18 Probabilités.

I Expérience aléatoire.

Une *expérience aléatoire* est une expérience dont le résultat (ou *issue*) ne peut être connu à l'avance.

Parfois les systèmes dynamiques déterministes très sensibles aux conditions initiales ne sont pas prévisibles par des moyens déterministes. Il faut alors utiliser des modélisations probabilistes. On parle de système chaotique et de *théorie du chaos*.

Attracteur de Lorentz.

À l'origine de cette théorie nous retrouvons Henri Poincaré qui découvrit cette problématique en essayant de modéliser les attractions gravitationnelles entre 3 corps ou plus. Sont associés à cette théorie de nombreux mathématiciens, notamment ceux qui ont travaillé sur des équations différentielles (équations dont l'inconnue est une fonction) comme Cauchy ou Lipschitz.

La météorologie est un exemple d'étude de système chaotique et le météorologue Lorentz intitula une de ses conférences d'une expression qui fit florès « Prédictibilité : le battement d'aile d'un papillon au Brésil provoque-t-il une tornade au Texas ? ».

Comme pour toute expérience il faut définir un *dispositif expérimental*. Il s'agit de décrire l'expérience et les conditions dans lesquelles elle est réalisée ainsi que ce qu'il faut observer (issues).

II Généralités sur la modélisation.

1 Loi de probabilité.

Si on recommence un grand nombre (en théorie une infinité) de fois une expérience aléatoire la fréquence d'apparition d'une issue, ω, s'approche d'une valeur fixe qui est appelée *la probabilité de l'issue* et notée $\mathbb{P}(\omega)$.

Les probabilités de toutes les issues forment la *loi de probabilité* ou *distribution de probabilité*.

2 Événement.

L'ensemble des issues d'une expérience aléatoire est appelé *l'univers* et est noté Ω. La fréquence d'apparition de toutes les issues est de 1 donc : $\mathbb{P}(\Omega) = 1$.

Exemples.

Pour un lancer de dé à 6 faces numérotées de 1 à 6, les issues sont les entiers de 1 à 6. On note alors : $\Omega = \{1 ; 2 ; 3 ; 4 ; 5 ; 6\}$

Un événement est un sous-ensemble de *l'univers*.

Exemples.

$\{1 ; 4\}$ est un événement puisque c'est un sous-ensemble de $\{1 ; 2 ; 3 ; 4 ; 5 ; 6\}$.

Un événement A peut être présenté par :
— une propriété A :« Les issues telles que ... »,
— un sous-ensemble : $A = \{\ldots\}$.

Exemples.

L'événement A :« Les issues sont des nombres pairs » peut aussi s'écrire : $A = \{2 ; 4 ; 6\}$.
L'événement $B = \{3 ; 4 ; 5 ; 6\}$ peut être décrit par B :« Les issues sont des nombres strictement supérieurs à 2 ».

Les événements $\varnothing$ et Ω sont respectivement appelés les événements *impossible* et *certain*.

Définition 1

La probabilité d'un événement est la somme des probabilités des issues qu'il contient.

Exercice 1.

On lance un dé pipé.
Le tableau suivant regroupe les probabilités.

F (face)	1	2	3	4	5	6
$\mathbb{P}(F)$	0,1	0,1	0,2	0,2	0,3	?

1. Calculer $\mathbb{P}(6)$.
2. Calculer la probabilité des événements suivants.
   (a) « La face obtenue est paire » ;
   (b) « la face obtenue est supérieure ou égale à 5 ».

Correction de l'exercice 1

1. Calculons $\mathbb{P}(6)$.

   La probabilité de l'univers est 1.

$$\mathbb{P}(\Omega) = 1$$

équivaut successivement à :

$$\mathbb{P}(\{1;2;3;4;5;6\}) = 1$$

la probabilité d'un événement égalant la somme des probabilités des issues qui le réalise :

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(\{1\}) + \mathbb{P}(\{2\}) + \mathbb{P}(\{3\}) + \mathbb{P}(\{4\}) + \mathbb{P}(\{5\}) + \mathbb{P}(\{6\}) &= 1\\ 0,1 + 0,1 + 0,2 + 0,2 + 0,3 + \mathbb{P}(\{6\}) &= 1\end{aligned}$$

Il s'agit d'une équation linéaire :

$$\mathbb{P}(\{6\}) = 1 - 0,9$$

$$\boxed{\mathbb{P}(\{6\}) = 0,1.}$$

2. (a) Notons A : « la face obtenue est paire ».

   Calculons $\mathbb{P}(A)$.

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(A) &= \mathbb{P}(\{2;4;6\})\\ &= \mathbb{P}(\{2\}) + \mathbb{P}(\{4\}) + \mathbb{P}(\{6\})\\ &= 0,1 + 0,2 + 0,1\end{aligned}$$

$$\boxed{\mathbb{P}(A) = 0,4.}$$

3. B : « la face obtenue est supérieure ou égale à 5 ».

   Calculons $\mathbb{P}(B)$.

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(B) &= \mathbb{P}(\{5;6\})\\ &= \mathbb{P}(\{5\}) + \mathbb{P}(\{6\})\\ &= 0,3 + 0,1\end{aligned}$$

$$\boxed{\mathbb{P}(B) = 0,4.}$$

3 Réunion et intersection d'événements.

L'événement $A \cup B$ (obtenu par la réunion des sous-ensembles A et B) contient les issues contenues dans A *ou* dans B.

Exemples.

$A = \{2\ ;\ 4\ ;\ 6\}$ et $B = \{3\ ;\ 4\ ;\ 5\ ;\ 6\}$ donc les issues contenues dans A ou dans B forment le sous-ensemble : $A \cup B = \{2\ ;\ 3\ ;\ 4\ ;\ 5\ ;\ 6\}$.

L'événement $A \cap B$ (obtenu par l'intersection des sous-ensembles A et B) contient les issues contenues dans A *et* dans B (simultanément).

Exemples.

$A = \{2\ ;\ 4\ ;\ 6\}$ et $B = \{3\ ;\ 4\ ;\ 5\ ;\ 6\}$ donc les issues contenues dans A et dans B forment le sous-ensemble : $A \cap B = \{2\ ;\ 3\ ;\ 4\ ;\ 5\ ;\ 6\}$.

Proposition 1

Soient A et B deux événements d'un univers Ω.

$$\mathbb{P}(A \cup B) = \mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(B) - \mathbb{P}(A \cap B).$$

4 Événement contraire.

Étant donné un événement E, *l'événement contraire* de E, noté $\overline{E}$, est formé de toutes les issues qui ne sont pas dans E.

Exemples.

Puisque $B = \{3\ ;\ 4\ ;\ 5\ ;\ 6\}$ et $\Omega = \{1\ ;\ 2\ ;\ 3\ ;\ 4\ ;\ 5\ ;\ 6\}$ il en découle que $\overline{B} = \{1\ ;\ 2\}$

Proposition 2

Soit A un événement d'un univers Ω.

$$\mathbb{P}(\overline{A}) = 1 - \mathbb{P}(A).$$

Exercice 2.

Démontrez que $\mathbb{P}(\varnothing) = 0$.

Correction de l'exercice 2

Nous savons $\mathbb{P}(\Omega) = 1$ donc, d'après la précédente proposition :

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(\varnothing) &= 1 - \mathbb{P}(\overline{\varnothing}) \\ &= 1 - \mathbb{P}(\Omega) \\ &= 1 - 1 \\ &= 0\end{aligned}$$

Des événements A et B sont dits *incompatibles* si et seulement si $A \cap B = \varnothing$. Remarquons que si A et B sont incompatibles alors $\mathbb{P}(A \cup B) = \mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(B)$.

Exemples.

« Obtenir un nombre pair » et « Obtenir un nombre impair » sont des événements incompatibles.

Exercice 3.

Le standard d'un cabinet médical dispose de deux lignes de téléphone. On considère les événements :

- O_1 : « La 1er ligne est occupée ».
- O_2 : « La 2e ligne est occupée ».

Une étude statistique montre que :

- $p(O_1) = 0,4$
- $p(O_2) = 0,3$
- $p(O_1 \cap O_2) = 0,2$

Calculer la probabilité des événements suivants.

1. « La ligne 1 est libre ».
2. « Au moins une des lignes est occupée ».
3. « Au moins une des lignes est libre ».

Correction de l'exercice 3

1. Il s'agit ici d'interpréter les événements proposés avec ceux donnés dans l'énoncé.

   Calculons $\mathbb{P}(\overline{O_1})$.

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(\overline{O_1}) &= 1 - \mathbb{P}(O_1) \\ &= 1 - 0,4\end{aligned}$$

$$\boxed{\mathbb{P}(\overline{O_1}) = 0,6.}$$

2. L'expression « Au moins l'une » peut s'exprimer en utilsant la conjonction « ou » et par conséquent par l'union.

   Calculons $\mathbb{P}(O_1 \cup O_2)$.

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(O_1 \cup O_2) &= \mathbb{P}(O_1) + \mathbb{P}(O_2) - \mathbb{P}(O_1 \cap O_2)\\ &= 0,4 + 0,3 - 0,2\end{aligned}$$

$$\boxed{\mathbb{P}(O_1 \cup O_2) = 0,5.}$$

3. Cette question est nettement moins facile. En réfléchissant comme à la question précédente :

   Calculons $\mathbb{P}(\overline{O_1} \cup \overline{O_2})$.

$$\mathbb{P}(\overline{O_1} \cup \overline{O_2}) = \mathbb{P}(\overline{O_1}) + \mathbb{P}(\overline{O_2}) - \mathbb{P}(\overline{O_1} \cap \overline{O_2})$$

   $\overline{O_1} \cap \overline{O_2}$ signifie « la première ligne est libre et la seconde aussi ». Nous n'avons pas la possibilité de calculer directement la porbabilité de cet événement. L'événement contraire peut s'exprimer par : « la première ligne est occupée ou la seconde est occupée », autrement dit « au moins une des deux lignes est occupée ». Donc :

$$\begin{aligned}&= 1 - \mathbb{P}(O_1) + 1 - \mathbb{P}(O_2) - \mathbb{P}(\overline{O_1 \cup O_2})\\ &= 1 - 0,4 + 1 - 0,3 - [1 - \mathbb{P}(O_1 \cup O_2)]\\ &= 1,3 - [1 - 0,5]\end{aligned}$$

$$\boxed{\mathbb{P}(\overline{O_1} \cup \overline{O_2}) = 0,8.}$$

La dernière question de l'exercice introduit et correspond aux lois de De Morgan :

$$\overline{A \cap B} = \overline{A} \cup \overline{B} \quad \text{et} \quad \overline{A \cup B} = \overline{A} \cap \overline{B}.$$

5 Exercices.

Exercice 4.

On dispose d'un dodécaèdre régulier à 12 faces dont les faces sont numérotées de 1 à 12. Lorsqu'on le lance il retombe sur une des faces dont on note le numéro. On note A l'événement « obtenir un numéro pair » et B l'événement « obtenir un multiple de 3 ». pour chacun des événements suivants listez les issues qui les constituent.

a) A. b) B. c) $\overline{B}$.

d) $A \cap B$. e) $A \cup B$. f) $\overline{A} \cup B$.

Exercice 5.

Une entreprise fabrique des pièces de carrosserie automobile. Ces pièces peuvent présenter deux sortes de défauts : défaut d'usinage ou défaut de peinture. On note A l'événement « la pièce a un défaut d'usinage » et B l'événement « la pièce à un défaut de peinture ». À la sortie de la fabrication, on choisit une pièce au hasard.

1. Pour chacun des événements suivant dites s'il correspond à $A \cup B$, $A \cap B$, $\overline{A} \cup \overline{B}$ ou $\overline{A} \cap \overline{B}$.
   - E : « la pièce a deux défauts ».
   - F : « la pièce a au moins un des deux défauts ».
   - G : « la pièce n'a aucun défaut ».
   - H : « la pièce a au plus un défaut ».
2. Parmi les événements E, G et H, lequel est l'événement contraire de F ?
3. Parmi les événements F, G et H lequel est l'événement contraire de E ?

III La loi uniforme discrète.

La loi d'une expérience aléatoire est appelée *l'équiprobabilité* (ou *loi discrète uniforme*) si la distribution de probabilité entre les issues est équitable. Autrement dit toutes les issues ont la même probabilité.

Proposition 3

S'il y a équiprobabilité et que l'univers Ω comporte $n \in \mathbb{N}^*$ issues, alors la probabilité de l'une quelconque des issues est

$$\frac{1}{n}.$$

Exercice 6.

Un jeu consiste à lancer un dé parfaitement équilibré dont les 6 faces sont numérotées de 1 à 6.

1. Quel est l'univers de l'expérience ?
2. Calculez la probabilité d'obtenir 3.
3. Calculez la probabilité de l'événement $B = \{3\ ;\ 4\ ;\ 5\ ;\ 6\}$.
4. Calculez la probabilité de l'événement A :« Les issues sont des nombres pairs ».
5. Décrivez par un ensemble l'événement $A \cap B$ et déduisez en sa probabilité.
6. Déduisez des trois questions précédentes la probabilité de $A \cup B$.
7. Calculez la probabilité de $\overline{A}$.

Correction de l'exercice 6

1. Rechercher ce que sont les issues. Qu'observe-t-on à l'issue de l'expérience ? Qu'est-ce qui correspond à une situation d'équiprobabilité ? Puis recensement de toutes les issues.

   Une issue est un entier entre 1 et 6 donc :

   $$\boxed{\Omega = \{1\ ;\ 2\ ;\ 3\ ;\ 4\ ;\ 5\ ;\ 6\}.}$$

2. Recherche dans le dispositif expérimental des indicateurs concernant une éventuelle équiprobabilité : « parfaitement équilibré ».

   L'expérience est régie par loi d'équiprobabilité puisque le dé est parfaitement équilibré et l'univers contient 6 issues donc la probabilité d'une issue est :

   $$\boxed{\mathbb{P}(\{3\}) = \tfrac{1}{6}.}$$

3. Déterminons $\mathbb{P}(B)$.

   La rédaction qui suit n'est pas celle que nous utiliserons habituellement.

   Par définition de la probabilité d'un événement et puisque $B = \{4;\ 4;\ 5;\ 6\}$:

   $$\mathbb{P}(B) = \mathbb{P}(\{3\}) + \mathbb{P}(\{4\}) + \mathbb{P}(\{5\}) + \mathbb{P}(\{6\})$$

   Il y a équiprobabilité et l'univers comporte 6 issues donc

   $$\begin{aligned}\mathbb{P}(B) &= \frac{1}{6} + \frac{1}{6} + \frac{1}{6} + \frac{1}{6}\\ &= 4 \times \frac{1}{6}\\ &= \frac{2}{3}\end{aligned}$$

Ainsi $\mathbb{P}(B) = \frac{2}{3}$.

Nous retiendrons le résultat suivant que nous utiliserons souvent dans les exercices

Corollaire 1

S'il y a équiprobabilité et que l'univers comporte $n \in \mathbb{N}^*$ issues alors la probabilité d'un événement A réalisé par k issues (donc $k \leq n$) est

$$P(A) = \frac{k}{n}$$

4. Calculons $P(A)$.

   L'événement nous est présenté par une propriété il faut le traduire par un sous-ensemble de l'univers.

   $A = \{2\ ;\ 4\ ;\ 6\}$.

   — Il y a équiprobabilité.
   — L'univers comporte 6 issues.
   — A est réalisé par 3 issues.

   Donc :

   $P(A) = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}$

5. Calculons $P(A \cap B)$.

   — Il y a équiprobabilité.
   — L'univers comporte 6 issues.
   — $A \cap B$ est formé des issues qui réalisent à la fois A et B. Il faut donc trouver les éléments communs aux deux ensembles.
   $A \cap B = \{4\ ;\ 6\}$ donc $A \cap B$ est réalisé par 2 issues.

   donc :

   $P(A \cap B) = \frac{2}{6} = \frac{1}{3}$

6. Calculons $P(A \cup B)$.

   $A \cup B$ est formé des issues qui réalisent A ou B (au moins l'un des deux). Il faut donc trouver les éléments des deux ensembles.

   $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B) = \frac{1}{2} + \frac{2}{3} - \frac{1}{3} = \frac{5}{6}$

   $P(A \cup B) = \frac{5}{6}$.

7. Calculons $P(\overline{A})$.

$P(\overline{A}) = 1 - P(A) = 1 - \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$

$$\boxed{P(\overline{A}) = \frac{1}{2}}$$

Exercice 7.

Un jeu consiste a lancer deux dés cubiques parfaitement équilibrés numérotés de 1 à 6.

1. Donnez sous forme d'un tableau l'univers associé à cette expérience.
2. Calculez la probabilité d'obtenir 6 sur les deux dés.
3. On note A : « La somme des nombres obtenus égale 3 ». Calculez la probabilité de l'événement A.
4. On note B : « le produit des nombres obtenus égale 6 ». Calculez la probabilité de l'événement B.
5. On note C : « le produit des nombres obtenus égale 7 ». Calculez la probabilité de l'événement C.
6. On note D : « la somme des nombres obtenus est strictement supérieure à 3 ». Calculez la probabilité de l'événement D.

Correction de l'exercice 7

1. Lorsque les résultats d'une expérience aléatoire comme ici sont formés de deux données (un nombre pour chaque dé) il est souvent intéressant de représenter l'expérience par un tableau double-entrée comme ci-dessous.

   Cependant les arbres probabilistes peuvent aussi être utilisés et permettent de représenter davantage de situations que le tableau double-entrée.

	1	2	3	4	5	6
1	$(1;1)$	$(1;2)$	$(1;3)$	$(1;4)$	$(1;5)$	$(1;6)$
2	$(2;1)$	$(2;2)$	$(2;3)$	$(2;4)$	$(2;5)$	$(2;6)$
3	$(3;1)$	$(3;2)$	$(3;3)$	$(3;4)$	$(3;5)$	$(3;6)$
4	$(4;1)$	$(4;2)$	$(4;3)$	$(4;4)$	$(4;5)$	$(4;6)$
5	$(5;1)$	$(5;2)$	$(5;3)$	$(5;4)$	$(5;5)$	$(5;6)$
6	$(6;1)$	$(6;2)$	$(6;3)$	$(6;4)$	$(6;5)$	$(6;6)$

   Ainsi l'univers est formé de 36 couples correspondant aux résultats obtenus sur les deux dés.

2. L'événement dont il est questio n'ayant pas de nom nous allon lui en donné un. Notons E : « obtenir 6 sur les deux dés ».

   Calculons $\mathbb{P}(E)$.

   $E = \{(6;6)\}$.

Il y a équiprobabilité, l'univers comporte 36 issues et E est réalisé par une issue donc

$$P(E) = \frac{1}{36}.$$

3. Déterminons les sommes associées à chaque issue sous forme d'un tableau.

	1	2	3	4	5	6
1	2	3	4	5	6	7
2	3	4	5	6	7	8
3	4	5	6	7	8	9
4	5	6	7	8	9	10
5	6	7	8	9	10	11
6	7	8	9	10	11	12

Calculons $\mathbb{P}(A)$.

$A = \{(1;2),(2;1)\}$.
Il y a équiprobabilité, l'univers comporte 36 issues et A est réalisé par 2 issues donc $\mathbb{P}(A) = \frac{2}{36}$.

$$\mathbb{P}(A) = \frac{1}{18}.$$

Pour cette question nous arions pu choisir une modélisation alternative.
En choisissant comme issue la somme des nombres sur les deux faces nous obtenons comme univers : $\Omega = \{2;3;4;\ldots;11;12\}$. Et la loi de probabilité correspondante est alors :

Issues	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
Proba	$\frac{1}{36}$	$\frac{2}{36}$	$\frac{3}{36}$	$\frac{4}{36}$	$\frac{5}{36}$	$\frac{6}{36}$	$\frac{5}{36}$	$\frac{4}{36}$	$\frac{3}{36}$	$\frac{2}{36}$	$\frac{1}{36}$

Remarquons tout de même que pour faire cette modélisation nous avons en fait utilisé de façon implicite l'équiprobabilité de la précédente modélisation.

4. Déterminons les sommes associées à chaque issue sous forme d'un tableau.

	1	2	3	4	5	6
1	1	2	3	4	5	6
2	2	4	6	8	10	12
3	3	6	9	12	15	18
4	4	8	12	16	20	24
5	5	10	15	20	25	30
6	6	12	18	24	30	36

Calculons $\mathbb{P}(B)$.

$B = \{(1;6),(2;3),(3;2),(6;1)\}$.

Il y a équiprobabilité, l'univers comporte 36 issues et B est réalisé par 4 issues donc $\mathbb{P}(B) = \frac{4}{36}$.

$$\boxed{\mathbb{P}(B) = \frac{1}{9}.}$$

5. Calculons $\mathbb{P}(C)$.

   $C = \varnothing$.
   Peu importe la loi de probabilité dans ce cas puisqu'il s'agit d'un événement impossible :

   $$\boxed{\mathbb{P}(C) = 0.}$$

6. Calculons $\mathbb{P}(D)$.

   L'événement D rassemblant de nombreuses issues nous préférerons (mais ce n'est pas une obligation) considérer un événement contraire.

   $\overline{D}$: « la somme est inférieure (ou égale) à 3 » donc : $\overline{D} = \{(1;1)\}$.
   Il y a équiprobabilité, l'univers comporte 36 issues et $\overline{D}$ est réalisé par 1 issues donc $\mathbb{P}\left(\overline{D}\right) = \frac{1}{36}$.
   Donc : $\mathbb{P}(D) = 1 - \mathbb{P}\left(\overline{D}\right) = 1 - \frac{1}{36}$.

   $$\boxed{\mathbb{P}(D) = \frac{35}{36}.}$$

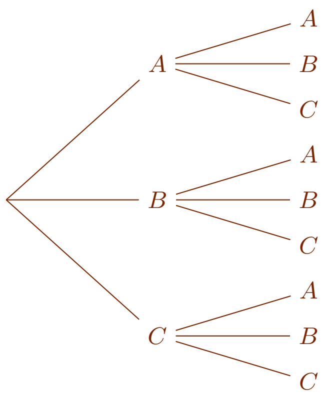
Exercice 8.

Un square est équipé de trois bancs. Deux personnes arrivent successivement et s'installent au hasard. L'objet de l'exercice est de déterminer la probabilité que ces personnes soient assises côte à côte.
Les trois bancs sont notés A, B et C.

1. Représentez la situation par un arbre.
2. Calculez la probabilité que les deux personnes s'assoient sur le banc A.
3. Calculez la probabilité que les deux personnes s'assoient côte à côte.

Correction de l'exercice 8

1.



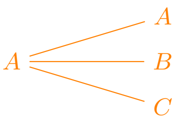
Ainsi $\Omega = \{AA; AB; AC; BA; BB; BC; CA; CB; CC\}$.

Un peu de vocabulaire sur les arbres.

— Les lettres sont appelés des *nœuds* : ici A, B et C sont des nœuds. Le premier nœud n'est pas désigné par une lettre et est appelé la racine de l'arbre.

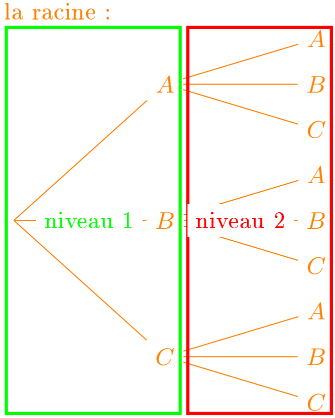
— Les segments qui relient deux nœuds sont appelés des *branches* : A ———— B est une branche.

— Un embranchement est formé d'un nœud et des branches qui en partent :

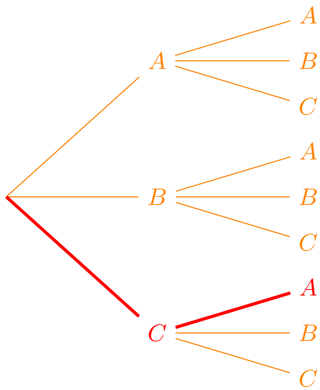


est un embranchement.

— Un *niveau* est formé de tous les embranchements qui sont également éloignés de la racine :



— Un *chemin* est formé d'une succession de nœuds et de branches qui partent de la racine pour aboutir à une feuille de l'arbre. En rouge ci-dessous est indiqué un chemin :



Dans un arbre probabiliste ce sont les chemins et non les nœuds qui représentent les issues. Dans cet arbre il y a 9 chemins qui correspondent à autant d'issues. Les issues sont souvent désignés par la succession (dans l'ordre) des nœuds : CA est le chemin passant d'abord par C puis par A.

2. Notons E_1 : « Les deux personnes s'assoient sur le banc A. »

   Calculons $\mathbb{P}(E_1)$.

   $E_1 = \{AA\}$
   Il y a équiprobabilité, E_1 est réalisé par 1 issue et l'univers comporte 9 issues, donc

   $$\boxed{P(E_1) = \frac{1}{9}.}$$

3. Notons E_2 : « Les deux personnes s'assoient sur le même banc. »

   Calculons $\mathbb{P}(E_2)$.

   $E_2 = \{AA; BB; CC\}$
   Il y a équiprobabilité, E_2 est réalisé par 3 issues et l'univers comporte 9 issues, donc

   $$\boxed{P(E_2) = \frac{3}{9} = \frac{1}{3}.}$$

IV Exercices.

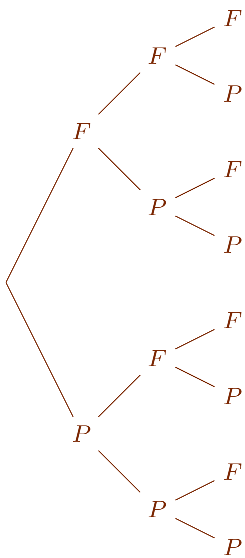
Exercice 9.

On lance 3 fois une pièce bien équilibrée.

1. Représentez la situation par un arbre.
2. Quelle est la probabilité :
   (a) d'avoir 3 faces ?
   (b) que le deuxième jet soit face ?
   (c) que le troisième jet soit différent du premier ?

Correction de l'exercice 9

1.



Une issue de cette expérience est ici formée d'un triplet de résultats de pile ou face. Par exemple PFP est l'issue obtenir d'abord pile, puis face et enfin pile.

2. (a) Calculons $\mathbb{P}(FFF)$.

   Il y a équiprobabilité et l'univers comporte 8 issues donc :

   $$\boxed{\mathbb{P}(FFF) = \frac{1}{8}.}$$

   (b) Notons A : « le deuxième jet est face ».

   Calculons $\mathbb{P}(A)$.

   $A = \{FFF,\ FFP,\ PFF,\ PFP\}$.

Il y a équiprobabilité, A est réalisé par 4 issues et l'univers contient 8 issues donc $\mathbb{P}(A) = \frac{4}{8}$.

$$\boxed{\mathbb{P}(A) = \frac{1}{2}.}$$

(c) Notons B : « le troisième jet est différent du premier ».

Calculons $\mathbb{P}(B)$.

$B = \{FFP,\ FPP,\ PFF,\ PPF\}$.
Il y a équiprobabilité, B est réalisé par 4 issues et l'univers contient 8 issues donc $\mathbb{P}(A) = \frac{4}{8}$.

$$\boxed{\mathbb{P}(B) = \frac{1}{2}.}$$

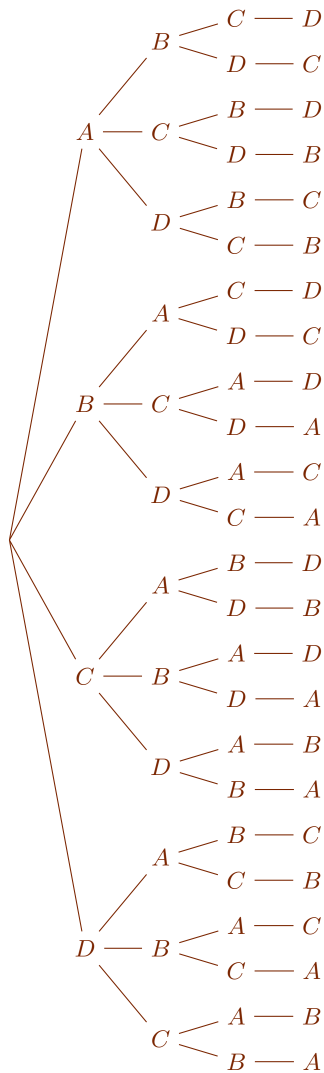
Exercice 10.

Un examinateur doit interroger, dans un certain ordre, quatre candidats : Arthur, Béatrice, Chloé et David. Il doit établir une liste ordonnée de quatre noms.

1. À l'aide d'un arbre, déterminez le nombre de listes possibles.
2. L'examinateur tire la liste des quatre noms au hasard, chaque liste possible, ayant la même probabilité.
   Déterminez la probabilité de chacun des événements suivants :
   - E :« Béatrice est interrogée en premier ».
   - F :« Chloé est interrogée en dernier ».
   - G :« David est interrogé avant Béatrice ».
3. Définir par une phrase l'événement $E \cap F$ et en donner la probabilité.
4. Définir par une phrase l'événement $E \cup F$ et en donner la probabilité.

Correction de l'exercice 10

1. L'arbre est particulièrement recommandé pour représenter une situation ou des choix successifs sont fait : chaque niveau de l'arbre correspond un choix. Ainsi les niveaux de l'arbre représentent une chronologie.



L'univers contient 24 issues.

Rappelons qu'une issue correspond à un chemin sur l'arbre donc ici une issue peut être représentée par une succession de 4 lettres.

2. Calculons $P(E)$.

$E = \{BACD; BADC; BCAD; BCDA; BDAC; BDCA\}$.

Il y a équiprobabilité, E est réalisé par 6 issues, l'univers contient 24issues, donc

$$P(E) = \frac{6}{24} = \frac{1}{4}.$$

Calculons $P(F)$.

$F = \{ABDC; ADBC; BADC; BDAC; DABC; DBAC\}$.
Il y a équiprobabilité, F est réalisé par 6 issues, l'univers contient 24 issues, donc

$$P(F) = \frac{6}{24} = \frac{1}{4}.$$

Calculons $P(G)$.

$G = \{ACDB; ADBC; ADCB; CADB; CDAB; CDBA; DABC;$
$DACB; DBAC; DBCA; DCAB; DCBA\}$.
Il y a équiprobabilité, G est réalisé par 12 issues, l'univers contient 24 issues, donc

$$P(G) = \frac{12}{24} = \frac{1}{2}.$$

Exercice 11.

Au restaurant scolaire, les élèves ont le choix

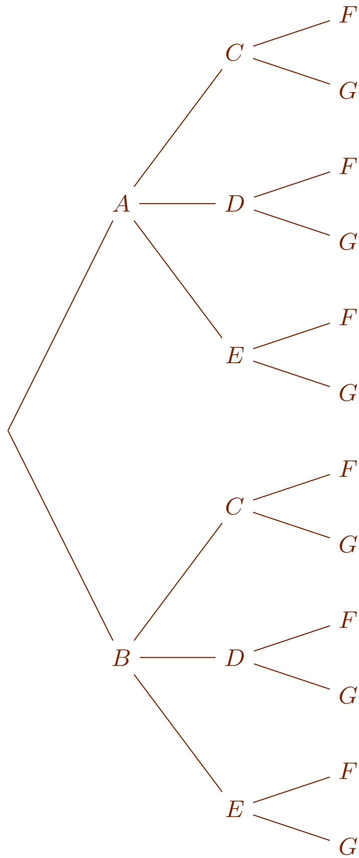
- entre 2 entrées : Artichaut ou Betterave ;
- entre 3 plats : Cheval, Daube ou Escalope ;
- entre 2 desserts : Fromage ou Gâteau.

Un menu se compose :
- d'une entrée ;
- d'un plat ;
- d'un dessert.

1. En utilisant un arbre, représenter tous les menus.
2. Combien de menus différents sont possibles ?
3. On choisit un menu au hasard.
   Quelle est la probabilité :
   (a) qu'il comporte une escalope ?
   (b) qu'il comporte de l'artichaut et du fromage ?
   (c) qu'il ne comporte pas de cheval ?

Correction de l'exercice 11

1. En utilisant des notations transparentes au vu de l'énoncé :



L'univers comporte donc 12 issues. Par exemple BDF est une issue.

2. D'après l'arbre

$$\boxed{\text{12 menus sont possibles.}}$$

3. (a) Notons M_1 : « le menu comporte une escalope ».

Calculons $\mathbb{P}(M_1)$.

$M_1 = \{AEF, AEG, BEF, BEG\}$
Or il y a équiprobabilité, l'univers comporte 12 issues et M_1 est réalisé par 4 issues donc : $\mathbb{P}(M_1) = \frac{4}{12}$.

$$\boxed{\mathbb{P}(M_1) = \frac{1}{3}.}$$

(b) Notons M_2 : « le menu comporte de l'artichaut et du fromage ».

Calculons $\mathbb{P}(M_2)$.

$M_2 = \{ACF, ADF, AEF\}$
Or il y a équiprobabilité, l'univers comporte 12 issues et M_2 est réalisé par 3 issues donc : $\mathbb{P}(M_2) = \frac{3}{12}$.

$$\boxed{\mathbb{P}(M_2) = \frac{1}{4}.}$$

(c) Notons M_3 : « le menu ne comporte pas de cheval ».

Calculons $\mathbb{P}(M_3)$.

$\overline{M_3} = \{ACF, ACG, BCF, BCG\}$
Or il y a équiprobabilité, l'univers comporte 12 issues et $\overline{M_3}$ est réalisé par 4 issues donc : $\mathbb{P}(\overline{M_3}) = \frac{4}{12}$.
Nous en déduisons :

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(M_3) &= 1 - \mathbb{P}(\overline{M_3}) \\ &= 1 - \frac{4}{12} \\ &= \frac{8}{12}\end{aligned}$$

$$\boxed{\mathbb{P}(M_3) = \frac{2}{3}.}$$

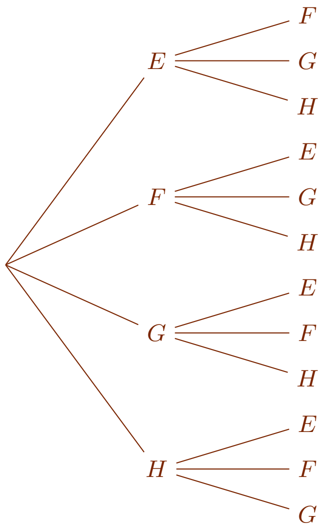
Exercice 12.

Un groupe de 4 amis, Émile, Flore, Gaston et Hélène sont dans un bateau. Ils tirent au sort celui qui va ramer et, parmi les noms restants, celui qui va écoper.

1. Représenter cette situation par un arbre.
2. Déterminer les probabilités suivantes.
   (a) C'est un garçon qui rame.
   (b) Hélène écope.
   (c) Les deux qui travaillent sont de même sexe.

Correction de l'exercice 12

1.



2. (a) Notons R_1 : « un garçon rame ».

   Calculons $\mathbb{P}(R_1)$.

   $R_1 = \{EF, EG, EH, GE, GF, GH\}$
   Or il y a équiprobabilité, l'univers comporte 12 issues et R_1 est réalisé par 6 issues donc : $\mathbb{P}(R_1) = \frac{6}{12}$.

   $$\boxed{\mathbb{P}(R_1) = \tfrac{1}{2}.}$$

   (b) Notons R_2 : « Hélène écope ».

   Calculons $\mathbb{P}(R_2)$.

   $R_2 = \{HE, HF, HG\}$
   Or il y a équiprobabilité, l'univers comporte 12 issues et R_2 est réalisé par 3 issues donc : $\mathbb{P}(R_2) = \frac{3}{12}$.

   $$\boxed{\mathbb{P}(R_2) = \tfrac{1}{4}.}$$

   (c) Notons R_3 : « les deux qui travaillent sont de même sexe ».

   Calculons $\mathbb{P}(R_3)$.

   $R_3 = \{EG, H, GE, HF\}$
   Or il y a équiprobabilité, l'univers comporte 12 issues et R_3 est réalisé par 4 issues donc : $\mathbb{P}(R_4) = \frac{4}{12}$.

$$\mathbb{P}(R_3) = \frac{1}{3}.$$

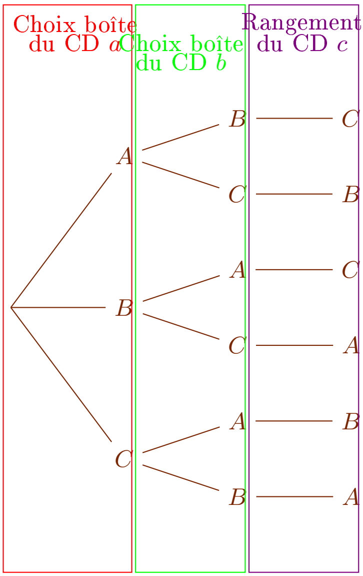
Exercice 13.

Trois CD notés a, b et c ont respectivement des boîtes nommées A, B et C.
On range les 3 CD au hasard dans les boîtes sans voir leur étiquette.

1. Combien de rangements sont possibles ?
2. Quelle est la probabilité
   (a) que les 3 CD soient bien rangés ?
   (b) qu'exactement 1 CD soit bien rangé ?
   (c) qu'exactement 2 CD soient bien rangés ?
3. En déduire la probabilité qu'aucun CD ne soit bien rangé.

Correction de l'exercice 13

1.



2. (a) Notons E_1 : « les trois CD sont bien rangés ».

   Calculons $\mathbb{P}(E_1)$.

   $E_1 = \{ABC\}$.

La loi de probabilité est l'équiprobabilité, l'univers comporte 6 issues et E_1 est réalisé par une issue donc :

$$\boxed{\mathbb{P}(E_1) = \tfrac{1}{6}.}$$

(b) Notons E_2 : « exactement un CD est bien rangé ».

Calculons $\mathbb{P}(E_2)$.

$E_2 = \{ACB, BAC, CBA\}$.
La loi de probabilité est l'équiprobabilité, l'univers comporte 6 issues et E_2 est réalisé par 3 issues donc : $\mathbb{P}(E_2) = \frac{3}{6}$.

$$\boxed{\mathbb{P}(E_2) = \tfrac{1}{2}.}$$

(c) Notons E_3 : « exactement deux CD sont bien rangés ».

Calculons $\mathbb{P}(E_3)$.

$E_3 = \varnothing$.

$$\boxed{\mathbb{P}(E_3) = 0.}$$

3. Notons E_4 : « aucun CD n'est bien rangé ».

Calculons $\mathbb{P}(E_4)$.

$\overline{E_4} = E1 \cup E_2 \cup E_3$
Comme E_1, E_2 et E_3 sont incompatibles (disjoints) deux à deux :

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(\overline{E_4}) &= \mathbb{P}(E_1) + \mathbb{P}(E_2) + \mathbb{P}(E_3)\\ &= \frac{1}{6} + \frac{1}{2} + 0\\ &= \frac{2}{3}\end{aligned}$$

Donc :

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(E_4) &= 1 - \mathbb{P}(\overline{E_4})\\ &= 1 - \frac{2}{3}\end{aligned}$$

$$\boxed{\mathbb{P}(E_4) = \tfrac{1}{3}.}$$

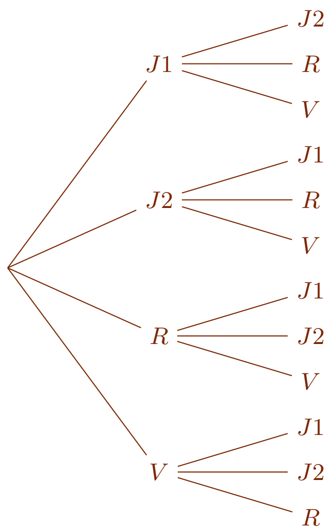
Exercice 14.

Une urne contient 4 jetons : deux jaunes, un rose et un violet.
On tire au hasard un jeton de l'urne puis un second sans remettre le premier.
On suppose que tous les tirages sont équiprobables.

1. Représenter cette situation par un arbre.
2. Combien y-a-t-il de tirages possibles ?
3. On considère les événements :
   — R : « Le 1$^{\text{er}}$ jeton tiré est rose » ;
   — J : « Le 2$^{\text{e}}$ jeton tiré est jaune ».
   (a) Déterminer $\mathbb{P}(R)$ et $\mathbb{P}(J)$.
   (b) Traduire par une phrase $R \cap J$.
   Calculer $\mathbb{P}(R \cap J)$.
   (c) Calculer $\mathbb{P}(R \cup J)$.
4. On considère l'événement :
   — N :« Aucun jeton tiré n'est jaune ».
   (a) Calculer $\mathbb{P}(N)$.
   (b) Exprimer $\overline{N}$ par une phrase.
   (c) Calculer $\mathbb{P}\left(\overline{N}\right)$.

Correction de l'exercice 14

1. La modélisation la plus simple (car utilisant l'équiprobabilité) nécessite de distinguer les deux jetons jaunes : $J1$ et $J2$.



2. D'après l'arbre précédent : $\#(\Omega) = 12$.

Il y a 12 tirages possibles.

3. (a) Calculons $\mathbb{P}(\tilde{R})$.

$\tilde{R} = \{RJ1, RJ2, RV\}$.
Il y a équiprobabilité, $\tilde{R}$ est réalisé par 3 issues et l'univers contient 12 issues donc : $\mathbb{P}(\tilde{R}) = \frac{3}{12}$.

$\mathbb{P}(\tilde{R}) = \frac{1}{4}$.

Calculons $\mathbb{P}(\tilde{J})$.

$\tilde{J} = \{J1J2, J2J1, RJ1, RJ2, VJ1, VJ2\}$.
Il y a équiprobabilité, $\tilde{J}$ est réalisé par 6 issues et l'univers contient 12 issues donc : $\mathbb{P}(\tilde{J}) = \frac{6}{12}$.

$\mathbb{P}(\tilde{J}) = \frac{1}{2}$.

(b)

$\tilde{R} \cap \tilde{J}$: « le premier jeton est rose et le second est jaune ».

Calculons $\mathbb{P}(\tilde{R} \cap \tilde{J})$.

$\tilde{R} \cap \tilde{J} = \{RJ1, RJ2\}$.
Il y a équiprobabilité, $\tilde{R} \cap \tilde{J}$ est réalisé par 2 issues et l'univers contient 12 issues donc : $\mathbb{P}(\tilde{R} \cap \tilde{J}) = \frac{2}{12}$.

$$\boxed{\mathbb{P}(\tilde{R} \cap \tilde{J}) = \tfrac{1}{6}.}$$

(c) Calculons $\mathbb{P}(\tilde{R} \cup \tilde{J})$.

Ici peu importe la loi de probabilité nous allons utiliser une formule qui fonctionne pour toutes les lois de probabilités.

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(\tilde{R} \cup \tilde{J}) &= \mathbb{P}(\tilde{R}) + \mathbb{P}(\tilde{J}) - \mathbb{P}(\tilde{R} \cap \tilde{J})\\ &= \frac{1}{4} + \frac{1}{2} - \frac{1}{6}\end{aligned}$$

$$\boxed{\mathbb{P}(\tilde{R} \cup \tilde{J}) = \tfrac{7}{12}.}$$

4. (a) Calculons $\mathbb{P}(N)$.

$N = \{VR, RV\}$.
Il y a équiprobabilité, N est réalisé par 2 issues et l'univers contient 12 issues donc : $\mathbb{P}(N) = \frac{2}{12}$.

$$\boxed{\mathbb{P}(N) = \tfrac{1}{6}.}$$

(b)

$$\boxed{\overline{N} : \text{« au moins un jeton est jaune ».}}$$

(c) Calculons $\mathbb{P}(N)$.

Ici peu importe la loi de probabilité nous allons utiliser une formule qui fonctionne pour toutes les lois de probabilités.

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(N) &= 1 - \mathbb{P}(\overline{N})\\ &= 1 - \frac{1}{6}\end{aligned}$$

$$\boxed{\mathbb{P}(N) = \tfrac{5}{6}.}$$

Exercice 15.

Dans une classe de seconde, on a représenté dans le tableau suivant les langues vivantes étudiées en première langue par les 35 élèves. (On suppose que chaque élève étudie une seule première langue.)

	Anglais	Allemand	Espagnol
Garçons	8	3	4
Filles	10	4	6

On interroge au hasard un élève de cette classe. On s'intéresse aux événements suivants :

- F : « l'élève interrogé est une fille ».
- E : « l'élève interrogé étudie l'espagnol comme première langue ».

Calculez la probabilité de chacun des événements suivants : $E \cap F$, $E \cup F$, $\overline{E} \cap \overline{F}$ et $E \cup \overline{F}$.

Correction de l'exercice 15

Choisir un élève parmi les 35 est une expérience aléatoire nous modélisons cette expérience par un univers de 35 issues muni de l'équiprobabilité (chaque élève a autant d'être choisi qu'un autre).

Remarquons que, comme tout modélisation, le choix de l'équiprobabilité est arbitraire.

1. Calculons $\mathbb{P}(E \cap F)$.

   Il y a équiprobabilité, d'après le tableau de données croisées $E \cap F$ est réalisé par 6 issues et l'univers comporte 35 issues donc

   $$\boxed{\mathbb{P}(E \cap F) = \tfrac{6}{35}.}$$

2. Calculons $\mathbb{P}(E \cup F)$.

   Il y a équiprobabilité, d'après le tableau de données croisées $E \cup F$ est réalisé par $10 + 4 + 6 + 4 = 24$ issues et l'univers comporte 35 issues donc

   $$\boxed{\mathbb{P}(E \cup F) = \tfrac{24}{35}.}$$

3. Calculons $\mathbb{P}(\overline{E} \cup \overline{F})$.

   Il y a équiprobabilité, d'après le tableau de données croisées $\overline{E} \cap \overline{F}$ est réalisé par $8 + 3 = 11$ issues et l'univers comporte 35 issues donc

   $$\boxed{\mathbb{P}(\overline{E} \cup \overline{F}) = \tfrac{11}{35}.}$$

4. Calculons $\mathbb{P}(E \cup \overline{F})$.

   Il y a équiprobabilité, d'après le tableau de données croisées $E \cup \overline{F}$ est réalisé par $8+3+4+6=21$ issues et l'univers comporte 35 issues donc

   $$\boxed{\mathbb{P}(E \cup \overline{F}) = \frac{21}{35}.}$$

Exercice 16.

Un car scolaire se dirige vers Saint Jacques de Compostelle en passant par Conques avec à son bord 75 élèves dont 40 garçons.
Miguel, le chauffeur, fait un sondage auprès des élèves pour savoir qui aime les chants grégoriens. Il découvre alors que 32 élèves ne les aiment pas, dont la moitié sont des filles, et que 20 % des garçons les aiment, et que 18 filles n'en ont jamais entendu parler.

1. Recopie et complète le tableau ci-dessous.

	Aime	N'aime pas	Ne connaît pas	Total
Garçons				
Filles				
Total				

2. On tire au hasard la fiche d'un élève.
   Quelle est la probabilité que :
   (a) ce soit un garçon ;
   (b) ce soit un garçon qui aime les chants grégoriens ;
   (c) ce soit un garçon ou un élève qui aime les chants grégoriens ;
3. On tire au hasard la fiche d'un garçon.
   Quelle est la probabilité qu'il aime les chants grégoriens ?

Correction de l'exercice 16

Illustre bien le fait que sur un univers fini muni de l'équiprobabilité probabilité et proportions se confondent.

1.

	Aime	N'aime pas	Ne connaît pas	Total
Garçons	8	16	16	40
Filles	1	16	18	35
Total	9	32	34	75

2. Nous choisissons l'équiprobabilité sur un univers de 75 issues pour modéliser l'expérience aléatoire.

(a) Notons G : « la fiche est celle d'un garçon ».

Calculons $\mathbb{P}(G)$.

Il y a équiprobabilité, G est réalisé par 40 issues et l'univers contient 75 issues donc : $\mathbb{P}(G) = \frac{40}{75}$.

$$\boxed{\mathbb{P}(G) = \frac{8}{15}.}$$

(b) Notons H : « la fiche est celle d'un garçon qui aime les chants grégoriens ».

Calculons $\mathbb{P}(H)$.

Il y a équiprobabilité, H est réalisé par 8 issues et l'univers contient 75 issues donc :

$$\boxed{\mathbb{P}(G) = \frac{8}{75}.}$$

(c) Notons L : « la fiche est celle d'un garçon ou un élève qui aime le chant grégorien ».

Calculons $\mathbb{P}(L)$.

Il y a équiprobabilité, L est réalisé par $8 + 16 + 16 + 1 = 41$ issues et l'univers contient 75 issues donc :

$$\boxed{\mathbb{P}(G) = \frac{41}{75}.}$$

3. Puisque la fiche est tirée parmi celle des garçons l'univers est modifié. Choisissons une modélisation adaptée.
Choisissons la loi de probabilité uniforme sur un univers de 40 issues.

Notons M : « la fiche est celle d'un garçon qui aime le chant grégorien ».

Calculons $\mathbb{P}(M)$.

Il y a équiprobabilité, M est réalisé par 8 issues et l'univers contient 40 issues donc : $\mathbb{P}(M) = \frac{8}{40}$.

$$\boxed{\mathbb{P}(M) = \frac{1}{5}.}$$

Vous verrez l'année prochaine un outils qui permet de faire ce genre de calcul sans avoir besoin de choisir une nouvelle modélisation appelé la probabilité conditionnelle.

Exercice 17.

Calculez la probabilité que deux élèves d'une classe de 35 élèves soient nés le même jour de l'année.

Exercice 18.

On lance un dé bien équilibré à six faces dont trois sont bleues, deux sont blanches et une est rouge.

1. Les trois couleurs sont-elles équiprobables ?
2. Déterminer la probabilité d'apparition de chaque couleur.

Correction de l'exercice 18

Commençons par modéliser cette situation avec l'équiprobabilité.
Notons $\Omega = \{B_1, B_2, B_3, Bl_1, Bl_2, R\}$ et munissons cet univers de l'équiprobabilité.

Notons
— E_1 : « obtenir le bleu »,
— E_2 : « obtenir le blanc »,
— E_3 : « obtenir le rouge ».
Comme dans tous les exercices précédents : $\mathbb{P}(E_1) = \frac{3}{6}$, $\mathbb{P}(E_2) = \frac{2}{6}$ et $\mathbb{P}(E_3) = \frac{1}{6}$.

Les trois couleurs ne sont pas équiprobables.

Considérons une autre modélisation.
On considère $\Omega = \{B, Bl, R\}$ muni de la loi de probabilité :

ω	B	Bl	R
$\mathbb{P}(\omega)$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{6}$

Nous avons bien une probabilité puisque la somme des probabilités égale 1.
Les probabilités sont alors immédiates et la conclusion est bien

les trois couleurs ne sont pas équiprobables.

Exercice 19.

On lance deux dés à quatre faces et on regarde la somme obtenue.

1. Donner l'ensemble des résultats possibles.
2. Donner une loi de probabilités de cette expérience aléatoire (justifier).
3. Quelle est la probabilité d'obtenir un nombre pair ?
4. Quelle est la probabilité d'obtenir un nombre multiple de trois ?

Correction de l'exercice 19

Pour cet exercice, à titre d'exemple je choisis une modélisation qui n'utilise pas l'équi-probabilité.

1. Au brouillon avec un tableau double entrée :

	1	2	3	4
1	2	3	4	5
2	3	4	5	6
3	4	5	6	7
4	5	6	7	8

Ce qui nous permet de choisir une modélisation.

Notons $\omega = \{2; 3; 4; 5; 6; 7; 8\}$ et munissons Ω de la loi :

ω	2	3	4	5	6	7	8
$\mathbb{P}(\omega)$	$\frac{1}{16}$	$\frac{2}{16}$	$\frac{3}{16}$	$\frac{4}{16}$	$\frac{3}{16}$	$\frac{2}{16}$	$\frac{1}{16}$

2. Notons A : « obtenir un nombre pair ».

Calculons $\mathbb{P}(A)$.

$A = \{2; 4; 6; 8\}$.
Par définition :

$$\mathbb{P}(A) = \mathbb{P}(\{2\}) + \mathbb{P}(\{4\}) + \mathbb{P}(\{6\}) + \mathbb{P}(\{8\})$$

D'après la loi de probabilité (tableau ci-dessus) :

$$\mathbb{P}(A) = \frac{1}{16} + \frac{3}{16} + \frac{3}{16} + \frac{1}{16}$$

$$\boxed{\mathbb{P}(A) = \frac{1}{2}.}$$

3. Notons B : « obtenir un multiple de trois ».

Calculons $\mathbb{P}(B)$.

$B = \{3; 6\}$.
Par définition :

$$\mathbb{P}(B) = \mathbb{P}(\{3\}) + \mathbb{P}(\{6\})$$

D'après la loi de probabilité (tableau ci-dessus) :

$$\mathbb{P}(B) = \frac{2}{16} + \frac{3}{16}$$

$$\boxed{\mathbb{P}(B) = \frac{5}{16}.}$$

Exercice 20. CRPE 2023

Une enseignante propose à ses élèves un jeu de 52 cartes. Le jeu contient 13 cartes (As, 2,3, ..., 10, Valet, Dame, Roi) de chacune des familles suivantes : carreau, cœur, pique, trêfle.
Cœur et carreau sont des familles de couleur rouge. Pique et trêfle sont de couleur noire.

1. L'enseignante donne une carte, choisie au hasard, à Ana.
   (a) Quelle est la probabilité que la carte d'Ana soit rouge ?
   (b) Quelle est la probabilité que la carte d'Ana soit un pique ?
   (c) Quelle est la probabilité que la carte d'Ana soit un valet ?
   (d) Quelle est la probabilité que la carte d'Ana soit une dame de couleur rouge ?
   (e) Quelle est la probabilité que la carte d'Ana soit une carte de couleur rouge ou une dame ?
2. L'enseignante décide d'ajouter des cartes Joker à son jeu. Combien doit-elle ajouter de carte joker pour que la probabilité qu'Ana reçoive une carte Joker soit de $\dfrac{1}{14}$.

Correction de l'exercice 20

1. (a) Modélisons la situation. Sans indication spécifique on peut estimer que toutes les cartes ont la même probabilité d'être tirées : il y a équiprobabilité. Ainsi l'univers formé des 52 cartes est muni de la loi uniforme.

   La moitié des cartes étant rouges :

   la probabilité d'obtenir une carte rouge est $\frac{1}{2}$.

   (b) Un quart des cartes étant des piques :

   la probabilité d'obtenir un pique est $\frac{1}{4}$.

   (c) Il y a quatre valets parmi les 52 cartes donc

   la probabilité d'obtenir un valet est $\frac{4}{52} = \frac{1}{13}$.

   (d) Il y a deux dames de couleur rouge parmi les 52 cartes donc

   la probabilité d'obtenir un valet est $\frac{2}{52} = \frac{1}{26}$.

(e) Il y a 26 cartes rouges et deux dames noires parmi les 52 cartes donc

la probabilité d'obtenir une carte de couleur rouge ou une dame est $\frac{28}{52} = \frac{7}{13}$.

2. Déterminons le nombre N de cartes joker rajoutées.

La probabilité d'obtenir une des N cartes joker parmi les $52 + N$ cartes est (en supposant toujours l'équiprobabilité) :

$$\frac{N}{52+N} = \frac{1}{14}$$

On en déduit par un produit en croix :

$$14N = 52 + N$$

équation du premier degré qui équivaut successivement à :

$$\begin{aligned} 14N - N &= 52 + N - N \\ 13N &= 52 \\ \frac{13N}{N} &= \frac{52}{13} \end{aligned}$$

$N = 4.$

Exercice 21. CRPE 2023

Dans une classe de Grande Section, l'enseignant propose à ses élèves le jeu suivant dans lequel il s'agit d'être le premier à avoir exactement 15 jetons (source : *Découvrir les maths GS* - Éditions Hatier). Chaque élève lance deux dés bien équilibrés, identiques, à 6 faces numérotées de 1 à 6.
Il considère les deux nombres indiqués sur les faces supérieures de chacun des dés.
Lorsque les deux dés indiquent le même nombre, l'élève prend autant de jetons que l'indique l'un des deux dés. Sinon, il prend autant de jetons que le plus grand des deux nombres ou le double de jetons du plus petit.
Après avoir lancé les dés, un élève a la possibilité de passer son tour. Dans ce cas, il ne prend aucun jeton.

1. Un élève lance les deux dés ; il obtient un 3 et un 2. Combien de jetons peut-il prendre ? Donner tous les cas possibles.
2. Dresser la liste des tirages permettant d'obtenir 3 jetons.
3. Un élève lance les deux dés.
   (a) Montrer que la probabilité de l'événement « les nombres obtenus sont un 3 et un 2 » est $\dfrac{1}{18}$.
   (b) Quelle est la probabilité de l'événement « au moins un des nombres obtenus est 3 » ?
   (c) Quelle est la probabilité de l'événement « les nombres obtenus permettent de prendre 4 jetons » ?
4. Après un nouveau lancer des deux dés, un élève a pris 3 jetons. Au lancer suivant, la probabilité qu'il prenne de nouveau 3 jetons augmente-t-elle, reste-t-elle identique ou diminue-t-elle par rapport à la probabilité d'avoir pris 3 jetons au tirage précédent ? Justifier.
5. En fin de partie, un élève possède 12 jetons. Lors de son lancer de dés, il obtient un 1 et un 4. Pourquoi est-il préférable pour lui de passer son tour ?

Correction de l'exercice 21

1. Les deux nombres étant distincts il peut prendre le nombre de jeton égale soit au plus grand des deux nombres obtenus, c'est-à-dire 3, soit le double du plus petit donc $2 \times 2 = 4$, soit encore passer son tour et n'obtenir aucun jeton.

   L'ensemble des cas possibles est $\{3; 4; 0\}$.

2. En distinguant les deux dés, un tirage est assimilable à un couple de nombre entiers compris (au sens large) entre 1 et 6. Par exemple $(1, 3)$ représente l'événement obtenir 1 avec le premier dé et 3 avec le second.
   Intuitivement :

L'ensemble des tirages permettant d'obtenir 3 est
$\{(1,3),(2,3),(3,3),(3,2),(3,1)\}$.

Pour s'en convaincre nous pouvons représenter dans un tableau double entrée le nombre de jetons obtenus en fonction des résultats des dés (sans tenir compte de la possibilité de passer son tour qui rajouterai un zéro dans chaque casse du tableau.

$D_1 \backslash D_2$	1	2	3	4	5	6
1	1	2	2 / 3	2 / 4	2 / 5	2 / 6
2	2	2	4 / 3	4	4 / 5	4 / 6
3	3 / 2	3 / 4	3	6 / 4	6 / 5	6
4	4 / 2	4	4 / 6	4	8 / 5	8 / 6
5	5 / 2	5 / 4	5 / 6	5 / 8	5	10 / 6
6	6 / 2	6 / 4	6	6 / 8	6 / 10	6

3. (a) Notons A : « les nombres obtenus sont un 3 et un 2 ».

Calculons $\mathbb{P}(A)$.

Les deux dés étant bien équilibrés il semble naturel de modéliser la situation en choisissant pour univers l'ensemble des 36 couples de nombres que donnent les dés et pour loi de probabilité la loi uniforme (équiprobabilité).
Il y a équiprobabilité, l'univers comporte 36 issues et $A = \{(2,3),(3,2)\}$ est réalisé par deux issues donc

$$\mathbb{P}(A) = \frac{2}{36}.$$

$\mathbb{P}(A) = \frac{1}{18}$.

(b) Notons B : « au moins un des nombres obtenus est 3 ».

Calculons $\mathbb{P}(B)$.

Il y a équiprobabilité, l'univers comporte 36 issues et

$$B = \{(1,3),(2,3),(3,3),(4,3),(5,3),(6,3),(2,6),(3,5),(3,4),(3,2),(3,1)\}$$

est réalisé par 11 issues donc

$\mathbb{P}(B) = \frac{11}{36}$.

(c) Notons C : « les nombres obtenus permettent de prendre 4 jetons ».

Calculons $\mathbb{P}(C)$.

Il y a équiprobabilité, l'univers comporte 36 issues et, d'après ce tableau

D_1 \ D_2	1	2	3	4	5	6
1	1	2	3 / 2	4 / 2	5 / 2	6 / 2
2	2	2	3 / 4	4	5 / 4	6 / 4
3	2 / 3	4 / 3	3	4 / 6	5 / 6	6
4	2 / 4	4	6 / 4	4	5 / 8	6 / 8
5	2 / 5	4 / 5	6 / 5	8 / 5	5	6 / 10
6	2 / 6	4 / 6	6	8 / 6	10 / 6	6

C est réalisé par 13 issues donc

$$\boxed{\mathbb{P}(C) = \frac{13}{36}.}$$

4. Il n'y a aucun lien entre deux lancés de dé. Les lancés sont indépendants. Ces sont des expériences aléatoires indépendantes et par conséquent

   la probabilité reste identique.

5. Il peut prendre $2 \times 1 = 2$ jetons ou 4 jetons.
   Il ne peut pas prendre 4 jetons puisqu'il a déjà 12 jetons et qu'il dépasserait l'objectif de 15 jetons.
   S'il prend les 2 jetons il en aura maintenant 14 et il devra n'en obtenir qu'un seul ensuite. Or la probabilité d'obtenir un seul jeton est de $\frac{1}{36}$ et celle d'obtenir directement 3 jetons est bien plus élevée.

   Il est préférable qu'il passe son tour en espérant obtenir un 3 au tour suivant.

Exercice 22. CRPE 2023

Deux élèves de CM2, Jeanne et Teddy, jouent à la bataille navale. Il s'agit d'un jeu de société, appelé également « touché-coulé ».

Les deux joueurs doivent commencer par placer quatre navires horizontalement ou verticalement (sans chevauchement) sur leur grille de 8 lignes et 8 colonnes, tenue secrète : 1 navire de deux cases, 2 navires de trois cases et 1 navire de quatre cases.

Ils doivent ensuite tenter de faire « couler » les navires adverses en « touchant » toutes les cases de chaque navire de l'autre joueur. Pour cela, chacun, à son tour, énonce une case de la grille, sous le format « lettre-nombre », par exemple C2.

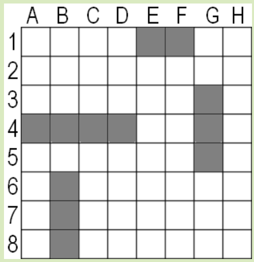
Lorsqu'un joueur énonce une case, son adversaire répond :

— « À l'eau ! », si la case énoncée est vide ;
— « Touché ! », si la case énoncée est occupée par un morceau de navire et si les autres parties du navire n'ont pas encore toutes été touchées ;
— « Touché-coulé ! », si la case énoncée est occupée par un morceau de navire et si toutes les autres parties du navire ont déjà été touchées.

Le gagnant est le joueur qui fait « couler » chez son adversaire tous les navires (au sens de toucher toutes les cases de chacun d'eux) avant que les siens ne le soient.

Voici ci-contre la grille de Teddy : les quatre bateaux sont schématisés par des rectangles gris.

On suppose qu'à chaque tir, Jeanne choisit au hasard et de manière équiprobable une case de la grille qu'elle n'a pas énoncée précédemment.



1. Au premier essai :

   (a) Quelle est la probabilité que Jeanne touche un bateau ?

   (b) Quelle est la probabilité que Jeanne ne touche aucun bateau ?

   (c) Un des bateaux a une chance sur seize d'être touché. De combien de cases est-il composé ?

   (d) Jeanne choisit une case de la colonne B. Quelle est la probabilité qu'elle touche un bateau ?

2. Au premier essai de la partie, Jeanne désigne la case « E1 ». Teddy annonce « Touché ! ». Jeanne souhaite couler le bateau touché et choisit une case adjacente à la case « E1 ».

   Quelle est la probabilité qu'elle coule le bateau au coup suivant ? Justifier.

3. Teddy annonce « À l'eau ! » pour les deux premiers essais de Jeanne. Quelle est la probabilité de toucher un bateau pour son troisième essai ?

Correction de l'exercice 22

1. (a) Notons T_1 : « elle touche un bateau au premier tir ».

Calculons $\mathbb{P}(T_1)$.

L'univers est formé des $8 \times 8 = 64$ cases de la grille. Les choix d'une telle case sont supposés équiprobables. T_1 est réalisé par 12 issues, à savoir les cases grisées : $(A, 4)$, $(B, 4)$, ...
Donc

$$\mathbb{P}(T_1) = \frac{12}{64}.$$

$$\boxed{\mathbb{P}(T_1) = \tfrac{3}{16}.}$$

(b) Calculons $\mathbb{P}(\overline{T_1})$.

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(\overline{T_1}) &= 1 - \mathbb{P}(T_1)\\ &= 1 - \frac{3}{16}\end{aligned}$$

$$\boxed{\mathbb{P}(\overline{T_1}) = \tfrac{13}{16}.}$$

(c) Déterminons le nombre n_c de cases formant le bateau recherché.

Il y a équiprobabilité entre les cases, il y a 64 cases au total, est l'événement T_2 : « le bateau recherché est touché est réalisé par n_c cases donc

$$\mathbb{P}(T_2) = \frac{n_c}{64}$$

Or, d'après l'énoncé, $\mathbb{P}(T_2) = \frac{1}{16}$ donc

$$\frac{1}{16} = \frac{n_c}{64}$$

Cette égalité équivaut successivement à :

$$\begin{aligned}\frac{1}{16}\times 64 &= \frac{n_c}{64}\times 64\\ 4 &= n_c\end{aligned}$$

$$\boxed{\text{Le bateau recherché est formé de 4 cases.}}$$

(d) Notons T_3 : « toucher un bateau en tirant dans la colonne B ».

Calculons $\mathbb{P}_2(T_3)$.

Nouvelle modélisation : l'univers est désormais formé des 8 cases de la colonne B qui sont toutes équiprobables et l'événement T_3 regroupe les 4 cases grisées de la colonne B donc

$$\mathbb{P}_2(T_3) = \frac{4}{8}$$

$$\boxed{\mathbb{P}_2(T_3) = \tfrac{1}{2}.}$$

2. Notons $T4$: « couler le bateau au coup suivant ».

   Calculons $\mathbb{P}_3(T_4)$.

   Nouvelle modélisation : l'univers est désormais formé des 3 cases qui entourent la cases E1 et qui permettent de placer un bateau et qui sont toutes équiprobables et l'événement T_4 regroupe la seule case grisée adjacente à E1 donc

$$\boxed{\mathbb{P}_3(T_4) = \tfrac{1}{3}.}$$

3. L'utilisation du présent dans l'énoncé des questions 3 et 4 crée une ambiguïté. Nous admettrons que la question 2 n'a pas eu lieu.

   Notons T_5 : « toucher un bateau après deux coups dans l'eau suivant ».

   Calculons $\mathbb{P}_4(T_5)$.

   Nouvelle modélisation : l'univers est désormais formé des $64 - 2 = 62$ cases qui n'ont pas été visées et qui sont toutes équiprobables et l'événement T_5 regroupe les 12 cases grisées donc

$$\mathbb{P}_4(T_5) = \frac{12}{62}$$

$$\boxed{\mathbb{P}_4(T_5) = \tfrac{6}{31}.}$$

Exercice 23. CRPE 2023

Dans une école élémentaire de 150 élèves, 80 sont des filles. Le directeur veut mettre en place un « orchestre à l'école ». Il réalise une enquête auprès des familles de l'école afin de connaître les élèves qui pratiquent déjà un instrument de musique.

À l'issue de l'enquête, il apparaît que 24 % des élèves sont musiciens.
Parmi ces élèves, 16 sont des garçons.

1. Reproduire et compléter le tableau suivant.

	Nombres d'élèves musiciens	Nombre d'élèves non-musiciens	Total
Nombre de filles			
Nombre de garçons			
Total			150

2. Dans cette question, on écrira les résultats sous forme de fractions irréductibles.
   On interroge un élève au hasard.
   (a) Quelle est la probabilité pour que ce soit un garçon ?
   (b) Quelle est la probabilité que ce soit une fille musicienne ?
   (c) Quelle est la probabilité que ce soit un élève non-musicien ?
3. L'élève interrogé est un garçon. Quelle est la probabilité qu'il soit musicien ?
4. 30 % des filles musiciennes jouent d'un instrument à vent. Quel pourcentage cela représente-t-il par rapport à l'effectif total de l'école ?

Correction de l'exercice 23

1.

	Nombres d'élèves musiciens	Nombre d'élèves non-musiciens	Total
Nombre de filles	20 (1)	60 (2)	80
Nombre de garçons	16	54 (3)	70 (4)
Total	36	114	150

* Nombre de filles : 80.
* 24 % des élèves sont musiciens : $\frac{24}{100} \times 150 = 36$.
* Parmi les élèves musiciens 16 sont des garçons.

Les autres les valeurs se déduisent par sommes ou différences dans l'ordre (1), (2), (3) puis (4) (d'autres ordres sont possibles).

2. (a) Notons G l'événement « l'élève choisi est un garçon ».

Calculons $\mathbb{P}(G)$.

Modélisons l'expérience aléatoire : Ω, l'univers, est l'ensemble des élèves, et nous le munissons de l'équiprobabilité.

G est réalisé par 70 issues, Ω en en contient 150 donc

$$\mathbb{P}(G) = \frac{70}{150}.$$

Des décompositions en facteurs premiers $70 = 2 \times 5 \times$ et $150 = 2 \times 3 \times 5^2$ nous déduisons la forme irréductible de la réponse :

$$\boxed{\mathbb{P}(G) = \tfrac{7}{15}.}$$

(b) Notons FM : « l'élève est une fille musicienne ».

Calculons $\mathbb{P}(FM)$.

FM étant réalisé par 20 issues donc

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(FM) &= \frac{20}{150} \\ &= \frac{2^2 \times 5}{2 \times 3 \times 5^2} \end{aligned}$$

$$\boxed{\mathbb{P}(FM) = \tfrac{2}{15}.}$$

(c) Notons M : « l'élève est un musicien ».

Calculons $\mathbb{P}(\overline{M})$.

$\overline{M}$ est réalisé par 114 issues donc

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(M) &= \frac{114}{150} \\ &= \frac{2 \times 3 \times 19}{2 \times 3 \times 5^2} \end{aligned}$$

$$\boxed{\mathbb{P}(M) = \tfrac{19}{25}.}$$

3. Avec les probabilités conditionnelles :

   Calculons $\mathbb{P}_G(M)$.

$$\begin{aligned}\mathbb{P}_G(M) &= \frac{\mathbb{P}(G \cap M)}{\mathbb{P}(G)}\\ &= \frac{\frac{16}{150}}{\frac{70}{150}}\\ &= \frac{16}{70}\\ &= \frac{2^4}{3 \times 5 \times 7}\end{aligned}$$

$$\boxed{\mathbb{P}_G(M) = \tfrac{16}{70}.}$$

   Il est possible de raisonner en changer de modélisation.
   Notons Ω' l'ensemble 70 garçons et munissons-le de l'équiprobabilité.
   Dans cet univers M est réalisé par 16 donc

$$\mathbb{P}'(M) = \frac{16}{70}.$$

4. Calculons la proportion de musiciennes d'instruments à vent dans l'école.

   * Le nombre de filles jouant d'un instrument à vent est

$$\frac{30}{100} \times 20 = 6.$$

   * La proportion représentée par les 6 filles est

$$\frac{6}{150} = \frac{1}{25}.$$

   Enfin, comme $\frac{1}{25} = \frac{4}{100}$.

   4 % des élèves sont des filles jouant d'un instrument à vent.