v}|| = 2\sqrt{5}$.

(b) i. $\vec{u} + \vec{v}\begin{pmatrix}4\\3\end{pmatrix}$.

ii. $||\vec{u} + \vec{v}|| = \sqrt{4^2 + 3^2} = 5$.

5. 96 page 140.
L'affirmation est fausse. Un contre-exemple est fourni par l'exercice précédent.

EXERCICE 45. Soient $A(-1;-2)$, $B(5;-1)$, $C(6;3)$ et $D(0;2)$ des points considérés dans un repère du plan.

1. Faites un figure.
2. Construisez le point E tel que $\overrightarrow{AE} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{CB}$.
3. Déterminez les coordonnées de E.
4. Démontrez que $\overrightarrow{BE} = -\overrightarrow{BC}$.
5. Que pouvez-vous en déduire ?

EXERCICE 46. Soient ABC un triangle et K, L et M les milieux respectifs de $[AB]$, $[AC]$ et $[BC]$.

1. Démontrez que $\overrightarrow{KL} = \overrightarrow{BM}$.
2. Déduisez-en $\overrightarrow{BC}$ en fonction de $\overrightarrow{KL}$.

Exercice 46.

Si aucune figure n'est demandée il est nécessaire pour aborder un tel exercice de faire un schéma.

1. Comme M est le milieu de $[BC]$:

$$\overrightarrow{BM} = \frac{1}{2}\overrightarrow{BC}$$

Donc, d'après la relation de Chasles :

$$\overrightarrow{BM} = \frac{1}{2}\left(\overrightarrow{BA} + \overrightarrow{AC}\right)$$

Puisque K et L sont les milieux respectifs de $[AB]$ et $[AC]$:

$$\begin{aligned}\overrightarrow{BM} &= \frac{1}{2}\left(2\overrightarrow{KA} + 2\overrightarrow{AL}\right)\\ &= \frac{1}{2} \times 2\overrightarrow{KA} + \frac{1}{2} \times 2\overrightarrow{AL}\\ &= \overrightarrow{KA} + \overrightarrow{AL}\end{aligned}$$

D'après la relation de Chasles :

$$\boxed{\overrightarrow{BM} = \overrightarrow{KL}}$$

2. Puisque M est le milieu de $[BC]$

$$\overrightarrow{BC} = 2\overrightarrow{BM}$$

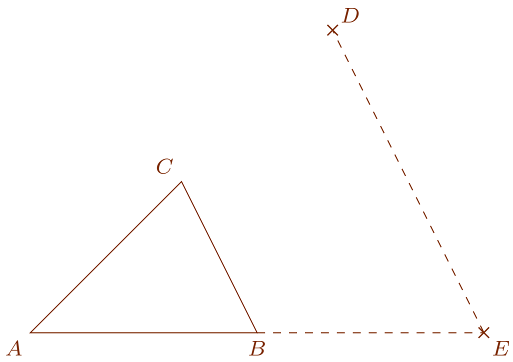
Donc, d'après la question précédente :

$$\boxed{\overrightarrow{BC} = 2\overrightarrow{KL}.}$$

EXERCICE 47. Soient ABC un triangle, D et E des points tels que $\overrightarrow{BE} = \overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{ED} = 2\overrightarrow{BC}$.

Faites une figure puis démontrez que C est le milieu du segment $[AD]$.

Exercice 47.



Nous allons utiliser une caractérisation vectorielle du milieu : C est le milieu de $[AD]$ si et seulement si $\overrightarrow{AD} = 2\overrightarrow{AC}$.

Démontrons que $\overrightarrow{AD} = 2\overrightarrow{AC}$.

Pour démontrer cette égalité nous disposons d'informations sur les vecteurs $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{BE}$, $\overrightarrow{ED}$ et $\overrightarrow{BC}$. Nous allons, avec la relation de Chasles, nous allons décomposer $\overrightarrow{AD}$ en faisant apparaître tous ces vecteurs. Autrement dit il faut trouver un chemin qui va de A à D et qui passe si possible par B et E (ou C mais il s'avérera que ce n'est pas nécessaire).

D'après la relation de Chasles :

$$\overrightarrow{AD} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BE} + \overrightarrow{ED}$$

Comme $\overrightarrow{BE} = \overrightarrow{AB}$:

$$\begin{aligned}\overrightarrow{AD} &= \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{ED}\\ &= 2\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{ED}\end{aligned}$$

Comme $\overrightarrow{ED} = 2\overrightarrow{BC}$:

$$\begin{aligned}\overrightarrow{AD} &= 2\overrightarrow{AB} + 2\overrightarrow{BC}\\ &= 2\left(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC}\right)\end{aligned}$$

D'après la relation de Chasles :

$$\overrightarrow{AD} = 2\overrightarrow{AC}$$

Nous en déduisons finalement

C est le milieu de $[AD]$.

Nous aurions pu aussi utiliser une variante du théorème des milieux.

EXERCICE 48. Soient $ABCD$ un carré non trivial (non réduit à un point), E le symétrique de A par rapport à B et I le milieu de $[BC]$.

1. Faites un croquis à main levé.
2. Justifiez que $\left(A; \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AD}\right)$ est un repère orthonormé du plan.
3. Déterminez les coordonnées des différents points de la figure puis montrez que I est le milieu de $[DE]$.

4. Démontrez ce résultat sans utiliser de repère.

Exercice 48.

1. Par construction ABD est un triangle isocèle rectangle en A donc

$$\boxed{\left(A; \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AD}\right).}$$

2. * Du fait du choix du repère : $A(0;0)$, $B(1;0)$, $D(0;1)$.
   * Puisque $ABCD$ est un carré : $C(1;0)$.
   * E est le symétrique de A par rapport à B. Autrement dit B est le milieu de $[AE]$. Nous en déduisons :

$$x_B = \frac{x_A + x_E}{2}$$

Ce qui équivaut successivement à :

$$\begin{aligned} 1 &= \frac{0 + x_2}{2} \\ 1\times 2 &= \frac{x}{2}\times 2 \\ 2 &= x_E \end{aligned}$$

et de même pour les ordonnées :

$$y_B = \frac{y_A + y_E}{2}$$

Ce qui équivaut successivement à :

$$\begin{aligned} 0 &= \frac{0 + y_2}{2} \\ 0\times 2 &= \frac{x}{2}\times 2 \\ 0 &= y_E \end{aligned}$$

Ainsi : $E(2{,}0)$.

   * Puisque I est le milieu de $[BC]$:

$$\begin{aligned} x_I &= \frac{x_B + x_C}{2} \\ &= \frac{1+1}{2} \\ &= 1 \end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned} y_I &= \frac{y_B + y_C}{2} \\ &= \frac{0+1}{2} \\ &= \frac{1}{2} \end{aligned}$$

Donc : $I\left(1; \frac{1}{2}\right)$.

Démontrons que I est le milieu de $[DE]$.

Nous allons simplement vérifier que le milieu de $[DE]$ et I coïncident car ils ont même coordonnées.

Si nous notons M le milieu de $[DE]$ nous avons d'une part

$$\begin{aligned} x_M &= \frac{x_D + x_E}{2} \\ &= \frac{0+2}{2} \\ &= 1 \end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned} y_M &= \frac{y_D + y_E}{2} \\ &= \frac{1+0}{2} \\ &= \frac{1}{2} \end{aligned}$$

Donc $M\left(1; \frac{1}{2}\right)$.
Puisque M et I ont même coordonnées nous pouvons affirmer

I est le milieu de $[DE]$.

3. En utilisant le théorème des milieux.

EXERCICE 49. On considère un carré $ABCD$ non réduit à un point.

1. Justifiez que $\left(A; \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AD}\right)$ est un repère du plan. Est-il orthonormé ?
2. Justifiez que $\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD}$ et en déduire les coordonnées du point C dans le repère $\left(A; \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AD}\right)$.
3. On considère le point E symétrique de A par rapport à B et le point F symétrique de F par rapport à D.
   Déterminez les coordonnées des points E et F dans le repère $\left(A; \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AD}\right)$.
4. Que semble représenter le point C par rapport aux points E et F ? Démontrez le par au moins 3 méthodes différentes.

Exercice 49.

1. $ABCD$ est un carré donc ABD est un triangle isocèle rectangle en A. Par conséquent

   $\left(A; \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AD}\right)$ est un repère orthonormé.

2. Puisque $ABCD$ est un parallélogramme, d'après l'identité du parallélogramme

   $\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD}$.

   Calculons les coordonnées de C.

   * D'une part $\overrightarrow{AC}\begin{pmatrix} x_C - x_A \\ y_C - y_A \end{pmatrix}$ et donc $\overrightarrow{AC}\begin{pmatrix} x_C \\ y_C \end{pmatrix}$,
   * d'autre part $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD}\begin{pmatrix} (1-0)+(0-0) \\ (0-0)+(1-0) \end{pmatrix}$,

   nous en déduisons donc : $x_C = 1$ et $y_C = 1$.

   $C(1; 1)$.

3. Puisque E et le symétrique de A par rapport à B, B est le milieu de $[AE]$ et, par conséquent, $\overrightarrow{AE} = 2\overrightarrow{AB}$.
Comme $\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}$ nous en déduisons $\overrightarrow{AE}\begin{pmatrix}2\times 1\\2\times 0\end{pmatrix}$ *i.e.* $\overrightarrow{AE}\begin{pmatrix}2\\0\end{pmatrix}$.
Mais $\overrightarrow{AE}\begin{pmatrix}x_E\\y_E\end{pmatrix}$ donc

$$\begin{cases} x_E = 2 \\ y_E = 0 \end{cases}$$

$$\boxed{E(2;0).}$$

En procédant de même

$$\boxed{F(0;2).}$$

4. C est le milieu de $[EF]$.
Voici trois méthodes pour le démontrer :

   * Montrer avec les coordonnées que $\overrightarrow{EC} = \overrightarrow{CF}$.
   * En calculant les coordonnées du milieu de $[EF]$ nous nous rendons compte qu'elles coïncident avec celles de C.
   * En utilisant le théorème des milieux. Ceci dit il faudrait expliciter le fait que C est dans le même demi-plan délimité par (AD) que F.

EXERCICE 50. Soient T, R et I trois points non alignés.
Les points U et V sont définis par : $\overrightarrow{IU} = \overrightarrow{IR} + \overrightarrow{TI}$ et $\overrightarrow{TV} = \overrightarrow{TI} + \overrightarrow{TR}$

1. Faire une figure sur papier ou à l'aide d'un logiciel de géométrie dynamique.
2. Que peut-on conjecturer ?
3. (a) Démontrer que $\overrightarrow{UV} = \overrightarrow{RI} + \overrightarrow{IT} + \overrightarrow{TR}$.
   (b) Conclure.

EXERCICE 51. Soient T, R et I trois points non alignés. On définit les points A, B et C par : $\overrightarrow{IA} = \overrightarrow{RT} - \overrightarrow{IT}$, $\overrightarrow{IB} = \overrightarrow{TI}$ et $\overrightarrow{IC} = \overrightarrow{RT} + \overrightarrow{RI}$.

1. Faire une figure sur papier ou à l'aide d'un logiciel de géométrie dynamique.
2. Que peut-on conjecturer ?
3. (a) Démontrer que $\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{IC} - \overrightarrow{IA}$ et $\overrightarrow{BA} = \overrightarrow{IA} - \overrightarrow{IB}$.
   (b) En déduire une expression des vecteurs $\overrightarrow{BA}$ et $\overrightarrow{AC}$ en fonction de $\overrightarrow{RT}$ puis conclure.

Exercice 51.

1.
2.
3. (a) D'après la relation de Chasles :

$$\begin{aligned}\overrightarrow{AC} &= \overrightarrow{AI} + \overrightarrow{IC}\\ &= -\overrightarrow{IA} + \overrightarrow{IC}\\ &= \overrightarrow{IC} - \overrightarrow{IA}\end{aligned}$$

De même : $\overrightarrow{BA} = \overrightarrow{IA} - \overrightarrow{IB}$.

(b) D'après la question précédente :

$$\overrightarrow{BA} = \overrightarrow{IC} - \overrightarrow{IA}$$

Donc, d'après l'énoncé :

III Colinéarité de deux vecteurs.

Nous avions vu que nous pouvions additionner des vecteurs et les multiplier par des nombres.

Nous allons nous intéresser à la relation qui existe entre un vecteur et le vecteur obtenu en multipliant ce dernier par un nombre quelconque. Cette relation est appelée la colinéarité.

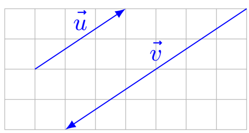
Lorsque les vecteurs sont des vecteurs du plan nous obtenons une équivalence entre colinéarité et parallélisme. Autrement dit les problèmes de parallélisme vont maintenant pouvoir être traité grâce aux vecteurs. Peu à peu nous voyons que les vecteurs peuvent remplacer les outils de géométrie que nous avions l'habitude d'utiliser en géométrie euclidienne classique (théorème de Thalès, angles alternes-internes, etc).

Colinéarité.

Définition 6. Deux vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont dits *colinéaires* si et seulement si il existe un nombre réel λ (*i.e.* on peut en trouver au moins un) tel que

$$\vec{u} = \lambda\vec{v} \quad \text{ou} \quad \vec{v} = \lambda\vec{u}$$

Exemples.

1. Si $\vec{u} = 2\vec{v}$ alors $\vec{u}$ est colinéaire à $\vec{v}$ et $\vec{v}$ est colinéaire à $\vec{u}$.
2. 

   Nos remarquons que $\vec{v} = -\frac{1}{2}\vec{u}$ donc $\vec{v}$ et $\vec{u}$ sont colinéaires.
3. Si $6\vec{u} - 4\vec{v} = \vec{0}$ alors $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont colinéaires car : $\vec{u} = \frac{2}{3}\vec{v}$.
4. Si deux vecteurs sont égaux alors ils sont colinéaires car $\vec{u} = 1\vec{v}$.
5. $\vec{0}$ est colinéaire à $\vec{u}$ car $\vec{0} = 0\vec{u}$.

Remarques.

1. Nous pouvons voir la chose comme une sorte de rapport de proportionnalité entre les vecteurs.
2. Il suffit d'établir l'une des deux égalités pour établir la colinéarité de deux vecteurs.
3. Le vecteur nul est colinéaire à tous les vecteurs.

Caractérisations.

Proposition 7. Soient $(\vec{\imath},\vec{\jmath})$ une base du plan, $\vec{u}$ et $\vec{v}$ des vecteurs dont les coordonnées relativement à la base $(\vec{\imath},\vec{\jmath})$, sont respectivement $\begin{pmatrix} x_u \\ y_u \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} x_v \\ y_v \end{pmatrix}$.

$\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont colinéaires si et seulement si ils vérifient l'une au moins des propriétés suivantes.

(i) Les coordonnées de $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont proportionnelles.

(ii) Il existe un nombre réel λ tel que $\vec{u} = \lambda\vec{v}$ ou $\vec{v} = \lambda\vec{u}$.

(iii) $x_u y_v - x_v y_u = 0$.

Démonstration

Par définition de la colinéarité, $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont colinéaires si et seulement si $\vec{u} = \lambda\vec{v}$ ou $\vec{v} = \lambda\vec{u}$.

Autrement dit si et seulement si

$$\begin{cases} x_1 = \lambda x_2 \\ y_1 = \lambda y_2 \end{cases} \quad \text{ou} \quad \begin{cases} x_2 = \lambda x_1 \\ y_2 = \lambda y_1 \end{cases}$$

Autrement dit si et seulement si les coordonnées de $\vec{u}$ sont proportionnelles à celles de $\vec{v}$. Ce qui équivaut à dire que le produit en croix est vérifié.

Autrement dit $x_u \times y_v - x_v \times y_u = 0$.

x_u	x_v
y_u	y_v

Remarques.

1. Le nombre $x_u y_v - x_v y_u$ est appelé le *déterminant de la famille de vecteurs $(\vec{u};\vec{v})$ par rapport à la base $(\vec{\imath},\vec{\jmath})$* et est noté

$$\det_{(\vec{\imath},\vec{\jmath})}(\vec{u};\vec{v}) = \begin{vmatrix} x_u & x_v \\ y_u & y_v \end{vmatrix}.$$

Lorsqu'il n'y a pas d'ambiguïté nous écrirons simplement $\det(\vec{u};\vec{v})$. Cette notation du déterminant ne nécessite pas de connaître les coordonnées de $\vec{u}$ et $\vec{v}$.

Au contraire la notation $\begin{vmatrix} x_u & x_v \\ y_u & y_v \end{vmatrix}$ fait intervenir les coordonnées des vecteurs.

D'n point de vu pratique nous retiendrons que deux vecteurs sont colinéaires si et seulement si leur déterminant est nul.

2. Nous privilégierons, si possible, la recherche du coefficient de proportionnalité entre les coefficients qui nous fournira l'égalité liant les deux vecteurs plutôt que le calcul du déterminant.

EXERCICE 52.

Déterminez si $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont colinéaires.

a) $\vec{u}\begin{pmatrix} 6 \\ -4 \end{pmatrix}$ et $\vec{v}\begin{pmatrix} -12 \\ 8 \end{pmatrix}$. b) $\vec{u}\begin{pmatrix} \sqrt{2}-1 \\ 1 \end{pmatrix}$ et $\vec{v}\begin{pmatrix} 1 \\ \sqrt{2}+1 \end{pmatrix}$. c) $\vec{u}\begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix}$ et $\vec{v}\begin{pmatrix} -1 \\ 2 \end{pmatrix}$.

d) $\vec{u}\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$ et $\vec{v}\begin{pmatrix} x \\ 3 \end{pmatrix}$ où $x \in \mathbb{R}$.

Exercice 52.

a) Clairement en considérant les coordonnées des vecteurs nous remarquons une proportionnalité : $\vec{v} = -2\vec{u}$. Et donc

$$\boxed{\vec{u} \text{ et } \vec{v} \text{ sont colinéaires.}}$$

b) Montrons que $\vec{v}$ et $\vec{u}$ sont colinéaires.

$$\begin{aligned}
\det(\vec{u};\vec{v}) &= \begin{vmatrix} x_u & x_v \\ y_u & y_v \end{vmatrix} \\
&= \begin{vmatrix} \sqrt{2}-1 & 1 \\ 1 & \sqrt{2}+1 \end{vmatrix} \\
&= \left(\sqrt{2}-1\right) \times \left(\sqrt{2}+1\right) - 1 \times 1 \\
&= \sqrt{2} \times \sqrt{2} + \sqrt{2} \times 1 + (-1) \times \sqrt{2} + (-1) \times 1 - 1 \\
&= \sqrt{2}^2 + \sqrt{2} - \sqrt{2} - 2 \\
&= 2 - 2 \\
&= 0
\end{aligned}$$

$\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont colinéaires.

c) Déterminons si $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont colinéaires.

$$\begin{aligned}
\det(\vec{u};\vec{v}) &= \begin{vmatrix} 3 & -1 \\ 4 & 2 \end{vmatrix} \\
&= 3 \times 2 - 4 \times (-1) \\
&= 11 \\
&\neq 0
\end{aligned}$$

$\vec{u}$ et $\vec{v}$ ne sont pas colinéaires.

d) Déterminons l'ensemble des x tels que $\vec{u}$ et $\vec{v}$ soient colinéaires.

Soit $x \in \mathbb{R}$.

$$\begin{aligned}
\det(\vec{u},\vec{v}) = 0 &\iff \begin{vmatrix} 1 & x \\ 2 & 3 \end{vmatrix} = 0 \\
&\iff 1 \times 3 - 2 \times x = 0 \\
&\iff -2x + 3 = 0 \\
&\iff -2x + 3 - 3 = 0 - 3 \\
&\iff -2x = -3 \\
&\iff \frac{-2x}{-2} = \frac{-3}{-2} \\
&\iff x = \frac{3}{2}
\end{aligned}$$

$\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont colinéaires si et seulement si $x = \frac{3}{2}$.

EXERCICE 53.

Donnez deux vecteurs colinéaires à $\vec{u}\begin{pmatrix} 3 \\ -3 \end{pmatrix}$.

Exercice 53.

$\vec{v}\begin{pmatrix}-1\\1\end{pmatrix}$ et $\vec{w}\begin{pmatrix}12\\-12\end{pmatrix}$.

EXERCICE 54.

Soient $\vec{u}\begin{pmatrix}-8\\3\end{pmatrix}$ et $\vec{v}\begin{pmatrix}7\\11\end{pmatrix}$. Calculez le déterminant de $\vec{u}$ et $\vec{v}$ puis dites si les vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont colinéaires.

Exercice 54.

$\det(\vec{u};\vec{v}) = -101 \neq 0$ donc $\vec{u}$ et $\vec{v}$ ne sont pas colinéaires.

EXERCICE 55. Déterminez si les vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont colinéaires.

a) $\vec{u}\begin{pmatrix}-3\\21\end{pmatrix}$ et $\vec{v}\begin{pmatrix}-3\\21\end{pmatrix}$.

b) $\vec{u}\begin{pmatrix}3\\12\end{pmatrix}$ et $\vec{v}\begin{pmatrix}12\\3\end{pmatrix}$.

c) $\vec{u}\begin{pmatrix}7/4\\2/7\end{pmatrix}$ et $\vec{v}\begin{pmatrix}1/2\\4\end{pmatrix}$.

d) $\vec{u}\begin{pmatrix}2/3\\2\end{pmatrix}$ et $\vec{v}\begin{pmatrix}1/5\\3/5\end{pmatrix}$.

e) $\vec{u}\begin{pmatrix}-10\\4\end{pmatrix}$ et $\vec{v}\begin{pmatrix}15\\-6\end{pmatrix}$.

f) $\vec{u}\begin{pmatrix}3/2\\2\end{pmatrix}$ et $\vec{v}\begin{pmatrix}21\\28\end{pmatrix}$.

Exercice 55.

a) $\vec{u} = 1 \cdot \vec{v}$ donc colinéaires.
b) $\det(\vec{u},\vec{v}) = -135$ donc non colinéaires.
c) $\det(\vec{u},\vec{v}) = \frac{48}{8}$ donc non colinéaires.
d) $\det(\vec{u},\vec{v}) = 0$ donc colinéaires.
e) $\det(\vec{u},\vec{v}) = 0$ donc colinéaires.
f) $\det(\vec{u},\vec{v}) = 0$ donc colinéaires.

EXERCICE 56. Déterminez si $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont colinéaires et si c'est le cas précisez l'égalité les reliant.

a) $\vec{u}\begin{pmatrix}1\\4\end{pmatrix}$ et $\vec{v}\begin{pmatrix}-2\\-8\end{pmatrix}$.

b) $\vec{u}\begin{pmatrix}6\\4\end{pmatrix}$ et $\vec{v}\begin{pmatrix}9\\6\end{pmatrix}$.

c) $\vec{u}\begin{pmatrix}-5\\3\end{pmatrix}$ et $\vec{v}\begin{pmatrix}15\\-9\end{pmatrix}$.

d) $\vec{u}\begin{pmatrix}4\\12\end{pmatrix}$ et $\vec{v}\begin{pmatrix}6\\18\end{pmatrix}$.

e) $\vec{u}\begin{pmatrix}\frac{2}{3}\\2\end{pmatrix}$ et $\vec{v}\begin{pmatrix}1\\3\end{pmatrix}$.

f) $\vec{u}\begin{pmatrix}\frac{5}{9}\\-\frac{5}{6}\end{pmatrix}$ et $\vec{v}\begin{pmatrix}11\\-15\end{pmatrix}$.

g) $\vec{u}\begin{pmatrix}\sqrt{5}-1\\-1\end{pmatrix}$ et $\vec{v}\begin{pmatrix}-4\\\sqrt{5}+1\end{pmatrix}$.

Exercice 56.

a) $-2\vec{u} = \vec{v}$.
b) $\frac{3}{2}\vec{u} = \vec{v}$.
c) $-3\vec{u} = \vec{v}$.
d) $\frac{3}{2}\vec{u} = \vec{v}$.
e) $\frac{3}{2}\vec{u} = \vec{v}$.
f) Non colinéaires.
g) $\frac{-4}{\sqrt{5}-1}\vec{u} = \vec{v}$.

EXERCICE 57. Déterminez un réel μ de sorte que les vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ soient colinéaires.

a) $\vec{u}\begin{pmatrix}-3\\5\end{pmatrix}$ et $\vec{v}\begin{pmatrix}\mu\\2\end{pmatrix}$.

b) $\vec{u}\begin{pmatrix}5\\\mu\end{pmatrix}$ et $\vec{v}\begin{pmatrix}2\\1/3\end{pmatrix}$.

EXERCICE 58. Soient $A(-10;7)$, $B(-20;10)$, $C(5;-2)$ et $D(10;-8)$ des points du plan.

$\overrightarrow{AC}$ et $\overrightarrow{DB}$ sont-ils colinéaires ?

Exercice 58.

Démontrons que $\overrightarrow{AC}$ et $\overrightarrow{DB}$ sont colinéaires.

Les coordonnées de $\overrightarrow{AC}$ sont $\begin{pmatrix}x_C - x_A\\y_C - y_A\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}5-(-10)\\-2-7\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}15\\-9\end{pmatrix}$.

De même $\overrightarrow{DB}\begin{pmatrix}-30\\18\end{pmatrix}$.

Clairement $\overrightarrow{DB} = -2\overrightarrow{AC}$.

$\overrightarrow{AC}$ et $\overrightarrow{DB}$ sont colinéaires.

EXERCICE 59. Soient les points $C(0;4)$, $D(2;7)$, $E(8;17)$ et $F(16;29)$.

1. Montrez que $\overrightarrow{CD}$ et $\overrightarrow{EF}$ sont colinéaires.
2. $\overrightarrow{CD}$ et $\overrightarrow{CE}$ sont-ils colinéaires ?

EXERCICE 60. On considère des points $F(6;4)$ et G d'abscisse 8 des points. Sachant que $\overrightarrow{FG}$ est colinéaire au vecteur $\vec{u}\begin{pmatrix}5\\-3\end{pmatrix}$ déterminez l'ordonnée de G.

Exercice 60.
$\lambda\overrightarrow{FG} = \vec{u}$. Donc

$$\begin{cases} \lambda 2 = 5 \\ \lambda(y_G - 4) = -3 \end{cases}$$

D'où $\lambda = \frac{5}{2}$ puis $y_G = -3 \times \frac{2}{5} + 4 = \frac{14}{5}$.

Parallélisme.

Proposition 8.
Soient A, B, C et D des points du plan avec $A \neq B$ et $C \neq D$. $(AB)//(CD)$ si et seulement si $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{CD}$ sont colinéaires.

Démonstration

La démonstration de cette proposition n'est pas possible sans une définition de ce qu'est une droite or nous n'en n'avons pour l'instant pas donné.

Remarques.

1. La négation de cette proposition est aussi intéressante : (AB) et (CD) sont sécantes si et seulement si $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{CD}$ ne sont pas colinéaires.
2. Nous utiliserons ce résultat pour étudier la position relative de droites du plan (coplanaires), *i.e.* pour dire si elles sont parallèles (éventuellement confondues voir corollaire ci-après) ou sécantes.

EXERCICE 61. Soient $A(-4;-3)$, $B(8;1)$, $C(4{,}4)$ et $D(-2;2)$ des points du plan.
Étudiez la position relative de (AB) et (CD).

Exercice 61.
Étudier la position relative de deux droites du plan consiste à dire si elle sont parallèles ou sécantes (*i.e.* un unique pont d'intersection). Nous peaufinerons la réponse apportée à cette question dans la leçon sur les droites mais pour l'instant la réponse à cette question est soit « les droites sont parallèles » soit « les droites sont sécantes ».

Déterminons la position relative de (AB) et (CD).

$(AB) \parallel (CD)$ si et seulement si $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{CD}$ sont colinéaires.

$\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix}x_B - x_A\\y_B - y_A\end{pmatrix}$, $\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix}8-(-4)\\1-(-3)\end{pmatrix}$, $\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix}12\\4\end{pmatrix}$.

De même $\overrightarrow{CD}\begin{pmatrix}-6\\-2\end{pmatrix}$

Clairement $-\frac{1}{2}\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CD}$.
Autrement dit $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{CD}$ sont colinéaires.
Ce qui équivaut encore à dire

(AB) et (CD) sont parallèles.

EXERCICE 62. Déterminez la position relative des droites (AB) et (MN).

a) $A(1;2)$, $B(5;8)$, $M(0;-1)$ et $N(5;6)$.
b) $A(3;-10)$, $B(15;5)$, $M(1;1)$ et $N(17;21)$.

Exercice 62.

1. $\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix}4\\6\end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{MN}\begin{pmatrix}5\\7\end{pmatrix}$. $\det\left(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{MN}\right) \neq 0$. Donc : $(AB) \nparallel (MN)$.
2. $\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix}12\\15\end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{MN}\begin{pmatrix}16\\20\end{pmatrix}$. $\det\left(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{MN}\right) = 0$. Donc : $(AB) \parallel (MN)$.

Alignement de trois points.

Proposition 9. Soient A, B et C des points du plan.
A, B et C sont alignés si et seulement si $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$ sont colinéaires.

EXERCICE 63.
Soient $A(-2;3)$, $B(2;1)$ et $C(4;0)$ dans un repère du plan muni d'un repère $(O:\vec{i},\vec{j})$.
Démontrez que A, B et C sont alignés.

EXERCICE 64. Déterminez si les points A, B et C sont alignés.

a) $A(2;13)$, $B(-2;-7)$ et $C(11;58)$.
b) $A(9;20)$, $B(2;-1)$ et $C(25;71)$.

Il est possible de reformuler le précédent résultat : dire que trois points sont alignés, c'est dire que l'un d'entre eux appartient à la droite passant par les deux autres.

Proposition 10. Soient A, B et M des points du plan.

M appartient à la droite (AB) si et seulement si $\overrightarrow{AM}$ et $\overrightarrow{AB}$ sont colinéaires.

Remarques.

1. Ce résultat qui peut sembler anodin sera utiliser pour définir les droites du plan dans une prochaine leçon.

EXERCICE 65.
Déterminez si le point M appartient à la droite (EF).

a) $E(5;-3)$, $F(-3;3)$ et $M(15;-9)$.
b) $E(0;-7)$, $F(1;0)$, $M(2;7)$.

Exercice 65.

1. $\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix}-4\\-20\end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{BC}\begin{pmatrix}13\\65\end{pmatrix}$.

$$\begin{aligned}\det(\overrightarrow{AB};\overrightarrow{BC}) &= \begin{vmatrix}\sqrt{2}-4 & 13\\ -20 & 65\end{vmatrix}\\ &= -4\times 65 - 13\times(-20)\\ &= 0\end{aligned}$$

Ainsi $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{BC}$ sont colinéaires et donc :

$$\boxed{A,\ B \text{ et } C \text{ sont alignés.}}$$

Exercices.

EXERCICE 66.

Déterminez tous les nombres x tels que $\vec{u}$ et $\vec{v}$ soient colinéaires.

a) $\vec{u}\begin{pmatrix}1\\5\end{pmatrix}$ et $\vec{v}\begin{pmatrix}x\\10\end{pmatrix}$.

b) $\vec{u}\begin{pmatrix}2\\3\end{pmatrix}$ et $\vec{v}\begin{pmatrix}1+x\\2x\end{pmatrix}$.

Exercice 66.

1. Le résultat est immédiat en remarquant que $y_v = 2xy_u$ donc nécessairement $x_v = 2x_u = 2\times 1 = 2$.

   Déterminons x.

   $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont colinéaires si et seulement si

   $$\det(\vec{u};\vec{v}) = 0$$

   ce qui équivaut successivement à :

   $$\begin{vmatrix}1 & x\\5 & 10\end{vmatrix} = 0$$
   $$1\times 10 - 5\times x = 0$$
   $$10 - 5x = 0$$

   Nous reconnaissons une équation linéaire du premier degré que nous allons résoudre en travaillant par équivalences successives.

   $$10 - 5x - 10 = 0 - 10$$
   $$-5x = -10$$
   $$\frac{-5x}{-5} = \frac{-10}{-5}$$
   $$x = 2$$

   $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont colinéaires si et seulement si $x = 2$.

2. De même

   $$2\times(2x) - 3\times(1+x) = 0$$
   $$4x - 3 - 3x = 0$$
   $$x = 3$$

EXERCICE 67. On considère les points $E(5;-1)$, $F(-1;4)$, $G(7;2)$ et $M(1;y)$ où y est un nombre réel.

a) Pour quelle valeur de y le point M appartient-il à (FG) ?
b) Pour quelles valeurs de y les droites (EF) et (GM) sont-elles parallèles ?

EXERCICE 68. Soient $A(4;0)$, $B(0;7)$ et $C(-6;-5)$ des points.

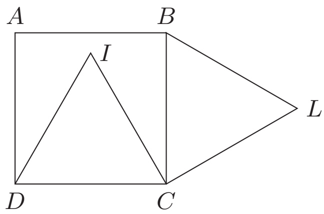
1. Calculez les coordonnées du milieu P de $[AB]$.
2. Calculez les coordonnées des points S et T définis par $\overrightarrow{BS} = \frac{1}{3}\overrightarrow{CB}$ et $5\overrightarrow{CT} = 4\overrightarrow{CA}$.
3. Le point P est-il sur la droite (ST) ?

EXERCICE 69.

Soient $ABCD$ un carré, BCL et DIC des triangles équilatéraux tels que sur la figure ci-contre.

Nous souhaitons établir l'alignement des points A, I et L.

Pour cela considérons le repère orthonormé $(D; C; A)$.



1. Donnez sans justification les coordonnées de D, C, A et B.
2. Déterminez les coordonnées de I et L.
3. Calculez les coordonnées des vecteurs $\overrightarrow{AI}$ et $\overrightarrow{AL}$.
4. Démontrez l'alignement des points A, I et L.

EXERCICE 70. Soient $M(7;3)$, $N(-3;1)$, $C(0;5)$, $D(5;6)$ et $E(3;9)$ des points du plan.

1. Montrez que le quadrilatère $MNCD$ est un trapèze.
2. Montrez que E est le point d'intersection de (NC) et (MD).
3. Soient J et K les milieux respectivement de $[NM]$ et $[CD]$. Calculez les coordonnées de J et K.
4. Montrez que E, J et K sont alignés.

EXERCICE 71. Soient $A(3;4)$, $B(1;1)$, $C(6;-2)$ et $D(8;1)$ des points, I le milieu de $[BC]$, et E et F les points définis par :

$$\overrightarrow{AE} = \frac{1}{3}\overrightarrow{AC} \quad \text{et} \quad \overrightarrow{CF} = \frac{1}{3}\overrightarrow{CA}.$$

1. Calculez les coordonnées de I, E et F.
2. (a) Les vecteurs $\overrightarrow{BE}$ et $\overrightarrow{IF}$ sont-ils colinéaires ?
   (b) Qu'en déduisez-vous concernant les droites (BE) et (IF) ?
3. Montrez que $ABCD$ est un parallélogramme.
4. (a) Calculez la norme du vecteur $\overrightarrow{AC}$.
   (b) $ABCD$ est -il un rectangle ?
5. Les points I, F et D sont-ils alignés ?

Exercice 71.

1. * Déterminons les coordonnées de I.

   Puisque I est le milieu de $[BC]$:

$$\begin{aligned} x_I &= \frac{x_B + x_C}{2} \\ &= \frac{1+6}{2} \\ &= \frac{7}{2} \end{aligned}$$

   De même : $y_I = -\frac{1}{2}$.

$$\boxed{I\left(\tfrac{7}{2}; -\tfrac{1}{2}\right).}$$

* Déterminons les coordonnées de E.

$\overrightarrow{AC}\begin{pmatrix} x_C - x_A \\ y_C - y_A \end{pmatrix}$ donc $\overrightarrow{AC}\begin{pmatrix} 6-3 \\ -2-4 \end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{AC}\begin{pmatrix} 3 \\ -6 \end{pmatrix}$.

D'où : $\frac{1}{3}\overrightarrow{AC}\begin{pmatrix} \frac{1}{3} \times 3 \\ \frac{1}{3} \times (-6) \end{pmatrix}$ *i.e.* $\frac{1}{3}\overrightarrow{AC}\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix}$.

De même : $\overrightarrow{AE}\begin{pmatrix} x_E - 3 \\ y_E - 4 \end{pmatrix}$.

De $\overrightarrow{AE} = \frac{1}{3}\overrightarrow{AC}$ nous déduisons donc

$$\begin{cases} x_E - 3 = 1 \\ y_E - 4 = -2 \end{cases}$$

Ce qui équivaut successivement à :

$$\begin{cases} x_E - 3 + 3 = 1 + 3 \\ y_E - 4 + 4 = -2 + 4 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x_E = 4 \\ y_E = 2 \end{cases}$$

$$\boxed{E(4;2).}$$

* De même qu'au point précédent

$$\overrightarrow{CF} = \frac{1}{3}\overrightarrow{CA} \Leftrightarrow \begin{cases} x_F - 6 = \frac{1}{3}(3-6) \\ y_F - (-2) = \frac{1}{3}(4-(-2)) \end{cases}$$
$$\Leftrightarrow \begin{cases} x_F = 5 \\ y_F = 0 \end{cases}$$

$$\boxed{F(5;0).}$$

2. (a) Démontrons que $\overrightarrow{BE}$ et $\overrightarrow{IF}$ sont colinéaires.

$\overrightarrow{BE}\begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{IF}\begin{pmatrix} \frac{3}{2} \\ \frac{1}{2} \end{pmatrix}$ donc

$$\begin{aligned} \det\left(\overrightarrow{BE};\overrightarrow{IF}\right) &= \begin{vmatrix} 3 & \frac{3}{2} \\ 1 & \frac{1}{2} \end{vmatrix} \\ &= 3 \times \frac{1}{2} - 1 \times \frac{3}{2} \\ &= 0 \end{aligned}$$

$$\boxed{\overrightarrow{BE} \text{ et } \overrightarrow{IF} \text{ sont colinéaires.}}$$

(b) Nous déduisons de la question précédente que :

$$\boxed{(BE) \parallel (IF).}$$

3. Démontrons que $ABCD$ est un parallélogramme.

$\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix} -2 \\ -3 \end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{DC}\begin{pmatrix} -2 \\ -3 \end{pmatrix}$ donc $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC}$.

Par conséquent :

$$\boxed{ABCD \text{ est un parallélogramme.}}$$

4. (a) Calculons $\|\overrightarrow{AC}\|$.

La formule pour la distance euclidienne est la même que celle pour la norme du vecteur. Par contre comme le repère n'est pas orthonormé la norme ne correspond pas forcément à une longueur.

$$\begin{aligned}
\|\overrightarrow{AC}\| &= \sqrt{(x_C - x_A)^2 + (y_C - y_A)^2} \\
&= \sqrt{(6-3)^2 + (-2-4)^2} \\
&= \sqrt{45} \\
&= \sqrt{3^2 \times 5} \\
&= \sqrt{3^2} \times \sqrt{5}
\end{aligned}$$

$$\boxed{\|\overrightarrow{AC}\| = 3\sqrt{5}.}$$

(b) Nous ne pouvons pas répondre à cette question car le repère n'étant a priori pas orthonormé nous ne pouvons pas établir la présence d'angle droit ou d'égalité de longueur (diagonales).

Si nous supposons que le repère est orthonormé alors, comme $\|\overrightarrow{BD}\| = 9$, nous pouvons affirmer que les diagonales du parallélogramme $ABCD$ ne sont pas de même longueur donc ce n'est pas un rectangle.

5. Démontrons que les points I, F et D sont alignés.

Ils sont alignés si et seulement si $\overrightarrow{IF}$ et $\overrightarrow{DF}$ sont colinéaires.

$\overrightarrow{IF}\begin{pmatrix}\frac{3}{2}\\ \frac{1}{2}\end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{DF}\begin{pmatrix}-3\\ -1\end{pmatrix}$ donc

$$\begin{aligned}
\det\left(\overrightarrow{IF}; \overrightarrow{DF}\right) &= \begin{vmatrix}\frac{3}{2} & -3 \\ \frac{1}{2} & -1\end{vmatrix} \\
&= \frac{3}{2} \times (-1) - \frac{1}{2} \times (-3) \\
&= 0
\end{aligned}$$

Donc $\overrightarrow{IF}$ et $\overrightarrow{DF}$ sont colinéaires.
Et par conséquent

$$\boxed{I,\ F \text{ et } D \text{ sont alignés.}}$$

EXERCICE 72. Soit $ABCD$ un trapèze tel que $\overrightarrow{CD} = -\frac{1}{3}\overrightarrow{AB}$.

Les points I et J sont les milieux de $[AC]$ et de $[BD]$. On se propose de montrer que $(AB) \parallel (IJ)$.

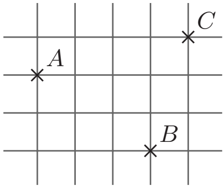
1. Complétez : $\overrightarrow{IJ} = \cdots + \overrightarrow{AB} + \ldots$ et $\overrightarrow{IJ} = \cdots + \overrightarrow{CD} + \ldots$.
2. Déduisez-en : $\overrightarrow{IJ} = \frac{1}{2}\left(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{CD}\right)$.
3. Trouvez k tel que $\overrightarrow{IJ} = k\overrightarrow{AB}$ et concluez.

EXERCICE 73. Démontrer la conservation de l'alignement par translation.

Soient A, B et C trois points alignés. On note A', B' et C' les images respectives de A, B et C par la translation d'un vecteur $\vec{u}$ non nul. Démontrez que A', B' et C' sont alignés.

EXERCICE 74. Homothéties et vecteurs.

1. Cas particulier. Soient trois points A, B et C tels que ci-dessous.



On considère les homothéties h_1 et h_2 de centre A et de raports respectifs $k_1 = 2$ et $k_2 = -3$.

   (a) Reproduisez les points en respectant le quadrillage.

   (b) Construisez les images B_1 et C_1 respectivement des points B et C par l'homothétie h_1.

   (c) Exprimez $\overrightarrow{AB_1}$ en fonction du vecteur $\overrightarrow{AB}$.

   (d) Exprimez $\overrightarrow{AC_1}$ en fonction du vecteur $\overrightarrow{AC}$.

   (e) Reprenez les questions précédentes pour l'homothétoe h_2.

   (f) Pour M un point quelconque on note M_1 et M_2 les images de M respectivement par h_1 et h_2. Exrimez $\overrightarrow{AM_1}$ en fonction de $\overrightarrow{Am}$ puis $\overrightarrow{AM_2}$ en fonction de $\overrightarrow{AM}$.

2. Cas général.

Soit h une homothétie de centre A et rapport $k \neq 0$. Pour tout point M du plan on note M' l'image de M par h. Exprimez $\overrightarrow{AM'}$ en fonction de $\overrightarrow{AM}$.

EXERCICE 75. On considère les points $A(1;1)$, $B(1;4)$, $C(-5{,}1)$ et $D(-2;-1)$. On note E et F les points tels que : $\overrightarrow{AE} = \frac{1}{3}\overrightarrow{BC} - \overrightarrow{BD}$ et $\overrightarrow{DF} = -\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{DC}$.

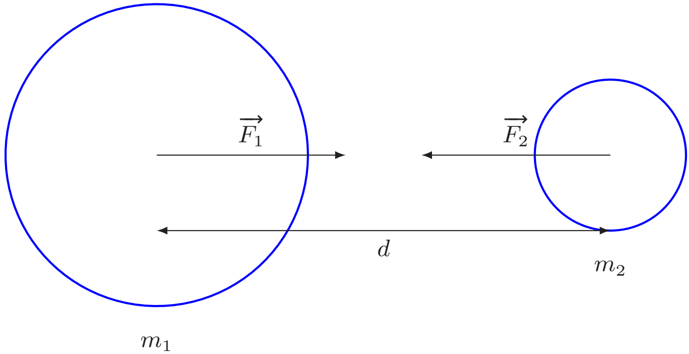
1. Construisez la figure.
2. Calculez les coordonnées de E et F en vérifiant sur la figure.
3. Démontrez que $\overrightarrow{BE} = -\frac{1}{3}\overrightarrow{BC}$ puis déduisez-en la transformation géométrique qui transforme C en E.
4. Montrez que (AF) et (EC) sont parallèles.
5. Montrez que $ABCF$ est un parallélogramme.

EXERCICE 76. Soient, dans un repère du plan, $A(1;2)$, $B(5;2)$ et $C(5;10)$, D l'image de B par l'homothétie de centre A et de rapport 4, et E l'image de C par l'homothétie de centre A et de rapport $\frac{1}{4}$.

1. Exprimez $\overrightarrow{AD}$ en fonction de $\overrightarrow{AB}$, puis $\overrightarrow{AE}$ en fonction de $\overrightarrow{AC}$.
2. Calculez les coordonnées des points D et E.
3. Montrez que $(EB) \parallel (CD)$.

EXERCICE 77. En physique les forces sont modélisées par des vecteurs. L'intensité d'une force, exprimée en newton, est la norme du vecteur force.

1. On sait par l'expérience (loi universelle de la gravitation), que deux objets, éloignés d'une distance d, exprimée en mètre, de masses m_1 et m_2, exprimées en kg, exercent l'un sur l'autre des force d'attraction de même intensité donnée par la formule $F = G \times \frac{m_1 \times m_2}{d^2}$ où G est la constante de gravitation universelle égale à environ $6{,}6742 \times 10^{-11}\ \mathrm{N} \cdot \mathrm{m}^2 \cdot \mathrm{kg}^{-2}$. Ces deux forces sont représentées par des vecteurs, notés $\overrightarrow{F_1}$ et $\overrightarrow{F_2}$, de même direction mais de sens contraires.



   Que pouvez-vous dire des deux vecteurs $\overrightarrow{F_1}$ et $\overrightarrow{F_2}$?

2. On sait que la distance entre le centre de la Terre et le centre de la Lune est d'environ $7{,}35 \times 10^{22}$ kg. Calculez l'intensité des forces d'attraction F entre la Terre et la Lune.

3. Le Soleil à une masse estimée à $1{,}99 \times 10^{30}$ kg et il est situé à environ $1{,}5 \times 10^{11}$ m de la Terre. Montrez que la force d'attraction du Soleil sur la Terre est environ 178 fois plus forte que celle exercée par la Lune sur la Terre.