

15 Inéquations produit ou quotient nul.

Exercice 1.

Essayez de résoudre, dans l'ensemble des réels, les inéquations d'inconnue x .

$$(E_1) \quad -3x + 1 < 0$$

$$(E_2) \quad 2(x - 3)(-7x + 14) > 0$$

I Étude du signe d'une fonction factorisée.

Exercice 2.

Étudiez le signe de la fonction f définie sur $[-10; 10]$ par, pour tout $x \in [-10; 10]$

$$f(x) = (3x - 7)x^2(-x + 1)$$

Exercice 3.

Étudiez le signe de $g : \begin{cases} [-6; 4] & \rightarrow \mathbb{R} \\ x & \mapsto (x + 4)(-x + 2) \end{cases}$

II Inéquation produit-nul.

Exercice 4.

Résolvez l'inéquation $-2(x + 1)(-7 - x) \geq 0$ dans \mathbb{R} .

Exercice 5.

- | | |
|--------------------------------|---|
| 1. $(x - 5)(-2x + 6) \geq 0$ | 10. $-2x(x - 1)(4 - x) \leq 0$ |
| 2. $(3x - 5)(x + 4) > 0$ | 11. $x^2(4 - x)(-2x + 1) > 0$ |
| 3. $(x + 3)(-x + 6) \leq 0$ | 12. $x^3(x + 1) < 0$ |
| 4. $(-x + 4)(3x + 2) > 0$ | 13. $(x^2 + 1)(x - 1) \geq 0$ |
| 5. $(10x + 5)(-3x + 4) > 0$ | 14. $(x - 2)(4 - x) < 0$ |
| 6. $(x - 4)(3 - x) \leq 0$ | 15. $\left(\frac{3}{4} - x\right)\left(x - \frac{7}{6}\right) \geq 0$ |
| 7. $(-2x + 3)(5 + x) > 0$ | 16. $(x + \sqrt{3})(x - 4) \geq 0$ |
| 8. $3x(3x - 5) < 0$ | 17. $(3x - 7)(7 - 3x) \leq 0$ |
| 9. $-(x + 1)^2(2x - 1) \geq 0$ | |

III Inéquation se ramenant à une inéquation produit-nul.

Exercice 6.

Justifiez que les inéquations suivantes sont équivalentes

$$(2x - 4)(x + 5) + x > -5 \text{ et } (2x - 3)(x + 5) > 0$$

puis résolvez l'inéquation $(2x - 4)(x + 5) + x > -5$.

Exercice 7.

Résolvez dans \mathbb{R} l'inéquation $x^2 \leq 16$.

Exercice 8.

Résolvez les inéquation suivantes dans l'ensemble des réels.

- | | |
|-------------------------------------|--|
| 1. $x^2 - 4x \leq -2x - 1$ | 11. $x^2 \leq -16$ |
| 2. $3x(x + 3) - (x + 3)^2 \leq 0$ | 12. $x^2 \leq 0$ |
| 3. $x^3 + 2x^2 + x \geq 0$ | 13. $x^2 < 8$ |
| 4. $x(x + 6) > 3(x + 6)$ | 14. $x^2 \leq 144$ |
| 5. $2x(x - 3) + 3x - 9 < 6x - 18$ | 15. $x^2 \leq 20$ |
| 6. $x^2(1 - 3x) + 4(6x - 2) \geq 0$ | 16. $x^2 - 4 + (x + 2)(2x + 5) < 0$ |
| 7. $(1 - 2x)x - 4x(x + 6) \leq 0$ | 17. $(x + 1)(x - 3) \geq x^2 - 9$ |
| 8. $7 - x^2 < 2x - 2\sqrt{7}$ | 18. $4x - 4 + (x - 1)(x - 4) + x^2 - 1 > 0$ |
| 9. $(x^2 - 1) + 2x - 2 > 6x - 6$ | 19. $(x + 5)^2 \leq (x + 5)(x + 3)$ |
| 10. $x^2 \leq 10$ | 20. $(2x - 1)(x + 3) \geq \left(x - \frac{1}{2}\right)(x + 6)$ |

IV Inéquation quotient.

Exercice 9.

Résolvez l'inéquation $\frac{-x + 1}{-2x + 8} > 0$.

Exercice 10.

Résolvez les inéquations dans \mathbb{R} .

1. $\frac{2x-4}{x+2} \leq 0$
2. $\frac{-2x+8}{3x-2} \leq 0$
3. $\frac{2x+4}{x-1} - 2 \geq 0$
4. $\frac{2x+4}{x+1} < 3$
5. $\frac{2x+3}{x+1} \leq \frac{x-6}{x+1}$
6. $1 < \frac{2x+10}{-x+3}$
7. $\frac{x+3}{2x-1} \geq 0$
8. $\frac{2-x}{5-2x} \leq 0$
9. $\frac{3x-1}{-x+5} > 0$
10. $\frac{5x(x-2)}{4x+1} < 0$
11. $\frac{2x^2}{(-x+1)(x+3)} \geq 0$
12. $\frac{-x(x-4)}{2+x^2} \leq 0$
13. $\frac{(x+1)(x-2)}{3-x} > 0$
14. $\frac{9-4x}{11-5x} < 0$
15. $\frac{-5+4x}{2x-1} \geq 0$
16. $\frac{x+1}{3-x} \leq 0$
17. $\frac{7-2x}{2x-1} > 0$
18. $\frac{-5x}{(2x-7)^2} < 0$
19. $\frac{1+2x^2}{7-x} \geq 0$
20. $\frac{x+4}{5-x} < 2$

